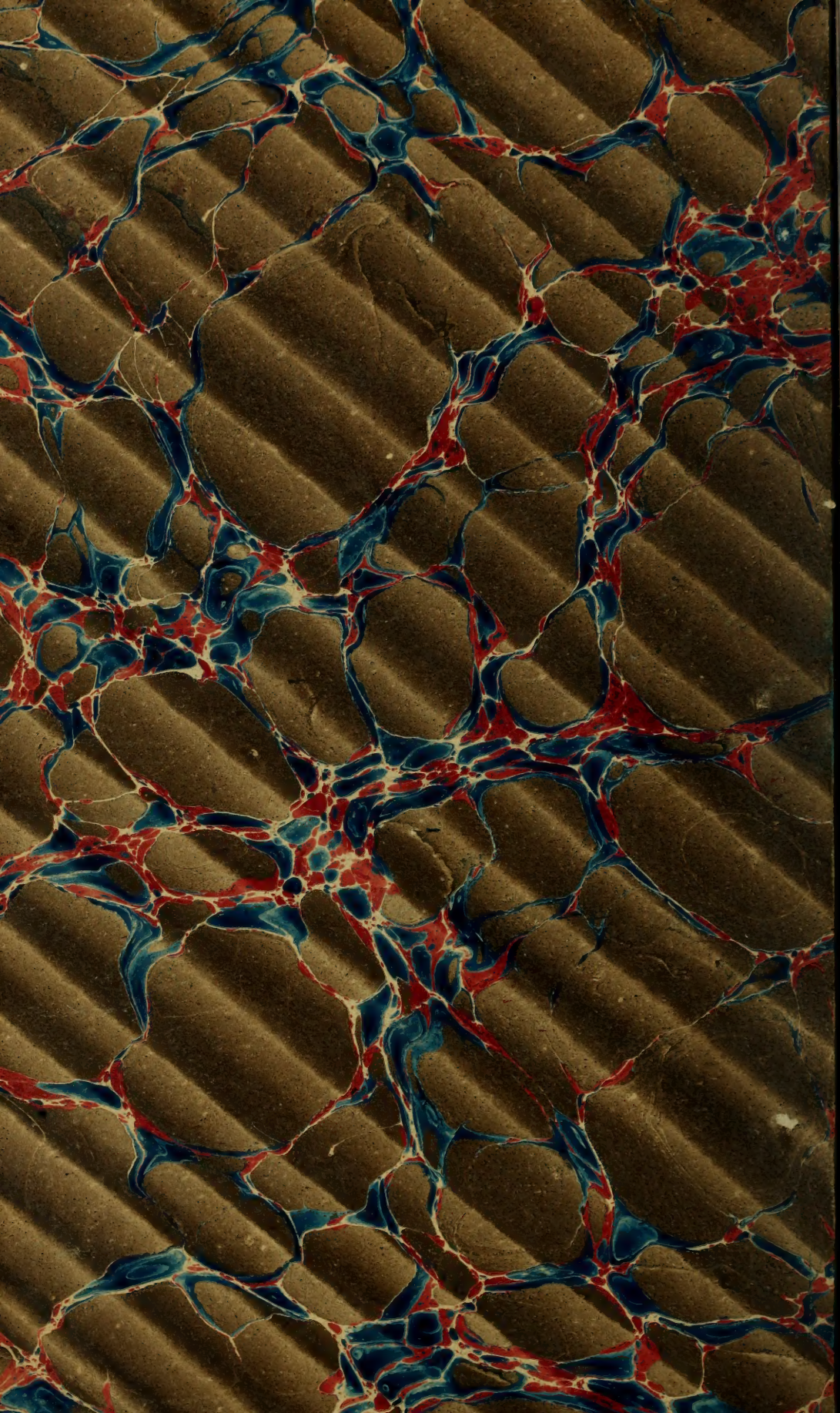
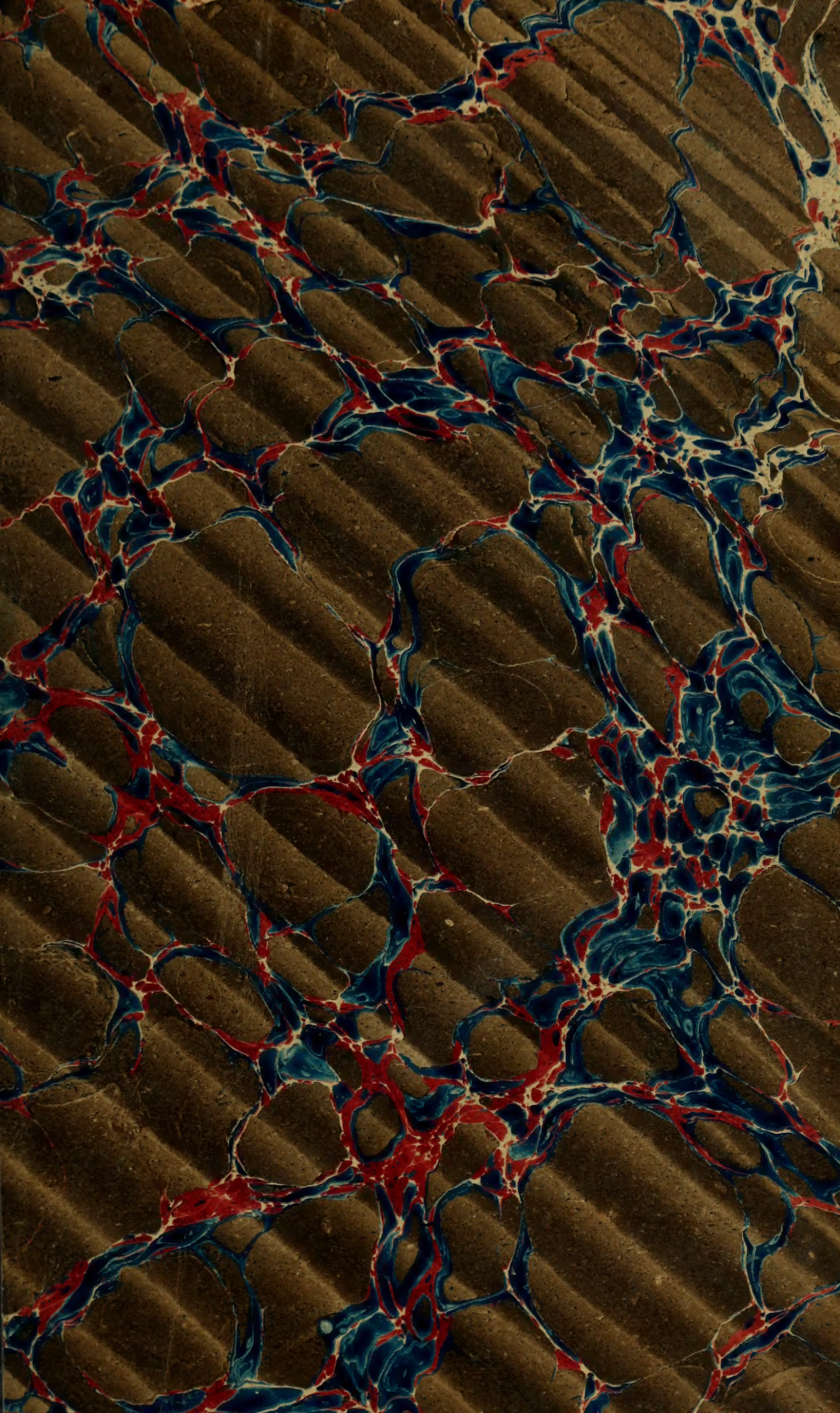
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY





JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

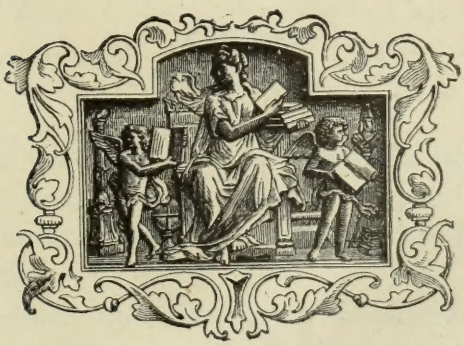
DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

VAZEILLE
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE
TOME QUATRIÈME
Année 1885.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1885

QA
1
J6836
Ser. 2
t. 4

20503
6

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

ETUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir journal 1884, p. 241.)

CHAPITRE IV

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME DE m ÉQUATIONS A $m + n$ INCONNUES

47. — Prenons, pour exposer la méthode, trois équations à cinq inconnues

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{array}\right\} \qquad (125)$$

Les solutions qui conviennent aux trois équations doivent être comprises parmi celles qui conviennent à la première, considérée isolément. Résolvons donc la première au moyen des formules (29).

Nous exprimerons ainsi les cinq inconnues au moyen de quatre indéterminées t_1, t_2, t_3, t_4. Portons ces valeurs dans les équations $B = 0$, $C = 0$. Nous aurons ainsi deux équations à quatre inconnues, t_1, t_2, t_3, t_4.

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{array}\right\} \qquad (126)$$

dans lesquelles les coefficients des inconnues devront pouvoir être ramenés à être premiers entre eux.

Si ces équations, considérées isolément, peuvent être résolues, résolvons la première au moyen des formules (29). Nous exprimons t_1, t_2, t_3, t_4 au moyen de trois indéterminées θ_1, θ_2, θ_3.

Remplaçant enfin dans $C_1 = 0$ les inconnues par ces dernières valeurs, nous aurons une seule équation

$$C_2 = 0, \tag{127}$$

à trois inconnues, θ_1, θ_2, θ_3.

Si cette dernière peut être résolue, θ_1, θ_2, θ_3 pourront être exprimés au moyen de deux indéterminées, φ_1 et φ_2, et les cinq inconnues des équations primitives pourront être exprimées au moyen de ces deux mêmes indéterminées.

On aura ainsi les valeurs des inconnues.

48. — Nous ne nous arrêterons pas à justifier cette méthode ni même à examiner les cas particuliers. Nous allons seulement fixer la forme des résultats.

La méthode que nous venons d'exposer fait d'abord connaître les expressions des cinq inconnues t_1, t_2, t_3, t_4. De ces cinq expressions, la première dépend de t_1 seulement; la deuxième de t_1 et de t_2; la troisième de t_1, t_2 et t_3; et enfin les deux dernières, des quatre indéterminées.

La résolution de $B_1 = 0$ donnera les expressions de t_1, t_2, t_3, t_4 en θ_1, θ_2, θ_3, et de ces quatre expressions la première ne contiendra que θ_1, la deuxième, que θ_1 et θ_2, et les deux autres, θ_1, θ_2 et θ_3.

De la sorte, on voit que les cinq inconnues pourront être exprimées en θ_1, θ_2, θ_3, la première en θ_1 seulement ; la deuxième en θ_1 et θ_2 ; et les trois autres en θ_1, θ_2 et θ_3.

La résolution de $B_2 = 0$ donnera les expressions de θ_1, θ_2, θ_3 en φ_1 et φ_2, et ces trois expressions, portées dans les valeurs des inconnues primitives, donneront à ces cinq inconnues des expressions dont la première ne contiendra que φ_1, et toutes les autres φ_1 et φ_2.

49. — Quoique la méthode du n° 47 ait été exposée sur un système particulier de trois équations à cinq inconnues, il est évident qu'elle est générale et nous pouvons conclure de cet exemple que les formules de résolution d'un système

de m équations à $m + n$ inconnues, sauf certains cas exceptionnels où quelques-unes d'entre elles résulteraient des précédentes, dépendent de n indéterminées, l'une des inconnues dépendant d'une seule indéterminée; une seconde, de deux ; une troisième, de trois, etc.; la $(n - 1)^e$, de $n - 1$; et toutes les autres, de n indéterminées.

Le système à résoudre étant donc le suivant

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \ldots + h_1x_{m+n} = K_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \ldots + h_2x_{m+n} = K_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mx_1 + b_mx_2 + c_mx_3 + \ldots + h_mx_{m+n} = K_m \end{array}\right\} (128)$$

s'il est susceptible de recevoir des solutions entières, et s'il ne contient aucune équation inutile, ces solutions auront des expressions de la forme

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \xi_1 + \rho_1 t_1 \\ x_2 = \xi_2 + A_2 t_1 + \rho_2 t_2 \\ x_3 = \xi_3 + A_3 t_1 + B_3 t_2 + \rho_3 t_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \xi_{n-1} + A_{n-1} t_1 + B_{n-1} t_2 + \ldots + \rho_{n-1} t_{n-1} \\ x_n = \xi_n + A_n t_1 + B_n t_2 + \ldots + Q_n t_{n-1} + \rho_n t_n \\ x_{n+1} = \xi_{n+1} + A_{n+1} t_1 + B_{n+1} t_2 + \ldots + Q_{n+1} t_{n-1} + \rho_{n+1} t_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m+n} = \xi_{m+n} + A_{m+n} t_1 + B_{m+n} t_2 + \ldots + Q_{m+n} t_{n-1} + \rho_{m+n} t_n \end{array}\right\} (129)$$

50. — Ces résultats font voir que toutes les valeurs de l'inconnue x_1 forment une progression par différence.

Toutes les autres inconnues ayant, dans l'équation, un rôle semblable à celui de x_1, et pouvant, à volonté, être exprimées au moyen d'une seule indéterminée, on voit que les valeurs de chacune d'elles forment une progression par différence.

51. — On aurait pu résoudre ce même système (125) par une autre méthode.

Une solution du système étant supposée connue, on aurait pu raisonner, comme au chapitre Ier, pour le cas d'une seule équation, et le résultat que l'on aurait ainsi obtenu, conforme aux formules (129), aurait permis de remarquer que, dans ces formules, les seules quantités ρ_1, ρ_2, ... ρ_{m+n}

sont fixes; toutes les autres peuvent être considérées comme des premières solutions de systèmes successifs, et peuvent varier à l'infini.

52. — Nous allons résoudre un cas particulier de la question, celui où le nombre des inconnues est supérieur d'une unité au nombre des équations.

Soit le système

$$\left.\begin{array}{c} a_1X_1 + b_1X_2 + \ldots + h_1X_{m+1} = 0 \\ a_2X_1 + b_2X_2 + \ldots + h_2X_{m+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mX_1 + b_mX_2 + \ldots + h_mX_{m+1} = 0 \end{array}\right\} \quad (130)$$

résultant d'un système quelconque à $m + 1$ inconnues dans lequel nous avons remplacé : 1° les inconnues par les valeurs d'une première solution $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m+1}$, 2° retranché chaque égalité de l'équation d'où elle dérive, et 3° remplacé $x_1 - \xi_1$ par X_1, $x_2 - \xi_2$ par X_2, etc., suivant la seconde méthode dont il est question au numéro précédent.

Résolvons ces m équations comme un système de m équations déterminées à m inconnues :

$$X_1 = \frac{N_1}{D} X_{m+1}$$

$$X_2 = \frac{N_2}{D} X_{m+1}$$

$$\ldots\ldots$$

$$X_m = \frac{N_m}{D} X_{m+1}.$$

Réduisons les coefficients de X_{m+1} au plus petit dénominateur commun, en divisant tous les termes de ces diverses fractions par leur plus grand commun diviseur :

$$X_1 = \frac{n_1}{d} X_{m+1}$$

$$X_2 = \frac{n_2}{d} X_{m+1}$$

$$\ldots\ldots$$

$$X_m = \frac{n_m}{d} X_{m+1}$$

$X_{m+1} = dt$ rend toutes ces expressions entières, et il vient :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + n_1 t \\ x_2 &= \xi_2 + n_2 t \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= \xi_m + n_m t \\ x_{m+1} &= \xi_{m+1} + dt. \end{aligned}$$

53. — Nous devrions, pour terminer cette première partie, indiquer le moyen de trouver parmi toutes les solutions, celles qui sont positives, ces solutions étant les seules qui puissent convenir à la plupart des questions.

On devrait écrire que les seconds membres des formules (129) sont plus grands que zéro, et on aurait ainsi à résoudre un système d'inéquations.

La question est trop simple pour mériter un examen.

Nous ferons une seule remarque à ce sujet :

Lorsqu'une équation à n inconnues

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = \mathrm{K}$$

a tous ses coefficients positifs, et son terme tout connu, également positif, elle ne peut être résolue que d'un nombre limité de manières en nombres entiers positifs.

Dans le cas, en effet, où cette équation peut être résolue en nombres entiers, l'inconnue x_1 a des valeurs qui forment une progression par différence, et il est évident que la valeur de $a_1 x_1$ ne peut dépasser K, car alors l'une au moins des autres inconnues devrait avoir une valeur négative.

L'inconnue x, ne pourra donc prendre qu'un nombre limité de valeurs ; il en sera de même des autres inconnues, et l'équation ne pourra avoir qu'un nombre limité de solutions positives. Il sera même possible que, pouvant être résolue en nombres entiers, elle n'ait aucune solution positive, si, par exemple, chacun des coefficients a_1, a_2, ... a_3 était plus grand que K.

Si, dans un système d'équations, une seule des équations qui le composent a tous ses coefficients positifs, et le terme tout connu, dans le second membre, également positif.

comme les solutions qui satisfont au système doivent vérifier chacune des équations, le nombre des solutions positives sera également limité, et ce nombre pourra même être nul, dans certains cas.

Nota. — Ici se termine la première partie du travail de M. Ferrent. Nous commencerons dans le numéro prochain la publication de la seconde partie. Celle-ci est relative à l'analyse indéterminée du second degré, sujet moins connu et plus intéressant. Parmi les travaux récents, sur l'analyse indéterminée du premier degré, on peut consulter : 1° un article de M. l'abbé Clasen *(Annales de l'École normale; 1867, p. 347)*; 2° un mémoire de M. Ch. Mèray *(Annales de l'École normale, 2e série; tome XII, mars 1883)*. G. L.

NOUVELLES REMARQUES

SUR LA DROITE DE SIMSON

Par M. **Maurice d'Ocagne,**

Élève Ingénieur des Ponts et Chaussées.

L'intéressante étude publiée dernièrement par M. Weill sur la droite de Simson ayant attiré particulièrement l'attention des lecteurs du *Journal de mathématiques élémentaires* sur ce sujet, nous demanderons la permission d'y ajouter les quelques remarques qui suivent.

I. — Nous rappellerons, avant de commencer, quelques formules dont nous avons donné des démonstrations élémentaires dans ce journal (*).

A et B étant des points variables dont les déplacements infiniment petits correspondants seront représentés par d (A) et d (B), on a, en appelant T le point de concours des tangentes en A et B aux trajectoires de ces deux points, et

(*) T. IV, 1880, p. 433.

E le point où AB touche son enveloppe,

$$(1) \qquad \frac{d(A)}{d(B)} = \frac{AE \,.\, AT}{BE \,.\, BT}.$$

Cette formule est attribuée à Newton.

Lorsque la droite AB se déplace parallèlement à une direction fixe, la formule précédente devient

$$(2) \qquad \frac{d(A)}{d(B)} = \frac{AT}{BT}.$$

Si les normales en A et B aux trajectoires de ces deux points coupent respectivement en α et β la normale à la trajectoire de la droite AB, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée à AB par le point E, on a

$$(3) \qquad \frac{d(A)}{d(B)} = \frac{A\alpha}{B\beta}.$$

Ces formules, jointes à quelques propositions bien connues de géométrie élémentaire, nous suffiront pour établir les théorèmes que nous avons en vue.

II. — Soient a, b, c *(fig. 1)* les côtés, prolongés indéfiniment, du triangle ABC; a', b', c' les parallèles à ces côtés menées par le centre O du cercle circonscrit.

Prenant un point M sur le cercle circonscrit, et abaissant de ce point les perpendiculaires MP, MQ, MR sur les trois côtés, nous obtenons la *droite de Simson* RPQ relative au point M, et que nous désignerons par d.

Soient E le point où cette droite d touche son enveloppe, ST la tangente au cercle circonscrit au point M. Considérons le triangle variable MRQ. Les côtés MR et MQ, restant perpendiculaires respectivement aux droites BC et AC, ont une direction fixe. L'application de la formule (2) donne donc

$$\frac{d(R)}{d(M)} = \frac{TR}{TM}$$

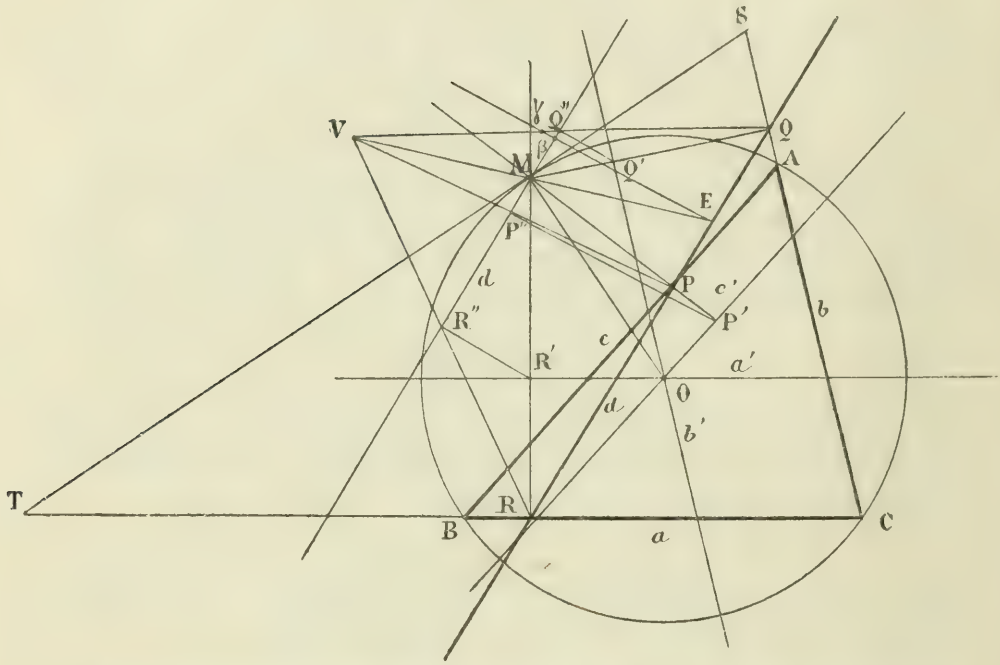
$$\frac{d(M)}{d(Q)} = \frac{SM}{SQ};$$

si les droites MR et MQ coupent la perpendiculaire élevée en E à la droite d aux points γ et β, la formule (3) donne

$$\frac{d(Q)}{d(R)} = \frac{Q\beta}{R\gamma}.$$

Des formules précédentes nous déduisons

$$\frac{Q\beta}{R\gamma} = \frac{TM \,.\, SQ}{TR \,.\, SM}.$$



Joignons le point M au centre O du cercle circonscrit. Nous avons en appelant P′, Q′, R′ les points de rencontre respectifs de MP avec c', de MQ avec b', de MR avec a',

$$\frac{TM}{TR} = \frac{MO}{MR'} \qquad \frac{SQ}{SM} = \frac{MQ'}{MO};$$

donc

$$\frac{Q\beta}{R\gamma} = \frac{MQ'}{MR'}$$

ou

$$\frac{Q\beta}{MQ'} = \frac{R\gamma}{MR'}.$$

Projetons orthogonalement les points P′, Q′, R′, en P″, Q″, R″ sur la parallèle d' menée par le point M à la droite d; nous avons

$$\frac{Q\beta}{MQ'} = \frac{EQ}{MQ''}, \qquad \frac{R\gamma}{MR'} = \frac{ER}{MR''};$$

par suite :

$$\frac{EQ}{MQ''} = \frac{ER}{MR''}$$

On verrait de même que le rapport $\frac{EP}{MP''}$ est égal aux deux précédents; on a donc, en somme :

$$\frac{EP}{MP''} = \frac{EQ}{MQ''} = \frac{ER}{MR''},$$

égalités qui montrent que les droites PP″, QQ″, RR″ concourent en un même point V de la droite ME; de là ce théorème :

Théorème I. — *Si les perpendiculaires* MP, MQ, MR, *abaissées du point* M *sur les trois côtés* c, b, a, *coupent respectivement aux points* P′, Q′, R′ *les droites* c′, b′, a′; *et si les projections orthogonales de ces points sur la parallèle* d′ *à la droite* d *menée par le point* M, *sont* P″, Q″, R″ :

1° *Les droites* PP″, QQ″, RR″ *concourent en un même point* V,

2° *La droite qui joint ce point* V *au point* M *passe par le point où la droite de Simson* d *correspondante touche son enveloppe.*

On simplifie la construction en remarquant que les points R′, Q′, P′, d'où peuvent se déduire les points R, Q, P, sont à la rencontre des droites a', b', c' avec le cercle qui a OM pour diamètre. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMETRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

Nous nous proposons, dans le travail que nous entreprenons ici, de résoudre, avec la règle seule ou, dans d'autres cas, avec la règle et l'équerre, quelques problèmes de la géométrie pratique.

Cet ouvrage est divisé en deux parties. Dans la première, nous nous occupons surtout d'exposer les principes théoriques qui seront utilisés dans la suite de l'ouvrage; puis nous les appliquons au tracé de quelques courbes célèbres. Dans l'autre, nous développons les solutions que comportent certaines questions que soulèvent l'arpentage et l'art de la guerre (*). D'ailleurs, les démonstrations des principes sur lesquels nous basons nos constructions, n'exigent, pour être comprises, que la connaissance de la géométrie élémentaire: ce n'est qu'à de rares occasions que nous avons fait un emprunt très court aux notions supérieures.

Avant d'entrer dans notre sujet, une analyse un peu détaillée du livre qui nous paraît se rapprocher le plus de celui que nous allons écrire fera mieux apprécier la portée de celui-ci, l'intérêt qu'il comporte et le but que nous nous sommes posé.

(*) Ce travail paraîtra régulièrement dans ce journal; mais, pour empiéter le moins possible sur les autres articles, nous serons dans l'obligation de faire durer quelque temps cette publication. Dans ces conditions, et pour qu'on suive mieux la chaîne qui relie les uns aux autres ces articles interrompus, nous croyons utile de faire connaître ici le plan général de notre livre, en nous bornant toutefois aux énoncés des points principaux qu'il traite.

Première partie. — Préface, développements bibliographiques. — Théorie des transversales. — Théorèmes divers. — Transversales et points réciproques. — Étude géométrique de quelques courbes célèbres. — L'ellipse. — L'hyperbole et la parabole. — Tracé de ces courbes, point par point, au moyen d'une équerre. — Tracé de leurs tangentes.

La cissoïde. — La strophoïde. — Les conchoïdes; le limaçon de Pascal et la conchoïde de Nicomède. — La lemniscate de Bernoulli. — Le trident de Newton. — Générations diverses de ces courbes. — Leur tracé, point par point, avec la règle et l'équerre. — Construction de la tangente, le point de contact étant donné.

Deuxième partie. — Application des jalonnements, de l'équerre et de la fausse équerre à l'arpentage et aux problèmes que soulève l'art de la guerre. — Problèmes solubles avec des alignements. — Partager une droite en n parties égales; méthode de Servois, méthode de M. Cremona. — Mener par un point une parallèle à une ligne inaccessible. — Construction du conjugué harmonique. — Prolonger une droite au delà d'un obstacle: 1° par des alignements; 2° par le moyen de l'équerre. — Méthode de Reye; application d'un porisme, pour résoudre ce problème; solutions nombreuses qu'il comporte. — Distance d'un point à un point inaccessibte; méthode de Schooten; solutions diverses. — Méthode rapide pour partager une droite donnée, en 10, 100,... parties égales. — Établir des batteries dont les feux convergent sur

L'ouvrage auquel nous venons de faire allusion est dû à Servois (*). Chasles le cite, non sans éloges, dans son Aperçu historique (**) et dit à propos de lui : « Passons aux autres ouvrages qui, après ceux de Monge et de Carnot, ont servi le plus utilement la science.

» Tels nous paraissent être :

» L'intéressant essai de la géométrie de la règle, où M. Servois, après avoir réuni les théorèmes principaux de la théorie des transversales, en montre les usages en géométrie rationnelle, pour la démonstration des propositions, et dans la géométrie pratique, pour résoudre sur le terrain, par des alignements, les différents problèmes qui se présentent surtout à la guerre, etc.... »

Ces quelques lignes, que nous empruntons à l'*Aperçu historique*, résument bien le livre de Servois; mais il nous paraît utile d'analyser cet ouvrage d'une façon plus explicite et nous voulons entrer dans des détails plus circonstanciés sur les points principaux qui s'y trouvent développés.

La partie théorique du livre de Servois, son exposition des principes fondamentaux de la théorie des transversales, sont de peu d'importance; elles n'offrent plus aujourd'hui, vu les démonstrations simples de la géométrie moderne, aucun intérêt. Il n'en est pas de même de la partie pratique.

---

une droite dont les extrémités seules sont visibles. — Construction du chemin de sûreté dans le siège d'un fort. — Mesurer la longueur d'une ligne inaccessible; méthode de Servois; usage de la table qui donne, sous forme de fractions décimales, les inverses des nombres entiers. — La traversée d'une rivière. — Le passage entre deux forts dont la distance est plus petite que le double de la portée des pièces. — Usage du cordeau. — Élever des perpendiculaires avec la fausse équerre ou avec le cordeau, etc...

(*) *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*, pour servir de supplément aux traités connus de cette science; recueillies par F.-J. Servois, professeur de mathématiques aux Écoles d'Artillerie. (A Metz, chez Devilly, libraire, rue du Petit-Paris; et à Paris, chez Courcier, libraire, quai des Augustins, an XII.)

Cet ouvrage est devenu extrêmement rare. Le seul exemplaire qui existe, à notre connaissance, appartient à la bibliothèque du dépôt des Fortifications, au ministère de la guerre. C'est par l'intermédiaire amical de M. Laisant, et grâce à l'obligeance du général Brissonnet, que nous avons pu posséder pendant quelques jours cet exemplaire. Nous leur en exprimons ici tous nos remerciements.

(**) Chasles, *Aperçu historique*, p. 213.

Servois, comme professeur aux écoles d'artillerie, s'est particulièrement préoccupé des applications de la géométrie à l'art de la guerre; il a cherché, et quelquefois trouvé avec bonheur des solutions simples, et vraiment pratiques, des problèmes principaux qui intéressent la guerre des sièges et les combats d'artillerie. « Il est utile, dit Servois, surtout à la guerre, de pouvoir exécuter sur le terrain diverses opérations géométriques, telles que : *mesurer des distances*, *prendre des prolongements*, *mener des parallèles*, etc..., sans le secours d'instruments de prix qu'on acquiert et qu'on transporte difficilement. »

Pour résoudre ces différents problèmes, Servois accorde *les jalons*, *l'équerre d'arpenteur*, *le cordeau* et *la chaîne*. Mais à propos de ce dernier instrument, il dit : « Le chaîner, s'il est permis de s'exprimer ainsi, exige beaucoup de temps et de soin ; tandis qu'on peut toujours prendre des alignements avec exactitude et célérité. C'est pour ce motif qu'il propose, très sagement à notre avis, *de multipler les alignements, en diminuant les chaînages*.

Aux instruments que nous avons cités, Servois ajoute encore ce qu'il nomme *la fausse équerre*. Par fausse équerre, Servois entend la figure formée par deux droites formant un angle fixe, différent de l'angle droit, et, après avoir montré, à plusieurs reprises, tout le parti qu'on peut tirer de cet instrument, Servois termine son livre en disant : « Ce n'est pas sans raison que j'ai si souvent fait observer qu'on pouvait remplacer l'équerre par la fausse équerre. C'est qu'on peut partout, et sans frais, se procurer la dernière; deux traits de scie en croix, sur la tête d'un piquet, font tout l'instrument. »

Comme le fait encore observer Servois, la fausse équerre partage avec l'équerre ordinaire le mérite de fournir le moyen de répéter, autant de fois que l'on veut, le même angle; d'ailleurs, la fausse équerre peut au besoin, remplacer complètement l'équerre ordinaire, puisqu'il est possible, avec celle-là, d'abaisser ou d'élever des perpendiculaires.

Quant aux arcs de cercle décrits sur le terrain, Servois

s'en refuse systématiquement l'usage et il dit à ce propos, dans sa préface : « J'ai eu l'attention particulière de ne me jamais servir de la chaîne, comme compas; c'est-à-dire de ne jamais déterminer la position d'un point sur le terrain par l'intersection de deux arcs de cercle, ou d'une droite et d'un arc. » Et plus loin, dans le corps de l'ouvrage, Servois revenant sur les constructions où l'on fait usage des arcs de cercle, dit encore : « Si les rayons des arcs sont petits, l'opération manque de justesse; s'ils sont très grands, l'opération est presque impossible. »

On voit suffisamment, par les citations qui précèdent, quelles sont les idées pratiques qui ont présidé à la composition du livre de Servois. Si nous ne nous arrêtons pas davantage à l'analyse de cet ouvrage, c'est que nous aurons occasion, à plusieurs reprises, d'indiquer dans la suite de cet ouvrage certaines solutions proposées par Servois et dont quelques-unes, *peu connues*, même aujourd'hui, méritent, il nous semble, d'être mises en lumière.

L'ouvrage de Servois, livre ingénieux et plein de ce bon sens pratique qui se trouve là si bien à sa place, a été précédé de nombreuses publications analogues. Nous citerons d'abord comme plus particulièrement dignes de remarque le traité de Schooten et celui de Mascheroni.

Le livre de Schooten (*) est, d'après Chasles (**), le premier exemple de cette géométrie qui se propose la solution de certains problèmes *par la ligne droite seulement*, géométrie que Brianchon a cultivée au commencement de ce siècle et qu'il a nommée *la Géométrie de la règle*.

L'ouvrage de Schooten, sauf un ou deux points que nous ferons connaître, n'aborde qu'un très petit nombre de problèmes et les solutions qu'il expose sont généralement longues et peu élégantes. De plus, il présente, et Servois est

---

(*) Francisci a Schooten, *Exercitationum mathematicarum*, liber II. D constructione problematum simplicium geometricorum, seu, quæ solvi possun ducendo tantum rectas lineas. (Lugduno-Batavia, 1656.) Cet ouvrage est moins rare que celui de Servois : on en trouve, notamment, un exemplaire à la bibliothèque de l'École Polytechnique, et un autre à la Bibliothèque nationale.

(**) *Aperçu historique* 98.

tombé dans la même erreur, un cercle vicieux dont nous devons dire ici un mot.

Schooten dit à la première page de son livre : « Postuletur : ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem. »

Or, porter sur une droite donnée, à partir d'un point donné, une longueur déterminée est une opération qui ne peut, *en général*, être effectuée qu'avec l'aide du compas. Cette règle souffre des exceptions que nous aurons occasion de signaler, notamment lorsque la longueur déterminée est parallèle à la droite sur laquelle il faut les porter ou lorsqu'elle est inclinée sur celle-ci d'un angle égal à 60°. Mais la règle, telle que l'entendaient Schooten et Servois, ne permet pas de résoudre la construction précédente, et il y a là une erreur qui vicie quelques-unes des constructions indiquées par ces deux auteurs. Pour lever cette difficulté — mais nous reviendrons dans la suite sur ce point délicat — il faut prendre la règle dans un sens nouveau et qui a été formulé par le général de Coatpont (*), dans les termes suivants : « Je définis, dit-il, *règle* une *lame* offrant deux côtés rectilignes et parallèles, permettant de tracer des parallèles équidistantes. »

Le livre de Mascheroni (**) semble avoir disparu ; du moins

(*) *Nouvelle correspondance mathémathique*, juin 1877. — Voyez aussi, à propos de cet article, une note du major de Tilly ; *Nouvelle Correspondance*, 1879, p. 439.

(**) Mascheroni a composé deux traités de géométrie pratique ; celui auquel nous faisons allusion ici est une *Géométrie de la règle* (*problèmes pour les arpenteurs avec différentes solutions* ; Pavie, 1793). Il a été traduit en français au commencement de ce siècle. L'autre livre de Mascheroni, *la Géométrie du compas*, cité par Chasles dans l'*Aperçu historique*, est plus connu ; il a pour titre : *Géométrie du compas par L. Mascheroni* ; ouvrage traduit de l'italien par A. M. Carrette, officier du génie à Paris, chez Duprat, libraire pour les mathématiques, quai des Augustins ; an VI.

C'est à propos de ce livre que Chasles (*lib. cit.*, p. 214) fait connaître les détails bibliographiques suivants :

« L'occasion se présente ici de faire mention de la *Géométrie du compas* de Mascheroni (ann. 1797), ouvrage original et curieux, qui a pour objet la résolution, par le compas seulement, des problèmes que l'on résout ordinairement par la règle et le compas. Cette géométrie est plus riche et plus étendue que celle de la *règle*, parce qu'elle embrasse les problèmes du second degré

est-il très rare et il nous a été impossible de voir un seul exemplaire de ce traité. Mais Servois a fait, dans l'ouvrage que nous avons analysé tout à l'heure, de nombreux emprunts à cette géométrie, et par eux on peut se faire une idée suffisante des méthodes ou procédés employés par Mascheroni.

Après Schooten, Mascheroni et Servois; après Lambert (*) qui a précédé Servois et qui doit être cité ici, les publications que nous pouvons signaler comme présentant un point de contact avec la géométrie de la règle sont : 1° le mémoire de Brianchon (**) et 2°, dans l'époque tout à fait moderne, les ouvrages de MM. Reye (***), Favaro (****) et Cre-

---

qui sont tous ceux qui forment le domaine de la géométrie ordinaire. Mascheroni fait voir qu'elle s'applique aussi, avec facilité, à la solution approximative des problèmes qui dépendent des sections coniques et d'une géométrie plus relevée.

» Des essais du même genre que la géométrie de la règle et de celle du compas, et qui tiennent pour ainsi dire le milieu entre les deux, avaient déjà occupé, longtemps auparavant, de célèbres mathématiciens. Cardan, le premier dans son livre *De subtilitate*, avait résolu plusieurs problèmes d'Euclide par la ligne droite et une seule ouverture de compas, comme si l'on n'avait, dans la pratique, qu'une règle et un compas invariable. Tartalea ne tarda pas à suivre son rival sur ce terrain, et étendit cette manière par de nouveaux problèmes. (*General trattato di numeri, e misure;* 5me partie, libro terzo; in-fol. Venise, 1560.) Enfin, un savant géomètre piémontais, J.-B. de Benedictis, en fit l'objet d'un traité intitulé : *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum, unâ tantum modo circini datâ aperturâ;* in-4°, Venise, 1553. »

En rapprochant ce passage de l'*Aperçu historique*, des articles que nous avons cités plus haut et qui sont dus au général de Coatpont, et au major de Tilly, on reconnaîtra que l'idée de Cardan *(une règle et un compas invariable)* revient à celle-ci, *une règle plate à bords parallèles*. L'erreur de Schooten et de Servois que nous avons signalée tient justement à ce fait qu'ils ne s'accordaient pas : soit une ouverture de compas, comme l'ont voulu Cardan et ses imitateurs; soit une dimension dans la règle, comme l'a proposé le général de Coatpont.

(*) *Perspective* de Lambert, 1759 et 1773. La seconde édition renferme plusieurs propositions intéressant la géométrie de la règle.

(**) *Mémoire sur l'application des transversales*. Ce mémoire cité par Chasles (*Ap. h.*, p. 214) ne doit pas être confondu avec celui qui existe dans la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. II, p. 383; ni avec la note qui parut au *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XIII, 1806, dans laquelle Brianchon expose le théorème corrélatif de l'hexagramme de Pascal.

(***) *Leçons sur la géométrie de position*, 2 vol. par le Dr Th. Reye, professeur à l'Université de Strasbourg; traduites de l'allemand par O. Chemin, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à cette école. (Paris, Dunod, 1881-1882.)

(****) *Leçons de statistique graphique*, par Antonio Favaro, professeur à

mona (*). Nous aurons occasion de citer ces auteurs dans le courant de ce livre, quoique rarement, l'idée qui nous dirige dans ce travail et que nous avons exposée plus haut n'étant pas absolument celle de la géométrie projective, laquelle n'admet pour les solutions des problèmes qu'elle se pose que l'emploi de la règle ordinaire, ou, sur le terrain, que celui des jalons et des alignements. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Catalan.

..... Un mot à propos du travail de M. Calinon, travail beaucoup trop long (à mon avis). Les objections contre les mauvaises définitions des *incommensurables*, des *longueurs*, des *aires*, des *volumes* (ou plutôt contre l'absence de définitions) me semblent fondées ; mais elles ne sont pas *neuves*.

Dans la première édition de mes *Éléments de Géométrie* (1843), j'ai donné, *le premier*, toutes les notions que votre jeune collaborateur réinvente aujourd'hui. Dès 1839, à Sainte-Barbe, j'enseignais ceci :

La racine carrée de 2 *est la limite des nombres dont les carrés ont pour limite* 2.

Naturellement, on a crié au Révolutionnaire ; mais peu après, *on lui a pris ses idées*, et on les a introduites, *sans citer l'auteur*, dans une foule d'*Arithmétiques* et de *Géométries*.

Si M. Calinon avait lu mon petit *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre*, il y aurait vu, par exemple, la *définition* de

$$(a - b)(c - d).$$

Si vous pouvez faire paraître ces quelques lignes, dans votre prochain numéro, vous obligerez...

Liége, 22 décembre 1884.

---

l'Université royale de Padoue, traduites de l'italien par Paul Terrier, ingénieur des arts et manufactures. (Paris, Gauthier-Villars, 1879.)

(*) *Éléments de géométrie projective*, par Luigi Cremona, directeur de l'École d'application des Ingénieurs à Rome ; traduits avec la collaboration de l'auteur par Ed. Dewulf, chef de bataillon du génie. (Paris, Gauthier-Villars, 1875.)

Extrait d'une lettre de M. Poujade.

... On peut modifier la démonstration de M. Calinon (*) de la manière suivante (**).

Soit AA′ le diamètre suivant lequel se coupent le plan du cercle et celui de sa projection, OB rayon perpendiculaire à AA′, b la projection de B.

Faisons AOK = OBb et menons en K l'ordonnée KF, la tangente KD. On a OF . OD = $\overline{OA}^2$ et je dis que

$$\frac{AF}{DA} = \frac{c}{a}.$$

En effet, menons KA; c'est la bissectrice de l'angle KFD et l'on a

$$\frac{AF}{AD} = \frac{KF}{KD} = \frac{OF}{OK} = \frac{c}{a}.$$

Le reste comme il a été indiqué au *Journal*.

BACCALAURÉAT (NOVEMBRE 1884)

MONTPELLIER

Algèbre et géométrie.

On donne une pyramide à base rectangle; le sommet se projette au centre de la base. Calculer les côtés $2x$, $2y$ de cette base: en fonction de la hauteur h, de la diagonale $2a$ et de la surface latérale $2s$ de la pyramide.

Physique.

Calculer le poids du mercure qui sort d'un thermomètre à poids pour une élévation de température de 1°. On désigne par α le coefficient de dilatation absolue de mercure et par δ le coefficient de dilatation linéaire du verre.

(*) Voyez: *Journal de Mathématiques élémentaires*; 1884, p. 235. La lettre de M. Poujade se rapporte au passage des lignes 12 et suivantes, à la page citée.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

BACCALAURÉAT
DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL
(Octobre 1883.)

TOULOUSE

Calculer les côtés et les angles d'un trapèze isoscèle dans lequel on connaît le périmètre $2p$, la longueur d de chacune des diagonales et l'angle 2α de ces droites.

Discuter les conditions de possibilité du problème : soit géométriquement, soit à l'aide de la solution trigonométrique demandée. On représentera la petite base BC par $2x$, la grande base AD par $2y$, chacun des côtés non parallèles par z et l'angle inconnu CDA par φ.

QUESTION 124

Solution par M. J. Chapron, aspirant répétiteur au Lycée de Versailles.

On donne deux circonférences C *et* C′ *tangentes au point* A; *soit* D *la tangente en ce point* A; *soient* D′ *et* D″ *les tangentes parallèles à* D. *Prenons sur* D *un point mobile* M *et menons par* M *les tangentes à* C *et* C′; *ces droites rencontrent* D′ *en* P *et* D″ *et* Q. *Les droites qui joignent les points* P *et* Q *aux centres respectifs des circonférences* C *et* C′ *se coupent en un point* I. *Démontrer que le lieu de ce point est une droite.* (G. L.)

Les droites C′M et CQ, CM et CP sont rectangulaires. D'ailleurs, si un quadrilatère MCIC′ a ses deux angles C, C droits, les deux autres sommets M et I se projettent sur la diagonale CC′, à égale distance de son milieu.

Le lieu du point I est donc une droite symétrique de D, par rapport au milieu de CC′.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Lemès et Vigarié, au lycée de Toulouse; Laurent Dye, au collège d'Embrun; Fitz-Patrick, au lycée

d'Angoulême; Aubry, au lycée de Douai; Blessel, conducteur du service municipal de la ville de Paris; Taratte, élève au lycée d'Évreux; J.-B. Perrin, maître répétiteur au petit lycée de Clermont-Ferrand; Bernheim, élève au lycée de Besançon; Paul Bourgarel, à Antibes.

QUESTION 136

Solution par M. Émile Vigarié, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintejoux).

On donne un cercle Δ *et une tangente* Δ'. *Soit* O *le centre du cercle; on mène par* O *une demi-droite qui rencontre* Δ *en* A, *et* Δ' *en* A'. *Soit* I *le conjugué harmonique de* O *par rapport à* AA'. *Ayant projeté* I *sur* Δ' *en* B, *on mène* BA. *Démontrer que* BA *passe par un point fixe.* (G. L.)

Prolongeons BA jusqu'à sa rencontre en F avec le diamètre perpendiculaire à la tangente donnée.

Les deux triangles semblables BAI, FAO donnent

$$\frac{BI}{OF} = \frac{IA}{OA}.$$

Le point I étant le conjugué harmonique du point O par rapport à AA', on a

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{IA}{IA'} \text{ ou } \frac{IA'}{OA'} = \frac{IA}{OA};$$

par suite

$$\frac{BI}{OF} = \frac{IA'}{OA'}.$$

Or, les deux triangles semblables A'BI, A'CO donnent

$$\frac{BI}{CO} = \frac{IA'}{OA'}.$$

d'où l'on conclut

$$CO = OF.$$

Ainsi, toutes les droites BA passent par un point fixe F, situé à l'extrémité du diamètre perpendiculaire à la tangente donnée.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Louis Simon, au collège Chaptal; Millot, au lycée de Chaumont; J. Chapron, aspirant répétiteur au lycée de Versailles; Taratte, élève au lycée d'Evreux.

QUESTION 140

Solution par P.-N. Panaitescu, élève aux Instituts-Unis, à Jassy (Moldavie),

Si d'un point O *pris sur la circonférence de diamètre* AB, *comme centre, on décrit une circonférence tangente à* AB, *les tangentes à cette circonférence issues des points* A *et* B *sont parallèles.* (L. Lévy.)

Pour cela, il suffit de démontrer que les bissectrices des angles A et B sont perpendiculaires. En effet, la bissectrice de l'angle A est AO, et la bissectrice de l'angle B est BO. Mais le point O se trouve sur la circonférence C et l'angle AOB est droit parce que ses côtés passent par les extrémités du diamètre AB.

Nota. — La même question a été résolue, d'une façon analogue, par MM. Desticker, élève au lycée de Douai ; Chapellier, élève au lycée de Nancy ; Raymond Vidal, surnuméraire des contributions directes à Valence ; Millot, lycée de Chaumont ; Voignié, lycée de Nancy ; J.-B. Perrin, maître-répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand ; J. Chapron, aspirant-répétiteur au lycée de Versailles ; E. Mazeman, élève au lycée de Lille (classe de M. Lefebvre) ; J. Delpiron, au collège Chaptal ; Auguste Tessier, élève au lycée de Nice ; Jules Huré, au collège de Montargis ; Louis Leboisne, élève au lycée du Mans.

M. E. Vigarié, élève au lycée Saint-Louis, y ajoute quelques remarques intéressantes.

Il fait observer, entre autres choses, que l'axe radical des deux cercles coupe l'ordonnée du point O en un point dont le lieu géométrique est une ellipse.

QUESTIONS PROPOSÉES

166. — Si A, B, C sont les angles d'un triangle, les angles λ, μ, ν, que font entre elles les médianes de ce triangle, sont donnés par les formules :

$$\operatorname{cotg} \lambda = \frac{\operatorname{cotg} A - 2\operatorname{cotg} B - 2\operatorname{cotg} C}{3},$$

$$\cot g\ \mu = \frac{\cot g\ B - 2\cot g\ C - 2\cot g\ A}{3},$$

$$\cot g\ \nu = \frac{\cot g\ C - 2\cot g\ A - 2\cot g\ B}{3}.$$

(Hadamard)

167. — On donne un cercle O de diamètre AB, deux tangentes parallèles AP, BQ, une troisième tangente mobile PQ et un point fixe C sur le diamètre.

On abaisse OD, OE respectivement perpendiculaires sur PC, QC; la droite DE coupe AB en F. Enfin on élève CG perpendiculaire à AB, cette droite coupe la circonférence en G,.

Démontre que :

1° Le point F est fixe;

2° La droite GF est la médiane antiparallèle du triangle GOC. *(Vigarié.)*

168. — Soient Δ, Δ' deux parallèles et Δ'' la parallèle équidistante; soit aussi AA′ une perpendiculaire comme à Δ et à Δ'.

Ayant pris un point M, arbitrairement, dans le plan de ces droites, MA et MA′ rencontrent Δ'', respectivement aux points B et C. On projette B en B′ sur Δ'; et C en C′ sur Δ. Démontrer que les trois points C′, M, B′ sont en ligne droite.

Généraliser cette propriété qui est projective.

(G. L.)

169. — Résoudre et discuter l'équation :

$$\sin\left(45^\circ + 3\frac{x}{2}\right) = h \sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right).$$

(G. L.)

Erratum (n° de décembre 1884). — Question 125, p. 272, l. 7 (en remontant), lisez

$$\sin x^2 = \frac{2d^2 + 3R^2 - \sqrt{4d^2(d^2 - R^2) + 9R^4}}{8d^2}$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Lespès et E. Vigarié, élèves au lycée de Toulouse.

La question 114 a été résolue par M. P. Bougarel, à Antibes.

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que les solutions qu'ils nous envoient doivent porter en tête :

Le numéro de la question ;

Le nom de l'auteur de la solution, ainsi que l'établissement auquel il appartient ;

L'énoncé complet de la question proposée.

De plus, s'il y a des figures celles-ci doivent être faites avec beaucoup de soin et sur des feuilles à part.

Enfin, nous prions nos lecteurs de mettre les diverses questions sur des feuilles séparées et de n'écrire que d'un seul côté, pour faciliter le classement des solutions, et éviter des oublis ou des erreurs.

Ces solutions sans aucun avis d'envoi peuvent être adressées sous bande ou sous enveloppe ouverte.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1376-5.

ÉTUDE ELÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 3.)

CHAPITRE V

TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ. — RÉSOLUTION DE CETTE ÉQUATION DANS LES HYPOTHÈSES $b^2 - 4ac = 0$ ET $b^2 - 4ac < 0$.

54. — Avant de réduire l'équation générale du second degré, à deux variables,

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + fx + g = 0, \qquad (131)$$

à une forme plus simple, nous allons examiner un cas particulier.

Supposons que l'un des carrés fasse défaut dans cette équation; soit $c = 0$. L'équation se réduit à celle-ci :

$$ay^2 + bxy + dy + fx + g = 0, \qquad (132)$$

d'où l'on déduit

$$x = -\frac{ay^2 + dy + g}{by + f}$$

et, en effectuant la division :

$$x = -\frac{a}{b}y + \frac{af}{b^2} - \frac{d}{b} - \frac{\frac{af^2}{b^2} - \frac{df}{b} + g}{by + f}, \qquad (133)$$

ou, en multipliant par b^2 :

$$b^2x = -aby + af - bd - \frac{af^2 - bdf + b^2g}{by + f}, \qquad (134)$$

b^2x devant être un nombre entier, le binôme $by + f$ devra diviser le nombre $af^2 - bdf + b^2g$.

On posera donc successivement $by + f$ égal à chacun des diviseurs de ce nombre. Si l'on trouve ainsi une valeur

entière pour y, et si la valeur correspondante de x est également entière, on connaîtra une solution de la proposée.

Le nombre de ces diviseurs étant limité, celui des solutions, s'il en existe, sera toujours limité.

55. — Si cependant le numérateur $af^2 - bdf + b^2g$ était nul, l'équation deviendrait

$$(b^2x + aby - af + bd)(by + f) = 0, \qquad (135)$$

par l'élimination de g, et on pourrait annuler l'un ou l'autre des deux facteurs.

On obtiendrait ainsi, soit une valeur fixe pour y, x étant entièrement indéterminé, dans le cas où b divise f, soit un nombre illimité de valeurs pour y et x, lorsque l'équation

$$b^2x + aby - af + bd = 0$$

indéterminée du premier degré à deux inconnues, peut être résolue.

56. — Ces deux genres de solutions peuvent même se présenter simultanément, ainsi qu'on peut s'en assurer par l'exemple suivant :

$$2y^2 + 3xy - 9y - 6x + 10 = 0.$$

Cette équation, dont les constantes remplissent la condition $af^2 - bdf + b^2g = 0$, peut être mise sous la forme

$$(2y + 3x - 5)(y - 2) = 0.$$

En annulant le premier facteur, on obtient les solutions

$$y = 1 + 3t$$
$$x = 1 - 2t$$

et, en annulant le second facteur, on obtient la valeur $y = 2$, qui n'est pas comprise parmi les précédentes, et x reste indéterminé.

57. — Nous avons supposé, au § 54, que l'un des carrés manquait dans l'équation générale.

Si les deux carrés manquaient en même temps, il suffirait de faire $a = 0$ dans l'équation (134); les conclusions ne seraient pas modifiées, et le terme fractionnaire se réduirait à

$$\frac{b^2g - bdf}{by + f}.$$

Si le numérateur de cette fraction était nul, b ne pouvant être supposé nul, parce qu'alors la proposée ne serait plus que du premier degré, on aurait

$$bg - df = 0.$$

La proposée, qui serait d'abord réduite, par l'élimination de g, à

$$b^2xy + bdy + bfx + df = 0,$$

pourrait être mise sous la forme

$$(by + f)(bx + d) = 0.$$

Suivant les cas, elle n'admet aucune solution; ou elle peut être résolue par une valeur fixe de l'une des inconnues, l'autre restant indéterminée; et même, si b divise à la fois d et f, l'une quelconque des deux inconnues devient entièrement indéterminée, l'autre ayant une valeur fixe.

Dans ce dernier cas, si les constantes de l'équation ont été débarrassées de tout diviseur commun, le coefficient du rectangle xy se réduit à l'unité.

58. — Mais, si $b = 0$, en même temps que $c = 0$, comme nous avons dû multiplier par b^2 les deux membres de l'équation (133), la méthode que nous avons employée se trouve en défaut.

Ce cas particulier sera résolu plus loin (§ 69).

(A suivre.)

NOUVELLES REMARQUES

SUR LA DROITE DE SIMSON

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

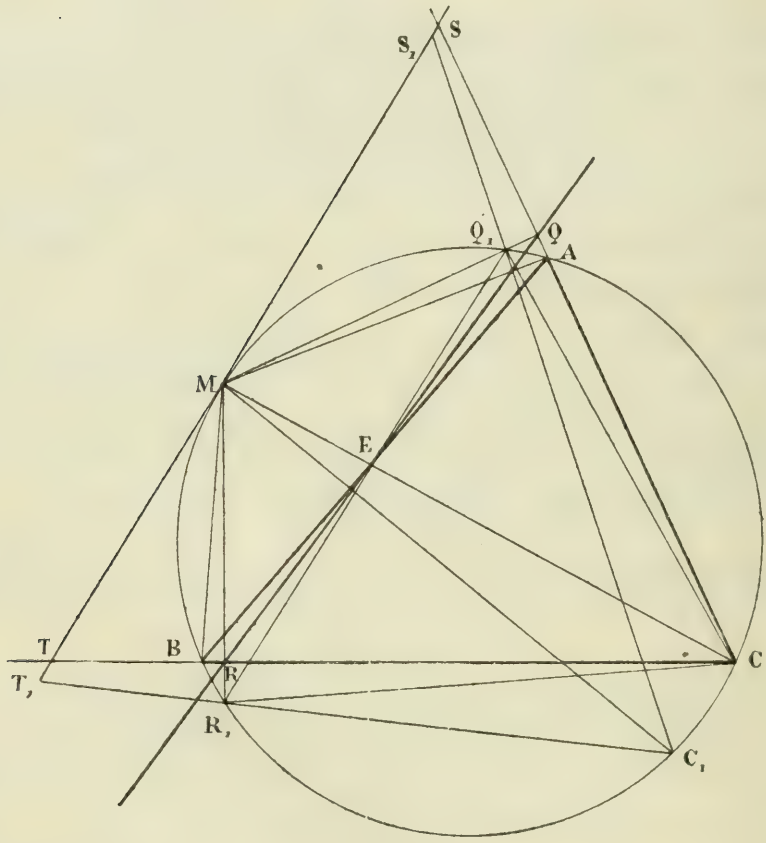
(*Suite*, voir p. 8.)

III. — Prenons encore un point M sur la circonférence circonscrite au triangle ABC et abaissons de ce point les perpendiculaires MR et MQ sur les côtés BC et AC, ce qui nous donne la droite de Simson QR. Considérons le triangle variable MQR. Nous avons, comme précédemment, d'après la formule (2),

$$\frac{d(Q)}{d(M)} = \frac{SQ}{SM}$$
$$\frac{d(M)}{d(R)} = \frac{TM}{TR};$$

maintenant si E est le point où RQ touche son enveloppe, la formule (1) donne

$$\frac{d(R)}{d(Q)} = \frac{ER \,.\, CR}{EQ \,.\, CQ}.$$



Des formules précédentes nous tirons

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{SM \,.\, TR \,.\, CQ}{SQ \,.\, TM \,.\, CR} = \frac{CQ \,.\, \sin \widehat{TMR}}{CR \,.\, \sin \widehat{SMQ}};$$

or, si nous tirons la droite Q_1R_1, qui joint les points de rencontre de MQ et de MR avec le cercle circonscrit, nous avons $\widehat{TMR} = \widehat{MQ_1R_1}$ et $\widehat{SMQ} = \widehat{MR_1Q_1}$ (même mesure);

comme d'ailleurs $\frac{\sin \widehat{MQ_1R_1}}{\sin \widehat{MR_1Q_1}} = \frac{MR_1}{MQ_1}$, nous voyons que

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{CQ \,.\, MR_1}{CR \,.\, MQ_1};$$

maintenant les angles AMB et QMR étant égaux, comme tous deux supplémentaires de l'angle ACB, il en résulte que les arcs AQ_1 et BR_1 sont égaux; par suite, $\widehat{ACQ_1} = \widehat{BCR_1}$, et comme les triangles QCQ_1, RCR_1 sont tous deux rectangles, l'un en Q, l'autre en R, on voit que $\frac{CQ}{CR} = \frac{CQ_1}{CR_1}$; donc

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{CQ_1 \,.\, MR_1}{CR_1 \,.\, MQ_1}.$$

Prenons alors sur le cercle circonscrit le point C_1 tel que arc MBC_1 = arc MAC; nous appellerons ce point le symétrique du point C par rapport au point M sur le cercle circonscrit. Tirons les droites C_1Q_1 et C_1R_1 qui coupent la tangente MT respectivement aux points S_1 et T_1.

Les triangles MR_1C et T_1MC_1 sont semblables; en effet, les angles MCR_1 et MC_1T_1 sont égaux comme ayant même mesure; de plus

$$\begin{aligned}\widehat{MT_1C_1} &= \frac{1}{2}\,(\text{arc } MAC_1 - \text{arc } MBR_1)\\ &= \frac{1}{2}\,(\text{arc } MAC + \text{arc } CC_1 - \text{arc } MBR_1)\\ &= \frac{1}{2}\,(\text{arc } MBC_1 + \text{arc } CC_1 - \text{arc } MBR_1)\\ &= \frac{1}{2}\,\text{arc } R_1C_1C\\ &= \widehat{R_1MC}.\end{aligned}$$

La similitude de ces triangles entraîne la proportion

$$\frac{MR_1}{CR_1} = \frac{MT_1}{C_1M}.$$

On verrait de même, dans les triangles MQ_1C et MC_1S_1, que

$$\frac{CQ_1}{MQ_1} = \frac{C_1M}{MS_1}.$$

Par conséquent,

$$\frac{ER}{EQ} = \frac{MT_1}{MS_1}.$$

De là ce théorème :

Théorème II. — *Si on prend, sur le cercle circonscrit, le symétrique* C_1 *du sommet* C *par rapport au point* M, *et que l'on joigne le point* C_1 *aux points de rencontre du cercle circonscrit et des perpendiculaires* MR *et* MQ *à* BC *et à* AC, *par des droites qui coupent en* T_1 *et* S_1 *la tangente au cercle circonscrit au point* M, *le point où la droite de Simson relative au point* M *touche son enveloppe divise le segment de cette droite compris entre les côtés* BC *et* AC *comme le point* M *divise le segment* T_1S_1.

IV. — Dans le cas où le triangle considéré a l'un de ses angles droits, on a ce théorème plus simple :

Théorème III. — *Le point où la droite de Simson touche son enveloppe divise le segment de cette droite compris entre les côtés de l'angle droit, comme le point correspondant divise le segment de la tangente au cercle circonscrit compris entre les mêmes côtés.*

Ce théorème est un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale que nous allons démontrer maintenant :

Soient OP *et* OQ *les coordonnées du point* M, *comptées sur deux axes quelconques* Ox *et* Oy. *Lorsque le point* M *décrit une courbe* (M), *la droite* PQ *enveloppe une autre courbe qu'elle touche au point* E. *La tangente à la courbe* (M) *au point* M *coupe* Ox *en* T, Oy *en* S. *On a*

$$\frac{EP}{EQ} = \frac{MT}{MS}.$$

En effet *(fig. 3)*, le triangle variable MPQ donne

$$\frac{d(Q)}{d(M)} = \frac{SQ}{SM}, \quad \frac{d(M)}{d(P)} = \frac{TM}{TP}, \quad \frac{d(P)}{d(Q)} = \frac{EP \,.\, PO}{EQ \,.\, QO},$$

d'où l'on tire

$$\frac{EP}{EQ} = \frac{QO \,.\, TP \,.\, SM}{PO \,.\, TM \,.\, SQ};$$

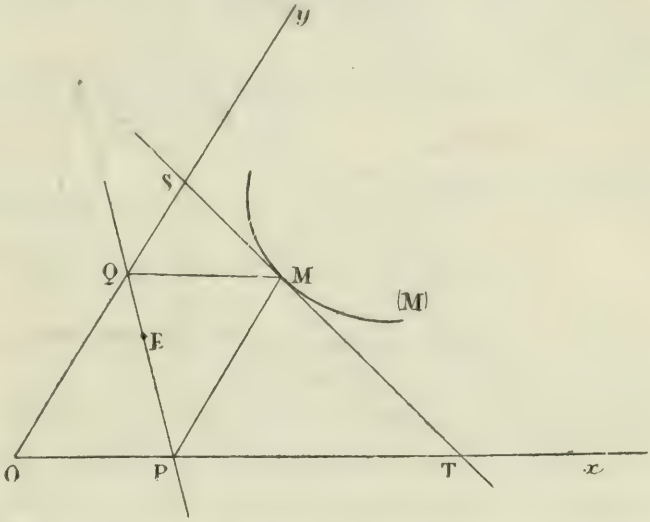
mais

$$\frac{QO}{SQ} = \frac{MT}{SM}, \quad \frac{PO}{TP} = \frac{MS}{TM};$$

par suite,

$$\frac{EP}{EQ} = \frac{MT}{MS}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lorsque l'angle xOy est droit et que la courbe (M) est un cercle passant par le point O, on a le théorème ci-dessus énoncé.



On peut tirer beaucoup d'autres conséquences de ce théorème; nous n'en citerons qu'une : si la courbe (M) est une droite coupant Ox en T, Oy en S, la droite PQ enveloppe une parabole tangente à Ox en T et à Oy en S. On a ainsi une solution très simple du problème des raccordements paraboliques.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Boubals,** professeur à l'École du Génie, à Montpellier.

Soit un triangle BAC et soit AA_0 la médiane relative au côté BC. On a

$$\frac{A_0B}{A_0C} = 1.$$

Prenons AD = AB, et joignons BD. La médiane AA_0 rencontre la droite BD en un point E_0 tel que

$$\frac{E_0B}{E_0D} = \frac{AC}{AB}.$$

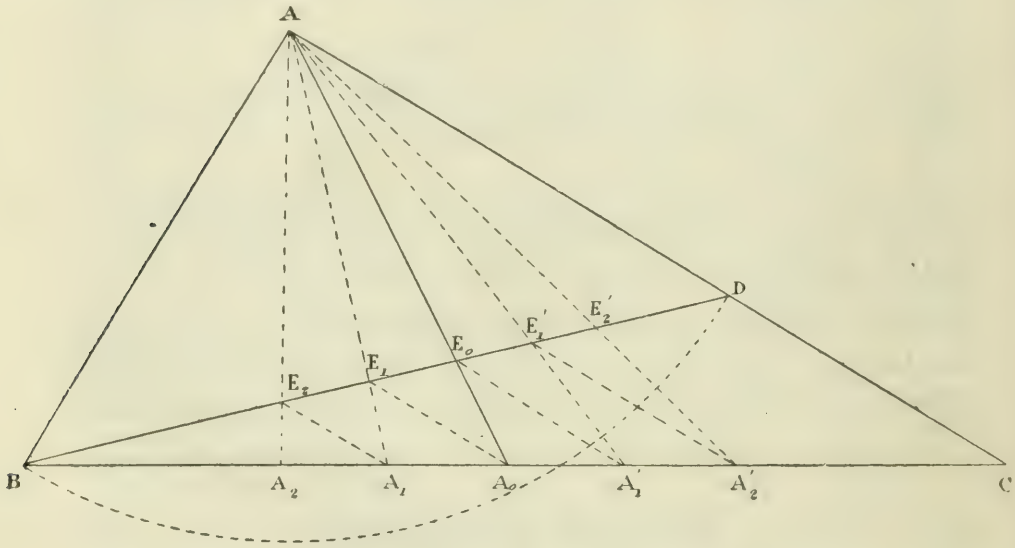
Il suffit, pour démontrer cette égalité, d'appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle BDC coupé par la transversale AE_0A_0. Si donc, par le point E_0, on mène $E_0A'_1$ parallèle à AC, le point A'_1 divisera le côté BC en deux segments tels que

$$\frac{A'_1B}{A'_1C} = \frac{AC}{AB}.$$

Si l'on opère sur la droite AA'_1 comme sur AA_0, on obtiendra le point A'_2, tel que

$$\frac{A'_2B}{A'_2C} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2},$$

et ainsi de suite.



De même, si par A_0 on mène A_0E_1 parallèle à AC, on obtiendra la droite AA_1, qui est la bissectrice de l'angle A et le point A_1 donne

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC}.$$

En continuant ainsi, on aura la droite AA_2 qui est la médiane antiparallèle, et le point A_2 tel que

$$\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2};$$

et ainsi de suite.

Le théorème qui fait l'objet de cette note, et que je crois nouveau, permet de diviser le côté BC en segments proportionnels et inversement proportionnels aux puissances quelconques des côtés adjacents (*).

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié**, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

DROITES ET POINTS INVERSES

MÉDIANE ANTIPARALLÈLE — POINT DE LEMOINE

En 1865, dans une *Étude de Géométrie comparée*, M. le colonel Mathieu (**) s'est occupé d'une méthode de transformation déterminée de la manière suivante. Par les sommets d'un triangle on mène trois droites concourantes; les symétriques de ces droites par rapport aux bissectrices issues des sommets du triangle sont aussi concourantes. Les droites symétriques par rapport aux bissectrices sont deux *droites inverses;* les points de concours sont deux *points inverses;* et chacune de ces droites, de même que chacun de ces points, est l'*inverse* de l'autre.

Je me propose dans cette note de démontrer les principales propriétés d'une droite et d'un point inverse particulier qui sont remarquables par les conséquences que l'on peut en déduire.

Parmi les travaux qui ont le plus contribué à en répandre la connaissance, je citerai ceux de MM. A. Mathieu, E. Lemoine, A. Morel, M. d'Ocagne, H. Brocard, en France, et de MM. J. Neuberg et Tücker, à l'étranger.

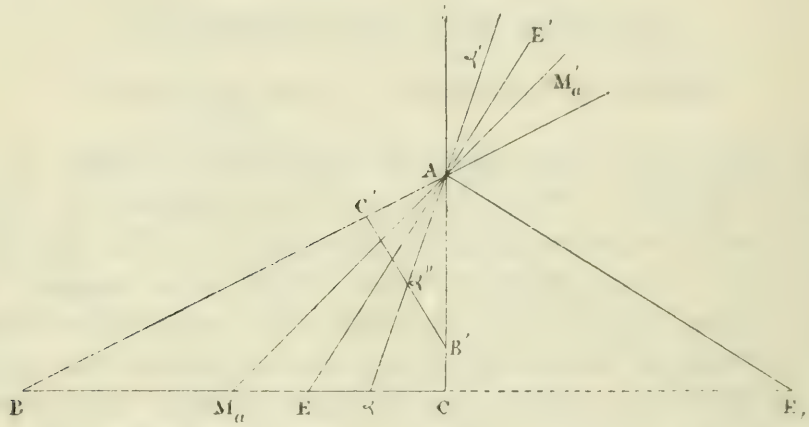
(*) On peut consulter sur ce sujet une note de M. M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 497). La solution de M. Boubals nous paraît plus simple que celle qui est proposée, *loc. cit.*

G. L.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1865.

Les théorèmes qui vont suivre sont dus pour la plupart aux auteurs précités. J'en indiquerai cependant quelques-uns que je crois nouveaux; j'en généraliserai d'autres et je terminerai ce travail par quelques applications.

1. Définition. — Si je mène toutes les antiparallèles d'un côté du triangle ABC, il est évident que les milieux des segments de ces droites, compris entre les deux autres côtés, sont sur une ligne droite qui passe par le troisième sommet; d'où le nom de *médiane antiparallèle* donné par M. E. Lemoine qui, le premier, a étudié ces droites (*).



Les droites AM_a, $A\alpha$ qui joignent le sommet A au milieu de BC et de son antiparallèle B'C' sont deux droites homologues des triangles semblables ABC, AB'C', donc

$$M_aAB = \alpha AC.$$

La médiane antiparallèle $A\alpha$ est donc la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet d'un triangle. De là, le nom de *symédiane* que M. d'Ocagne a proposé (**) de donner à cette droite.

De cette définition on conclut que :

Si l'on porte, sur le côté AB d'un triangle ABC, une longueur égale à AC et sur le côté AC une longueur égale

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1883 (p. 450-464).

(**) Association française pour l'avancement des sciences. — Congrès de Lyon, 1873. — Congrès de Lille, 1874. — *Nouvelles Annales de Mathématiques*, année 1873. — *Mathésis*, 1884.

à AB, la médiane antiparallèle issue de A passe par le milieu de la droite ainsi obtenue.

Cela donne un moyen facile de construire la médiane antiparallèle.

2. Théorème. — *Les symétriques de la médiane d'un triangle par rapport aux bissectrices intérieures et extérieures se confondent. Autrement dit : Il n'y a qu'une seule médiane antiparallèle issue du sommet d'un triangle.*

Soient ABC un triangle AM_a, AE, AE_1, $A\alpha$ la médiane du sommet A, les bissectrices intérieures et extérieures et la médiane antiparallèle issue au même sommet; soient M'_a, E', α' des points pris sur les prolongements de ces droites dans le sens M_aA, EA, αA, on a

$$E_1AM_a = E_1AE + EAM_a$$
$$E_1A\alpha' = E_1AE' + E'A\alpha';$$

or

$$EAM_a = E'AM'_a = E'A\alpha';$$

donc

$$E_1AM_a = E_1A\alpha'.$$

$A\alpha$, $A\alpha'$ sont par suite dans le prolongement l'un de l'autre symétriques par rapport aux deux bissectrices.

On peut observer que le théorème est général, c'est-à-dire qu'une droite issue du sommet d'un triangle n'a qu'une seule inverse.

3. Théorème. — *Lorsque deux points sont situés sur deux droites inverses issues du sommet d'un triangle, le produit de leurs distances aux côtés adjacents est le même.*

Soient $\omega\omega'$ deux points situés sur deux droites inverses AS, AR issues du sommet A du triangle ABC. Soient aussi $\omega_a\omega'_a$, $\omega_b\omega'_b$, $\omega_c\omega'_c$ les projections de $\omega\omega'$ sur les côtés du triangle. Les triangles semblables $A\omega\omega_b$, $A\omega'\omega'_c$; $A\omega\omega_c$, $A\omega'\omega'_b$ donnent

$$\frac{\omega\omega_b}{\omega'\omega'_c} = \frac{A\omega}{A\omega'} \qquad \frac{\omega\omega_c}{\omega'\omega'_b} = \frac{A\omega}{A\omega'};$$

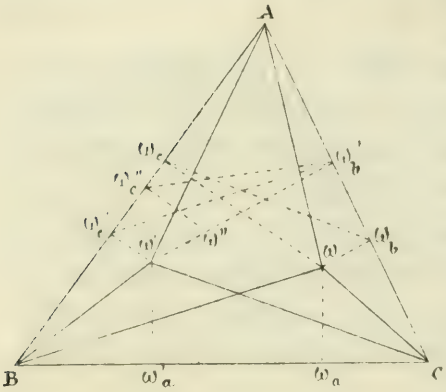
Donc

$$\omega\omega_b \times \omega'\omega'_b = \omega\omega_c \times \omega'\omega'_c.$$

Réciproquement : — *Si deux points $\omega\omega''$ sont tels que*

$\omega\omega_c \times \omega''\omega''_c = \omega\omega_b \times \omega''\omega'_b$, *les deux points* ω, ω'' *sont sur deux droites inverses.*

Menons la droite $A\omega'$ inverse de $A\omega$, ω étant sur le prolongement de $\omega'_b\omega''$. Les deux triangles $\omega\omega_b\omega_c$, $\omega'\omega'_c\omega'_b$ étant semblables, $\omega_c\omega_b$, $\omega'_c\omega'_b$ sontantiparallèles. D'après l'hypothèse les triangles $\omega\omega_c\omega_b$, $\omega''\omega''_c\omega'_b$ sont semblables et $\omega_c\omega_b$, $\omega'_b\omega''_c$ sont antiparallèles.



Il en résulte que par un point ω'_b on pourrait mener deux antiparallèles à une même droite ; ce qui est impossible. Donc $\omega\omega''$ sont sur deux droites inverses.

Remarque. — Deux points inverses étant situés sur trois droites inverses, on a :

$$\omega\omega_b \times \omega'\omega'_b = \omega_c\omega \times \omega'\omega'_c = \omega\omega_a \times \omega'\omega'_a,$$

c'est-à-dire que :

Les produits des distances de deux points inverses à l'un des côtés du triangle est le même pour les trois côtés.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 11.)

CHAPITRE PREMIER

CONSIDÉRATIONS SUR LES TRANSVERSALES

La géométrie de la règle prend, assez souvent, pour base des constructions qu'elle propose, certaines propriétés des

transversales. Les théorèmes auxquels nous faisons ici allusion et que nous invoquerons dans la suite de ce travail, sont, pour la plupart, bien connus et nous renvoyons, une fois pour toutes, à leur sujet, aux ouvrages classiques; notamment, à l'excellent traité de MM. Rouché et de Comberousse.

Néanmoins, avant d'aborder les applications que nous visons plus particulièrement dans ce livre, il nous paraît nécessaire à la clarté des explications qui vont suivre, de rappeler ceux de ces théorèmes qui ont une importance plus marquée, ou qui donnent lieu, soit à certaines généralisations, soit à des développements que nous croyons nouveaux ou peu connus. Nous consacrons ce chapitre et le suivant, à leur exposition.

1. Théorème de Gergonne (*). — *Lorsque trois droites partant des sommets d'un triangle* ABC, *concourent en un point* O *et rencontrent les côtés de ce triangle aux points* A′, B′, C′, *on a*

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1. \qquad (1)$$

Nous représenterons la position d'un point O, dans le plan d'un triangle ABC, au moyen de trois nombres α, β, γ que nous définissons ainsi : α représente la surface du triangle BOC; α est positif, lorsque le point O est situé, par rapport à BC, du même côté que A; il est négatif dans le cas contraire. Cette convention s'étend aux nombres β et γ; et, dans ces conditions, quelle que soit la position du point O dans le plan ABC, on a toujours

$$\alpha + \beta + \gamma = S,$$

S désignant la surface du triangle ABC.

Pour abréger le langage, nous dirons quelquefois que

(*) Ce théorème fait partie des questions proposées dans les *Annales de Gergonne* (t. IX, 1818 et 1819, p. 116). Gergonne rapportant (*loc. cit.*, p. 277) la solution proposée par divers auteurs, pour ce théorème et pour son analogue dans l'espace, dit : « Nous sommes tombés très simplement sur ces deux théorèmes en cherchant à décomposer une masse supposée réduite à un point en trois ou quatre autres situées au sommet d'un triangle ou d'un tétraèdre. » Gergonne avait ainsi retrouvé la méthode statique de Jean de Ceva, à laquelle nous faisons allusion un peu plus loin.

α, β, γ représentent les *coordonnées* du point O, relativement à la figure ABC.

Ceci posé, nous avons

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{BOC}{BAC} = \frac{\alpha}{S};$$

de même

$$\frac{OB'}{BB} = \frac{\beta}{S}, \quad \text{et} \quad \frac{OC'}{CC'} = \frac{\gamma}{S}.$$

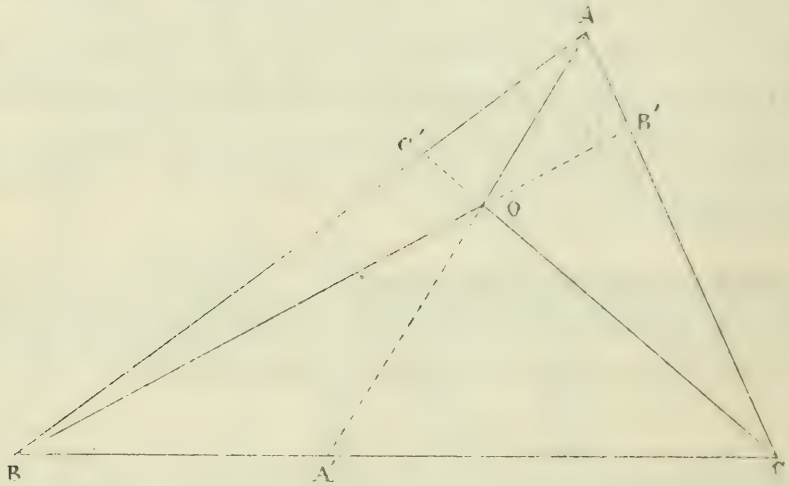


Fig. 1.

Ces égalités entraînent la suivante:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{S} = 1.$$

Remarque. — Cette propriété est générale; elle est vraie pour tous les points du plan, en supposant que les rapports $\frac{OA'}{AA'}$, $\frac{OB'}{BB'}$, $\frac{OC'}{CC'}$ soient positifs ou négatifs en même temps que les coordonnées α, β, γ du point O.

2. Théorème de Chasles (*). — *Dans tout quadrilatère la*

(*) Voyez *Aperçu historique*, p. 296. La démonstration proposée par Chasles est une application de la méthode de Jean de Ceva, citée plus loin. Dans cette méthode, très ingénieuse et très féconde, on suppose placées aux points d'intersection des droites considérées, des forces parallèles dont les intensités sont inversement proportionnelles aux segments qui se trouvent sur les droites; puis, on applique les propriétés connues sur la détermination du point d'application de la résultante.

diagonale issue d'un sommet divisée par son prolongement jusqu'à la droite qui joint les points de concours des côtés opposés, égale la somme des deux côtés issus du même sommet, divisés respectivement par leurs prolongements jusqu'aux côtés opposés.

Cette proposition que nous appliquerons dans la suite à la détermination de la distance d'un point donné à un point inaccessible est la conséquence immédiate du théorème précédent.

Il faut pourtant observer que le mot *somme* est pris ici dans son sens algébrique.

Soit ABCD le quadrilatère proposé. On peut considérer le point A comme étant situé à l'intersection de trois droites issues des sommets du triangle QCP ; en appliquant le théorème I et en tenant compte, sur la figure, de la remarque énoncée plus haut, on a

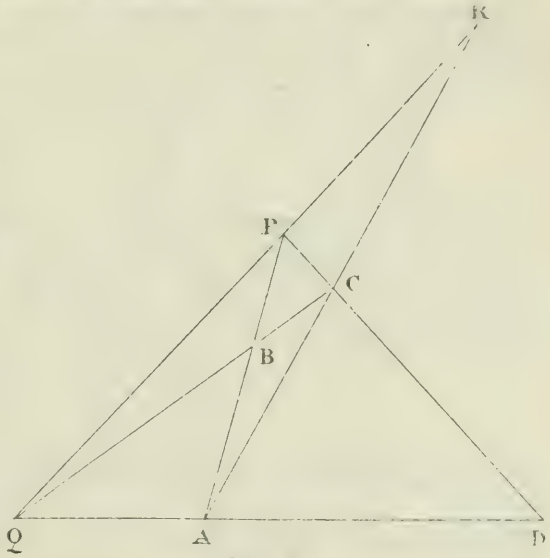


Fig. 2.

$$\frac{RA}{RC} + \frac{DA}{DQ} - \frac{BA}{BP} = 1.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\frac{AC + RC}{RC} + \frac{DA}{DQ} - \frac{BA}{BP} = 1.$$

ou, encore.

$$\frac{AC}{RC} = \frac{BA}{BP} - \frac{DA}{DQ}.$$

Cette égalité constitue le théorème en question.

3. Théorème — *Les trois droites* AA′, BB′, CC′ (*) *qui concourent au même point* O *déterminent sur les côtés du triangle*

(*) Voyez la figure (1).

ABC, *trois points* A′, B′, C′ *qui donnent lieu à la relation*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1 \quad (*). \qquad (2)$$

Les deux triangles BOA, COA ont la même base OA; leurs surfaces sont entre elles dans le rapport des hauteurs correspondantes, rapport qui est le même que celui des segments BA′, CA′.

D'après cela, nous pouvons écrire les égalités suivantes :

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{B'C}{B'A} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{C'A}{C'B} = -\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (A)$$

Ces relations sont écrites en supposant que le point O est situé, comme le représente la figure, à l'intérieur du triangle ABC; dans cette hypothèse, les coördonnées α, β, γ sont positives, et les rapports

$$\frac{A'B}{A'C}, \quad \frac{B'C}{B'A}, \quad \frac{C'A}{C'B}$$

sont, au contraire, et conformément à la convention connue, négatifs.

Nous avons donc, après avoir multiplié entre elles les égalités (A),

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1.$$

4. Théorème — *Si trois points* A′, B′, C′ *situés sur les côtés d'un triangle* ABC *donnent lieu à la relation*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1,$$

les droites AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.*

Cette proposition, réciproque de celle de Jean de Ceva, se

(*) C'est le théorème de Jean de Ceva. Ce théorème fondamental a été longtemps attribué à Jean Bernoulli, parce qu'il a été énoncé et démontré par ce géomètre (*Œuvres* de Jean Bernoulli, t. IV, p. 33); c'est sous ce nom qu'il est donné dans l'ouvrage de Servois, cité plus haut. La démonstration que nous venons d'exposer ne diffère que par la forme de celle qui a été donnée par Jean de Ceva dans son ouvrage : *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio* (in-4°, Milan, 1678). Nous avons substitué seulement à l'*idée de force*, employée par Jean de Ceva, l'*idée de surface*. Voyez *Aperçu historique*, p. 295.

démontre sans difficulté ; nous passons sur ce point sans nous y arrêter, parce que nous allons établir un théorème général qui donne, du même coup, dans un cas particulier, le théorème de Jean de Ceva et sa réciproque.

Voici cette généralisation.

5. Théorème. — *Soient* A′, B′, C′ *trois points quelconques pris sur les côtés du triangle* ABC; *les droites* AA′, BB′, CC′ *déterminent, par leurs intersections mutuelles, un triangle* A″B″C″, *dont la surface* Σ *est donnée par la formule :*

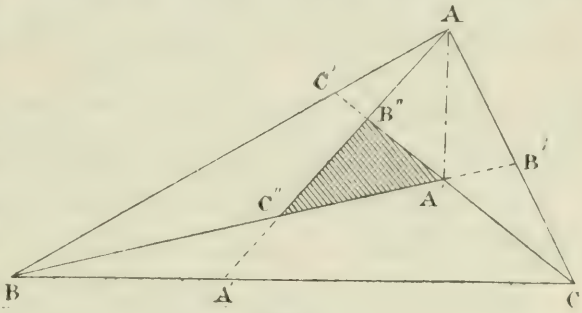


Fig. 3.

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{(1 + uvw)^2}{(1 - v + uv)(1 - u + uw)(1 - w + vw)}, \quad (3)$$

dans laquelle, les quantités u, v, w *représentent, en grandeur et en signe, les rapports*

$$\frac{A'B}{A'C}, \quad \frac{B'C}{B'A}, \quad \frac{C'A}{C'B}.$$

Calculons d'abord, au moyen des quantités données u, v, w, la surface des triangles

$$BA''C, \quad CB''A, \quad AC''B.$$

En observant que les deux triangles BA″C, AA″C ont la même base A″C, nous avons

$$\frac{BA''C}{AA''C} = \frac{BC'}{AC'} = \frac{1}{w}.$$

De même

$$\frac{BA''C}{BA''A} = \frac{B'C}{B'A} = v.$$

En tenant compte de la relation

$$BA''C + AA''C + BA''A = S,$$

ces égalités donnent, par combinaison,

$$\frac{BA''C}{S} = \frac{v}{1 + v + vw}.$$

On trouve, pareillement,

$$\frac{CB''A}{S} = \frac{w}{1 + w + uw}$$

et

$$AC''B = \frac{u}{1 + u + uv}.$$

Si, maintenant, nous observons que

$$\Sigma = S - BA''C - CB''A - AC''B,$$

nous avons enfin, pour l'expression de Σ, en fonction de u, v, w,

$$\frac{\Sigma}{S} = 1 - \frac{u}{1 + u + uv} - \frac{v}{1 + v + vw} - \frac{w}{1 + w + uw}.$$

Si nous réduisons les diverses fractions qui constituent le second membre, au même dénominateur, nous trouvons, tout calcul fait,

$$\frac{\Sigma}{S} = \frac{(1 - uvw)}{(1 + u + uv)(1 + v + vw)(1 + w + uw)}.$$

Dans cette égalité, les nombres u, v, w sont pris en valeur absolue ; en tenant compte des signes, et en se conformant à ceux qui résultent de la figure ci-dessus, on doit changer u, v, w, respectivement, en $-u$, $-v$, $-w$ et l'on a bien la formule annoncée.

6. Remarque. — L'égalité (3) donne, parmi les conséquences qu'elle entraîne, le théorème de Jean de Ceva et sa propriété réciproque.

Si l'on suppose que les droites AA', BB', CC' soient concourantes, on a $\Sigma = 0$, et, par suite $uvw = -1$; *réciproquement* si, dans cette égalité, on suppose $uvw = -1$, on a $\Sigma = 0$; les droites AA', BB', CC' sont donc concourantes.

7. Théorème. — *Lorsqu'une transversale* Δ *rencontre les côtés d'un triangle aux points* A', B', C', *on a la relation*

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1 \qquad (4)$$

Abaissons sur Δ, des sommets du triangle ABC, des perpendiculaires Aa, Bb, Cc ; nous avons

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{Bb}{Cc}, \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{Cc}{Aa}, \quad \text{et} \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{Aa}{Bb}.$$

Ces égalités entraînent la suivante

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

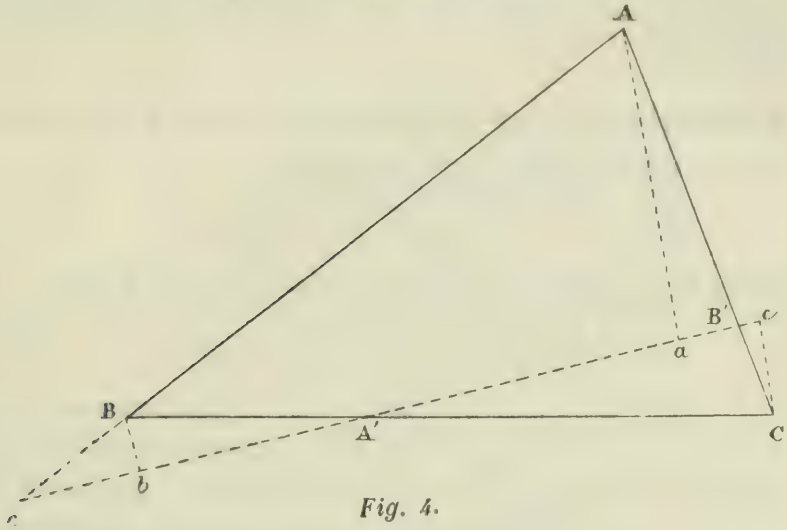


Fig. 4.

Ce théorème, comme on le sait, est attribué à Ménélaüs (*). Sa réciproque est vraie et donne lieu à de nombreuses conséquences. Mais, sans reproduire la démonstration très connue qui établit cette réciproque, nous allons, à l'imita-

(*) Ménélaüs, géomètre grec (v. 80 après J.-C.; *Spherica*, t. III, p. 1). On connaît de lui deux ouvrages; l'un qui était relatif au calcul des cordes et qui a été perdu; l'autre intitulé *les Sphériques*, dans lequel se trouve comme lemme la propriété en question.

Ce théorème, si justement célèbre, était bien connu des anciens. On le trouve encore dans l'*Abnageste* de Ptolémée et dans le VIIIe livre des œuvres de Pappus. (Voyez : Chasles, *les trois livres des Porismes d'Euclide*, p. 107.) Chasles dit à ce propos (*loc. cit.*) : « Il y a lieu de penser qu'Euclide lui-même faisait usage du théorème, et que c'est par cette raison que Pappus ne fait pas difficulté de l'employer dans ses lemmes, sans le démontrer. » Chasles fait allusion ici *aux trente-huit lemmes de Pappus* qui ont servi à Simson d'abord, à lui-même ensuite, à rétablir, avec une certaine probabilité, les trois livres des Porismes d'Euclide.

Nous dirons ici, à cette occasion, que, si ingénieuse que soit la reconstitution des livres en question, telle qu'elle a été faite par Simson et par Chasles, cette longue suite de propositions ne nous paraît offrir qu'un intérêt scientifique assez faible, parce que les théorèmes énoncés ne sont, pour le très grand nombre, que des corollaires, très multipliés, d'une proposition générale, unique, celle qui vise le lieu décrit par les branches correspondantes de deux faisceaux homographiques, ayant deux rayons correspondants coïncidents. Il reste, il est vrai, au livre en question, son grand intérêt historique, lequel est hors de contestation.

tion de ce que nous avons fait tout à l'heure pour le théorème de Jean de Ceva, donner un théorème plus général que celui de Ménélaüs et, de ce théorème général, nous déduirons, dans un cas particulier, la proposition de Ménélaüs et sa réciproque.

8. Théorème. — *Si l'on prend trois points* A′, B′, C′ *sur les côtés d'un triangle* ABC, *et si l'on pose*

$$\frac{A'B}{A'C} = u, \qquad \frac{B'C}{B'A} = v, \qquad \frac{C'A}{C'B} = w,$$

la surface σ *du triangle* A′B′C′ *est donnée par la formule*

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{1 - uvw}{(1-u)(1-v)(1-w)}. \qquad (5)$$

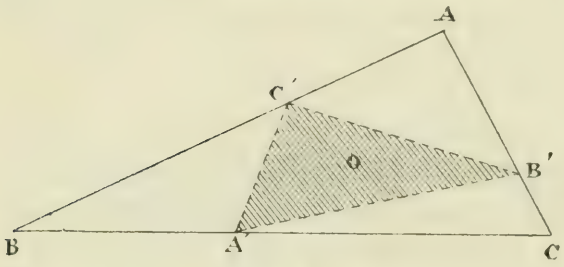


Fig. 5.

Considérons les deux triangles AC′B′, ABC; ils ont un angle commun et nous pouvons écrire

$$\frac{AC'B'}{ABC} = \frac{AC' \,.\, AB'}{AB \,.\, AC},$$

ou

$$\frac{AC'B'}{ABC} = \frac{w}{w+1} \cdot \frac{1}{1+v}.$$

En appliquant cette remarque aux triangles CA′B′ et BA′C′, puis en observant que

$$\sigma + AC'B' + CA'B' + BA'C' = S,$$

nous avons, d'abord,

$$\frac{AC'B' + CA'B' + BA'C'}{S} = \frac{w(1+u) + u(1+v) + v(1+w)}{(u+1)(v+1)(w+1)},$$

puis

$$\frac{\sigma}{S} = 1 - \frac{w(1+u) + u(1+v) + v(1+w)}{(u+1)(v+1)(w+1)}.$$

ou encore

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{1 + uvw}{(u+1)(v+1)(w+1)}.$$

Cette relation suppose que u, v, w sont des quantités prises en valeur absolue; si l'on veut les affecter de signes, conformément à la convention ordinaire, on a bien la formule annoncée.

Parmi les conséquences qui résultent de cette formule, on peut observer que : 1° si les trois points A′, B′, C′ sont en ligne droite, on a $\sigma = 0$, et, par suite, $uvw = 1$; c'est le théorème de Ménélaüs ; 2° si $uvw = 1$, alors $\sigma = 0$; les trois points A′, B′, C′ sont en ligne droite ; c'est la proposition réciproque.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Dufrenoy, directeur de l'école primaire supérieure d'Amiens.

... Je vous signale, en passant, une construction du pentagone régulier de côté donné. Je la crois peu connue ; elle est tirée de *The illustrated London practical Geometry, by Robert Scott Burn. London, 1853.*

Soit AB, le côté donné (1) ; des points A et B, comme centres, et avec AB pour rayon, décrivons des circonférences. Elles se coupent aux points E et F. Du point E, comme centre, avec AB pour rayon, décrivons une troisième circonférence ; elle coupe les deux autres aux points M et N, et la droite EF en G. Joignons MG, NG ; ces droites vont rencontrer les circonférences B et A aux points C et E, au-dessus de AB ; BC et AE sont deux côtés du pentagone. Les deux autres se tracent sans difficulté.

QUESTION 43

Solution par M. E. Mosnat, à Thiers.

Trouver le maximum du produit $x^m y^n$, *sachant que les variables positives* x *et* y *sont liées par la condition*

$$x^p y^q + x^{p'} y^{q'} = K.$$

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

On peut écrire

$$x_m y^n = (x^p y^q)^u (x^{p'} y^{q'})^v$$

u et v étant déterminées par les équations

$$pu + p'v = m,$$
$$qu + q'v = n;$$

égalités qui donnent

$$u = \frac{mq' - np'}{pq' - qp'},$$
$$v = \frac{np - mq}{pq' - qp'}.$$

On a donc un produit de deux facteurs, dont la somme

$$x^p y^q + x^{p'} y^{q'}$$

est constante, et le maximum a lieu quand les facteurs sont proportionnels à leurs exposants, c'est-à-dire quand on a

$$\frac{x^p y^q}{u} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{v},$$

ou

$$\frac{x^p y^q}{mq' - np'} = \frac{x^{p'} y^{q'}}{np - mq} = \frac{K}{mq' + np - np' - mq}.$$

Ces équations donnent facilement x et y.

En posant, pour abréger l'écriture,

$$x^p y^q = h, \quad x^{p'} y^{q'} = h',$$

on a, par combinaison,

$$x^{pq' - qp'} = h^{q'} h'^{-q}$$

et

$$y^{qp' - pq'} = h^{p'} h'^{-p}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Giat, au lycée de Moulins ; Puig, au lycée de Montpellier; Fitz-Patrick, au lycée d'Angoulême.

QUESTION 123 (*)

Par M. **P. Bourgarel**, à Antibes.

On donne trois circonférences C, C′, C″, *passant par le même point* O ; *on propose de mener par* O *une transversale qui rencontre les circonférences proposées aux points* A, A′, A″, *et de*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

telle façon que le rapport $\frac{A''A}{A'A}$ *soit égal au rapport de deux lignes données* p *et* q. (Exam. oraux, Polyt. 1883.)

Supposons le problème résolu et soit AA″A′ une sécante répondant à la question. Menons les tangentes AT′, AT″, du point A, aux deux circonférences C′ et C″. Nous avons

$$\frac{AA'}{AA''} = \frac{p}{q} = \frac{AA' \,.\, AO}{AO \,.\, AA''} = \frac{\overline{AT'}^2}{\overline{AT''}^2},$$

d'où

$$\frac{AT'}{AT''} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

Cette proportion nous montre que le point A appartient au lieu des points tels que le rapport des tangentes menées de ces points aux deux circonférences C′ et C″ soit constant. On sait que ce lieu est une circonférence, passant par les points communs à C′ et à C″. Elle rencontre donc la circonférence C en un second point A différent de O qui répond à la question. Le problème admet, en général, trois solutions distinctes.

Nota. — Cette question a été résolue par MM. Fitz-Patrick, au lycée d'Angoulême ; Lamaire et Raveau, au lycée Charlemagne ; Aubry, au lycée de Douai.

QUESTIONS PROPOSÉES

170. — Démontrer les propositions suivantes :

Dans un triangle rectangle :

1° Les droites antiparallèles qui joignent les projections des pieds de la médiane antiparallèle et de la médiane sur les côtés adjacents sont respectivement égales à ces droites ;

2° La droite qui joint les projections du pied de la médiane antiparallèle sur les côtés adjacents est antiparallèle à l'hypoténuse ;

3° La médiane et la médiane antiparallèle d'un triangle

rectangle sont la médiane antiparallèle et la médiane du triangle de même sommet déterminé par la droite qui joint les projections sur les côtés adjacents du pied de la médiane antiparallèle du premier triangle;

4° La droite qui joint les projections du pied de la médiane antiparallèle sur les côtés adjacents est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de ses extrémités sur l'hypoténuse.

Déduire, de là, la solution de la question suivante *(Journal de Math. Élém., question proposée n° 154, juillet 1884)*:

Étant donné un triangle rectangle ABC, mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse BC, de manière que la partie DE comprise entre les côtés de l'angle droit soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points D et E sur l'hypoténuse.

N. B. — Dans cet énoncé la médiane et la médiane antiparallèle considérées sont issues du sommet de l'angle droit.

(Vigarié.)

Ce numéro était composé quand nous avons appris la mort soudaine de M. Vazeille. Le temps et aussi certains renseignements nous manquent pour retracer aujourd'hui, convenablement, la vie si occupée, et tout entière vouée au travail de ce professeur distingué, mort à la peine. Mais nous espérons pouvoir, dans une notice qui paraîtra dans le prochain numéro de ce journal, rendre à la mémoire de celui qui fut ici, pendant près de trois années, notre collaborateur, le tribut d'éloges auquel elle a droit.

G. L.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3158-5.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 25.)

59. — Nous allons maintenant réduire l'équation générale (131).

Lorsque les deux termes qui contiennent les carrés des inconnues font défaut dans cette équation, le terme contenant le rectangle des mêmes inconnues ne peut manquer aussi : car l'équation se réduirait alors au premier degré.

Nous pouvons donc considérer l'équation comme complètement résolue, dans le cas où les deux carrés font défaut, et nous n'aurons plus à étudier cette équation que si l'un des carrés au moins y figure.

Appelons y l'inconnue dont le carré existe nécessairement dans l'équation, c'est-à-dire que a ne peut être nul.

Multiplions par $4a$ tous les termes de (131) :

$$4a^2y^2 + 4abxy + 4acx^2 + 4ady + 4afx + 4ag = 0.$$

Ajoutons et retranchons b^2x^2 :

$$(2ay + bx)^2 - (b^2 - 4ac)\,x^2 + 4ady + 4afx + 4ag = 0.$$

Posons $2ay + bx = \rho z$, ρ étant le plus grand commun diviseur de $2a$ et b; nous en déduirons $2ay = \rho z - bx$.

Éliminons y :

$$\rho^2z^2 - (b^2 - 4ac)x^2 + 2d\,(\rho z - bx) + 4afx + 4ag = 0.$$

Ajoutons et retranchons d^2 :

$$(\rho z + d)^2 - (b^2 - 4ac)x^2 + (4af - 2bd)\,x + 4ag - d^2 = 0.$$

Posons $\rho z + d = \rho' u$, ρ étant le plus grand commun diviseur de ρ et d, ou de $2a$, b et d; on aurait pu, par conséquent, poser d'abord

$$2ay + bx = \rho' u - d \qquad (136)$$

$$\rho'^2u^2 - (b^2 - 4ac)\,x^2 + (4af - 2bd)\,x + 4ag - d^2 = 0. \qquad (137)$$

Deux cas peuvent se présenter : ou $b^2 - 4ac = 0$, ou $b^2 - 4ac$ est différent de zéro.

60. — Premier cas. — Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation (137) se réduit à la forme

$$ay^2 = bx + c. \qquad (138)$$

Il semble que l'on pourrait encore réduire cette dernière équation en posant $bx + c = al$; mais cette dernière réduction serait inutile, car elle ne dispenserait pas de résoudre l'équation (138).

61. — Deuxième cas. — Si $b^2 - 4ac$ est différent de zéro, nous pouvons multiplier par $b^2 - 4ac$ tous les termes de l'équation (137) :

$$(b^2 - 4ac)\rho'^2u^2 - (b^2 - 4ac)^2x^2 + (4af - 2bd)(b^2 - 4ac)x$$
$$+ (4ag - d^2)(b^2 - 4ac) = 0.$$

Retranchons et ajoutons $(2af - bd)^2$:

$$(b^2 - 4ac)\rho'^2u^2 - [(b^2 - 4ac)x - (2af - bd)]^2$$
$$+ (4ag - d^2)(b^2 - 4ac) + (2af - bd)^2 = 0.$$

Posons

$$(b^2 - 4ac)x - (2af - bd) = \rho''v.$$

ρ'' étant le plus grand commun diviseur de $b^2 - 4ac$ et de $2af - bd$:

$$(b^2 - 4ac)\rho'^2u^2 - \rho''^2v^2 + P = 0$$

ou, ρ'^2 divisant ρ''^2 et P^2,

$$(b^2 - 4ac)u^2 - m^2v^2 + Q = 0. \qquad (139)$$

Les coefficients des deux inconnues de (139) seront de même signe, lorsque l'on aura $b^2 - 4ac < 0$, et de signes contraires, si l'on a $b^2 - 4ac > 0$.

Il est facile de reconnaître que toute valeur entière de y et x qui satisfera à la proposée, donnera une solution entière de l'équation (138) ou de l'équation (139). L'une de ces dernières pourra seulement être satisfaite par des valeurs entières qui donneront aux inconnues de la proposée des valeurs fractionnaires, et qui, par conséquent, devront être rejetées.

Toutes les valeurs entières qui satisferont à l'une des équations (138) et (139) ne satisferont donc pas à la proposée : mais les solutions qui satisfont à la proposée ne peuvent se trouver que parmi les correspondantes des solutions entières des équations (138) et (139). *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École polytechnique.

(*Suite*, voir p. 224, oct. 1884.)

XLV

Construire un triangle, connaissant l'excès (positif ou négatif) du carré de chaque côté sur le rectangle des deux autres.

Soit ABC le triangle cherché dont j'appelle les côtés BC, AC, AB respectivement x, y, z.

Si l'on considère les trois quantités $x^2 - yz$, $y^2 - xz$, $z^2 - xy$, on voit qu'elles ne peuvent être toutes trois de même signe (on excepte le cas du triangle équilatéral, pour lequel ces quantités sont nulles), puisque la différence entre le carré du plus grand côté et le rectangle des deux autres est certainement positive et que la différence entre le carré du plus petit côté et le rectangle des deux autres est certainement négative.

On ne pourra donc faire que les six hypothèses suivantes :

$$(1)\begin{cases} x^2 - yz > 0 \\ y^2 - xz > 0 \\ z^2 - xy < 0 \end{cases} \quad (2)\begin{cases} x^2 - yz > 0 \\ y^2 - xz < 0 \\ z^2 - xy < 0 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} x^2 - yz > 0 \\ y^2 - xz < 0 \\ z^2 - xy > 0 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} x^2 - yz < 0 \\ y^2 - xz < 0 \\ z^2 - xy > 0 \end{cases} \quad (5)\begin{cases} x^2 - yz < 0 \\ y^2 - xz > 0 \\ z^2 - xy > 0 \end{cases} \quad (6)\begin{cases} x^2 - yz < 0 \\ y^2 - xz > 0 \\ z^2 - xy < 0 \end{cases}$$

Ce qui, si l'on représente par M^2, N^2, P^2 les grandeurs absolues des excès considérés, donne lieu aux six problèmes que résolvent les six systèmes de trois équations :

$$(1)\begin{cases} x^2 - yz = M^2 \\ y^2 - xz = N^2 \\ z^2 - xy = -P^2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x^2 - yz = M^2 \\ y^2 - xz = -N^2 \\ z^2 - xy = -P^2 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} x^2 - yz = M^2 \\ y^2 - xz = -N^2 \\ z^2 - xy = P^2 \end{cases} \qquad (4)\begin{cases} x^2 - yz = -M^2 \\ y^2 - xz = -N^2 \\ z^2 - xy = P^2 \end{cases}$$

$$(5)\begin{cases} x^2 - yz = -M^2 \\ y^2 - xz = N^2 \\ z^2 - xy = P^2 \end{cases} \qquad (6)\begin{cases} x^2 - yz = -M^2 \\ y^2 - xz = N^2 \\ z^2 - xy = -P^2 \end{cases}$$

posons

$$x^2 - yz = A$$
$$y^2 - xz = B$$
$$z^2 - xy = C$$

on tire de la troisième

$$x = \frac{z^2 - C}{y}$$

d'où par substitution

$$(z^2 - C)^2 - y^3 z = Ay^2 \qquad (7)$$
$$y^3 - z(z^2 - C) = By \qquad (8)$$

multipliant (8) par z et ajoutant à (7) on a

$$Ay^2 + Bzy + C(z^2 - C) = 0 \qquad (9)$$

multipliant (7) par z, (8) par $z^2 - C$, ajoutant et divisant le résultat par y, il vient

$$Cy^2 + Azy + B(z^2 - C) = 0. \qquad (10)$$

Éliminant y^2 entre (9) et (10) après avoir divisé le résultat par $z^2 - C$, il vient

$$z^2 = \frac{(C^2 - AB)^2}{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC}$$

et de même on aurait

$$y^2 = \frac{(B^2 - AC)^2}{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC}$$

$$x^2 = \frac{(A^2 - BC)^2}{A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC}$$

comme l'on a

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$$
$$= \frac{1}{4}(A + B + C)[(2A - B - C)^2 + (B - C)^2]:$$

il faut d'abord pour la possibilité du problème que

$$A + B + C > 0,$$

ce qui donne une condition différente pour chacun des six problèmes que nous examinons.

Mais on a

$$A^2 - BC = x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$
$$B^2 - AC = y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$
$$C^2 - AB = z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

ce qui prouve que, dans le cas où il y a solution, les premiers membres sont positifs et sont proportionnels à x, y, z. Le problème se résout donc ainsi :

On construit des droites B'C', C''A'', A'''B''' *proportionnelles respectivement à* $A^2 - BC$, $B^2 - AC$, $C^2 - AB$; *si l'on peut construire un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *tel que*

$$\beta\gamma = B'C'$$
$$\gamma\alpha = C''A''$$
$$\alpha\beta = A'''B'''$$

le triangle $\alpha\beta\gamma$ *sera semblable au triangle cherché* ABC *et les côtés* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *sont respectivement proportionnels à* x, y, z ; *ces longueurs sont alors trouvées facilement par les équations de celui des six groupes que l'on considère ; soit le groupe* (1), *soit* (2), *etc... soit* (6).

Si l'on ne peut construire le triangle $\alpha\beta\gamma$, le problème est impossible.

XLVI

Soit donné un point A *que je joins à un point quelconque* C *d'une droite* BC *également donnée ; la perpendiculaire menée en* C *à* AC *coupe en* D *la parallèle à* BC *menée par* A.

Soit DM *la symétrique de* AD *par rapport à cette parallèle. Quel est le lieu du point* M *pied de la perpendiculaire abaissée de* A *sur* DM?

Soit E le milieu de AD.

On a EA = EC et comme

angle DEC = angle EAC + angle ECA = 2 fois angle EAC
= angle EDM,

les deux droites EC, DM sont parallèles ; par suite, EC coupe AM en son milieu I.

Soit C' la projection de C sur AD :

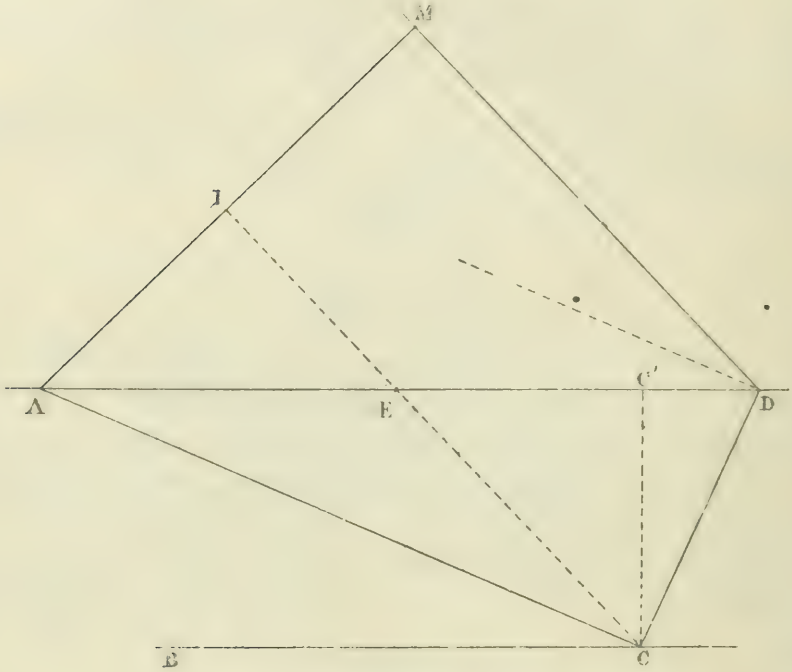
Les deux triangles rectangles AIE, EC'C ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

Donc

$$AI = CC'$$

et par suite

$$AM = 2\,CC'.$$



Le lieu de M *est donc une circonférence décrite du point* A *comme centre avec le double de la distance de* A *à la droite* BC *pour rayon.* *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié,** élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

(*Suite*, voir p. 33).

---

4. Théorème. — *Si trois droites issues des sommets d'un triangle sont concourantes, les inverses de ces droites sont concourantes* (*).

(*) M. le colonel Mathieu, *loc. cit.* (p. 397).

Soit ω' le point d'intersection des inverses de $A\omega$, $B\omega$ d'après le théorème précédent, on a

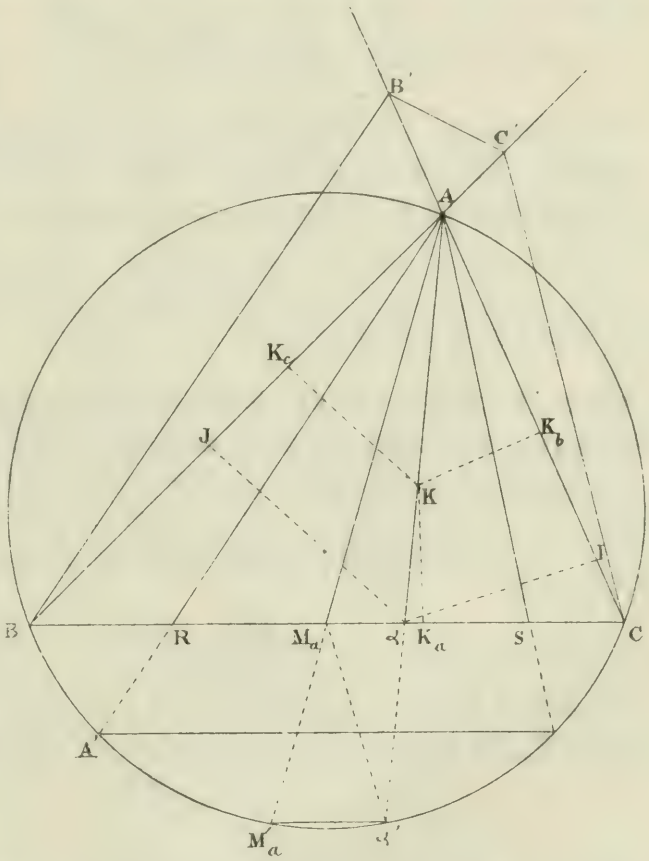
$$\omega\omega_b \,.\, \omega'\omega'_b = \omega\omega_c \,.\, \omega'\omega'_c$$
$$\omega\omega_a \,.\, \omega'\omega'_a = \omega\omega_c \,.\, \omega'\omega'_a$$

d'où

$$\omega\omega_a \,.\, \omega'\omega'_a = \omega\omega_b \,.\, \omega'\omega'_c.$$

Égalité qui montre que le point ω' est sur l'inverse de $C\omega$.

5. Théorème. — *La médiane antiparallèle divise le côté opposé en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents* (*).



Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Les produits des segments ayant même extrémité en un sommet que deux droites inverses déterminent sur le côté opposé sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents.

Soient AR, AS les deux droites inverses considérées. Par B, C je mène des parallèles respectivement à AR, AS qui rencontrent les côtés opposés AC, AB en B′, C′. Les triangles semblables BAS, BCC′; CAR,

(*) M. E. Lemoine, *loc. cit.* Congrès de Lyon 1873. — M. d'Ocagne, *loc. cit.*, 1883. — Cette propriété avait été énoncée par M. le commandant d'état-major Hossard (Catalan et Fremoire, *Théorèmes et Problèmes*).

CBB′ donnent

$$\frac{AB}{AC'} = \frac{BS}{SC} \quad \frac{AC}{AB'} = \frac{CR}{BR};$$

d'où

$$\frac{AB \,.\, AB'}{AC \,.\, AC'} = \frac{BS \,.\, BR}{CS \,.\, CR}.$$

Or les triangles semblables ABB′, ACC′ donnent

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC},$$

Donc

$$\frac{BS \,.\, BR}{CS \,.\, CR} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

Remarque. — La droite B′C′ est antiparallèle à BC.

Quand AR est la médiane AMa, AS devient la médiane antiparallèle Aα et la formule précédente devient

$$\frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

et le théorème est démontré.

Corollaire. — *Dans un triangle rectangle la hauteur issue du sommet de l'angle droit est médiane antiparallèle.*

Si AR et AS se confondent, c'est-à-dire coïncident avec AE, alors

$$BR = BS = BE \quad CR = CS = CE;$$

par suite

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC}. \qquad (1)$$

Si enfin l'une des droites, AR par exemple, se confond avec AE_1, la droite AS est le prolongement de AE_1, donc

$$\frac{BE_1}{CE_1} = \frac{AB}{AC}. \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) démontrent le théorème classique sur les segments que les bissectrices déterminent sur les côtés opposés.

Quand on considère AM_a, Aα comme les côtés d'un triangle, AB et AC sont deux droites inverses, donc

$$\frac{B\alpha \,.\, C\alpha}{BM_a \,.\, CM_a} = \frac{\overline{A\alpha}^2}{\overline{AM_a}^2}.$$

Cette relation s'applique évidemment à deux droites inverses quelconques.

6. Théorème. — *Les trois médianes antiparallèles d'un triangle sont concourantes* (*).

Les médianes d'un triangle étant concourantes, il en est de même des médianes antiparallèles (Théorème 4); on le démontre encore ainsi : Soient $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ les médianes antiparallèles, on a

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{B\alpha}{C\alpha} \qquad \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{C\beta}{A\beta} \qquad \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{A\gamma}{B\gamma}.$$

D'où

$$\frac{\overline{AB}^2 \,.\, \overline{AC}^2 \,.\, \overline{BC}^2}{\overline{AC}^2 \,.\, \overline{AB}^2 \,.\, \overline{BC}^2} = \frac{B\alpha \,.\, C\beta \,.\, A\gamma}{C\alpha \,.\, A\beta \,.\, B\gamma} = 1$$

ainsi que l'a proposé M. J. Neuberg (**). Je donnerai dans la suite au point de concours des médianes antiparallèles le nom de *Point de Lemoine*, à cause des propriétés que ce géomètre en a donné.

7. Théorème. — *Les distances d'un point d'une médiane antiparallèle aux côtés adjacents sont proportionnelles à ces côtés.*

On sait que les distances d'un point d'une médiane aux côtés adjacents sont inversement proportionnelles aux côtés; on en déduit immédiatement (Théorème 3) la proposition que je viens d'énoncer.

Ce théorème peut se démontrer directement de la manière suivante : Soient : I J les projections du point α sur AC, AB. Les triangles $A\alpha B$, $A\alpha C$ ayant même hauteur on a

$$\frac{\text{tr } A\alpha B}{\text{tr } A\alpha C} = \frac{B\alpha}{C\alpha} = \frac{AB \,.\, J\alpha}{AC \,.\, I\alpha} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}.$$

D'où

$$\frac{J\alpha}{I\alpha} = \frac{AB}{AC}.$$

Le théorème étant vrai pour un point α de $A\alpha$ est vrai

(*) M. E. Lemoine, *loc. cit.* Congrès de Lyon 1873. — M. d'Ocagne, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1883.

(**) M. J. Neuberg, *Mathésis*, t. IV, p. 201. — *Mémoires sur le tétraèdre* (Extrait des mémoires couronnés par l'Académie royale de Belgique), 1884.

pour tout point de la droite; de même pour les distances d'un point quelconque de la médiane antiparallèle partant de B et C. Soient K le point de Lemoine, K_a, K_b, K_c ses projections sur les trois côtés du triangle, on a

$$\frac{KK_c}{KK_b} = \frac{AB}{AC} \quad \text{d'où} \quad \frac{KK_c}{AB} = \frac{KK_b}{AC}$$

et

$$\frac{KK_c}{KK_a} = \frac{AB}{BC} \quad \text{d'où} \quad \frac{KK_c}{AB} = \frac{KK_a}{BC}.$$

Donc

$$\frac{KK_a}{BC} = \frac{KK_c}{AB} = \frac{KK_b}{AC},$$

c'est-à-dire que

Les distances du point de Lemoine aux trois côtés sont proportionnelles à ces côtés (*).

On voit facilement que

1° $$B\alpha = \frac{ac^2}{b^2 + c^2} \qquad C\alpha = \frac{ab^2}{b^2 + c^2};$$

2° $$A\alpha = \frac{2bc}{b^2 + c^2} \times AM_a;$$

d'où

$$A\alpha = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}:$$

3° $$K\alpha = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \times A\alpha$$

$$= \frac{a^2\, bc}{(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2)}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

et

$$AK = A\alpha - \alpha K = \frac{bc}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

8. Théorème. — *La droite* R'S' *qui joint les points d'intersection de deux droites inverses* AR, AS *avec la circonférence circonscrite à* ABC *est parallèle à* BC.

En effet, les angles SAC, RAB étant égaux, les arcs RR', CS' le sont aussi. Ce théorème fournit encore un moyen de construire la médiane antiparallèle.

(*) M. E. Lemoine, *loc. cit.* Congrès de Lille 1874.

La perpendiculaire élevée sur le milieu de R'S' passe par le milieu de BC, c'est-à-dire que

Les distances au milieu d'un côté d'un triangle aux points où deux droites inverses issues du sommet opposé coupent la circonférence circonscrite sont égales.

On verrait facilement que quand les deux droites inverses sont la médiane et la médiane antiparallèle, le côté BC est la bissectrice de l'angle $AM_a\alpha'$.

On calculerait aussi $M_aM'_a$ et $\alpha\alpha'$. En effet, on a

$$4AM_a \,.\, M_aM'_a = 4BM_a \,.\, CM_a = \overline{BC}^2.$$

D'où

$$M_aM'_a = \frac{2a^2}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}};$$

de même

$$\alpha\alpha' = A\alpha' - A\alpha = \frac{A\alpha \,.\, M_aM'_a}{AM\alpha} = \frac{4a^2bc}{(b^2 + c^2)\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$

9. Théorème. — *Les droites qui joignent les projections des pieds de deux droites inverses sur les côtés adjacents sont antiparallèles.*

Soient N, P; T, L, les proportions des pieds S, R de AS, AR sur AB, AC. Les triangles ASP, ATR; ARL, ANS donnent

$$\frac{AP}{AT} = \frac{AS}{AR} \qquad \frac{AL}{AN} = \frac{AR}{AS}.$$

D'où

$$\frac{AP \,.\, AL}{AT \,.\, AN} = \frac{AS \,.\, AR}{AR \,.\, AS} = 1.$$

10. Théorème. — *Si du pied d'une droite issue du sommet d'un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés adjacents, la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires est elle-même perpendiculaire sur l'inverse de la première droite.*

Les quadrilatères ATRL, ANSP étant inscriptibles on a

$$\widehat{TAR} = \widehat{TLR} \qquad \widehat{SAC} = \widehat{SNP}.$$

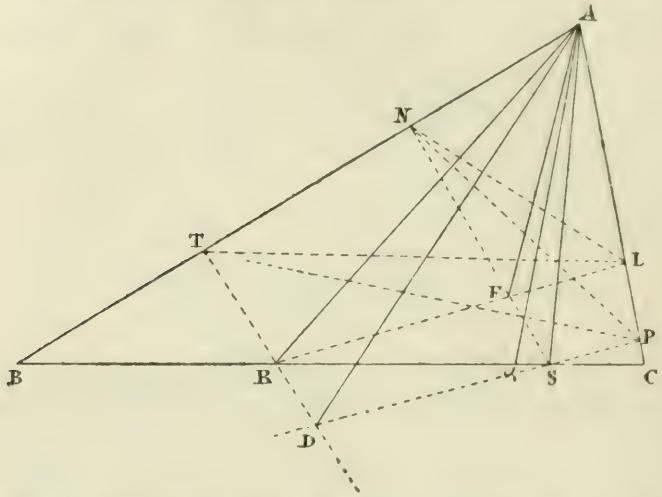
D'où

$$\widehat{TAR} = \widehat{SNP}.$$

Ces angles ayant deux côtés perpendiculaires, les deux autres le sont aussi; donc AR et NP sont perpendiculaires.

D'où le cas particulier suivant :

Du milieu M *de* BC *d'un triangle* ABC *on abaisse les perpendiculaires* MG, ME *sur* AB, AC. *La droite* GE *qui joint les*



pieds de ces perpendiculaires est perpendiculaire à la médiane antiparallèle issue du sommet A (*). *(A suivre.)*

SUR LE PENTAGONE D'ALBERT DÜRER

La construction que nous avons indiquée dans le numéro précédent (**), donne lieu à une observation importante qui nous a été communiquée par M. Catalan.

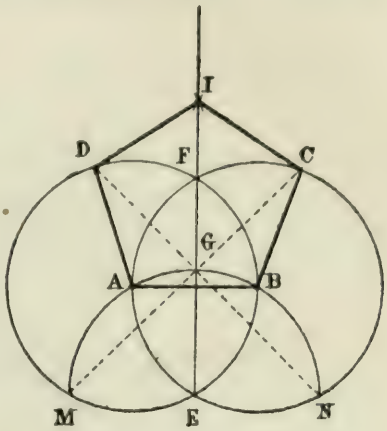
Mais d'abord une lettre employée deux fois par M. Dufrenoy, qui nous avait signalé cette construction, a rendu celle-ci inintelligible. Pour éviter toute confusion, voici la figure qui convient à la construction citée; la lettre E visée dans les trois dernières lignes de la lettre de M. Dufrenoy doit être remplacée par D.

Une remarque plus intéressante porte sur ce fait que le pentagone construit, conformément à la règle donnée, *n'est pas régulier*.

La construction indiquée est due à Albert Dürer (***).

(*). M. d'Ocagne, *loc. cit.* 1883. Exercice, p. 463.
(**) Voyez *Journal*, p. 45.
(***) *Alberti Düreri Institutionum*,.... (1606), p. 55.

Elle a été signalée par M. Catalan dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. II, 1876 p. 403). M. Catalan, en faisant connaître cette construction d'Albert Dürer, proposait *de calculer les angles de ce pentagone équilatéral.*



Cette question a été résolue par M. Van Aubel (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. III; 1877, p. 386), qui a trouvé, pour les angles du pentagone, les valeurs suivantes :

$$A = B = 108^\circ\ 22'\ 1'',$$
$$C = D = 107^\circ\ 2'\ 8'',$$
$$I = 109^\circ\ 11'\ 42''.$$

Le pentagone d'Albert Dürer est donc *à peu près régulier,* mais il ne doit pas être donné comme régulier, ainsi qu'on paraît l'avoir dit à tort (*). G. L.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 36.)

CHAPITRE II

LES TRANSVERSALES, LES POINTS, ET LES TRIANGLES RÉCIPROQUES. — THÉORÈMES DIVERS.

9. Définitions. — *Points et transversales réciproques.* — Nous ferons souvent usage, surtout dans la première partie de ce livre, de points et de droites, associés d'après une

(*) *The Illustrated London Practical Geometry.* — *Éléments de géométrie pratique,* par G. de Vylder, p. 153; deuxième édition; Gand, 1877.

loi que nous avons imaginée autrefois (*) et que nous avons nommés POINTS RÉCIPROQUES et TRANSVERSALES RÉCIPROQUES.

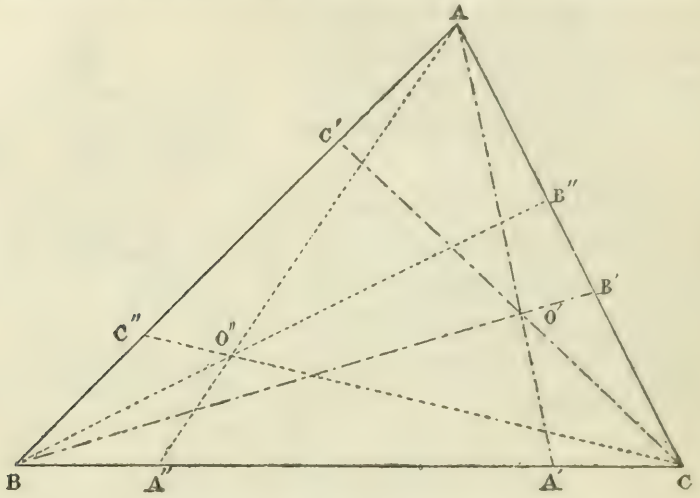


Fig. 6.

Imaginons un triangle ABC et, dans le plan de ce triangle, un certain point O'. La droite O'A rencontre BC en A'; soit A'' le symétrique de A' par rapport au milieu de BC. La droite AA'' et les droites analogues BB'' CC'' (d'après le théorème de Jean de Ceva et sa réciproque) concourent en un point O''. Ces deux points O', O'', ainsi associés et qui sont tels que le point O'' étant déduit

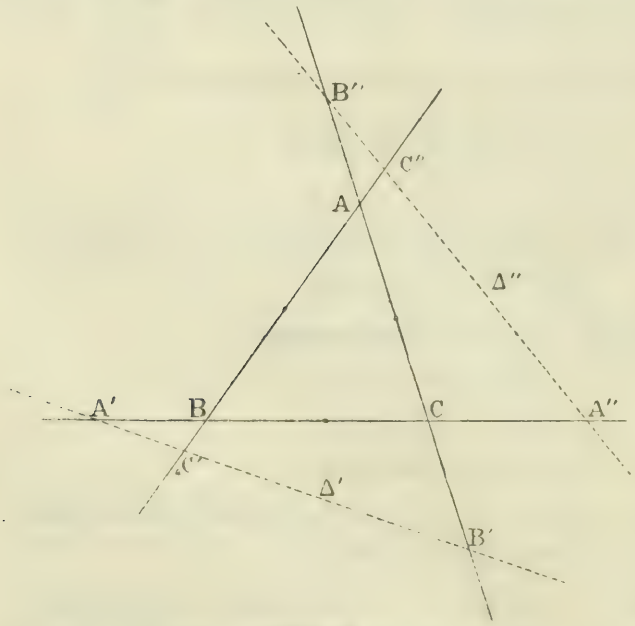


Fig. 7.

(*) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III; Mémoire sur une nouvelle méthode de transformation en géométrie.

de O′, comme nous venons de le dire, *réciproquement* le point O′ puisse se déduire de O″ par la même loi, sont deux points que nous nommons réciproques.

Prenons maintenant une transversale Δ′, dans le plan du triangle ABC; Δ rencontre ABC en des points A′, B′, C′. Si nous imaginons les points A″, B″, C″ symétriques de ceux-ci par rapport aux milieux des côtés BC, CA, AB, les trois points A″, B″, C″ sont situés (d'après le théorème de Ménélaüs et sa réciproque) sur une droite Δ″. Ces deux droites Δ′, Δ″, ainsi associées l'une à l'autre, ont été appelées par nous transversales réciproques.

Ces points et ces transversales réciproques doivent jouer un certain rôle dans ce travail; parce que l'on peut toujours, avec la règle et l'équerre, déterminer le milieu d'une droite et le symétrique d'un point donné, par rapport à ce milieu.

10. Remarque. — Considérons trois points *quelconques* A′, B′, C′, sur les côtés du triangle ABC, et, en même temps, les points A″, B″, C″ déterminés comme nous venons de le dire. Les deux triangles A′B′C′, A″B″C″ (*triangles réciproques* comme nous pourrions les appeler) ont la même surface.

En effet, la formule (5) reste identique à elle-même quand on change u, v, w, respectivement en $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$.

Le théorème des transversales réciproques doit donc, d'après cela, être considéré comme un cas particulier de la proposition plus générale que nous venons d'établir et qui met en lumière l'équivalence des surfaces de deux triangles réciproques. Ce cas particulier peut se formuler ainsi : si l'un des triangles a une surface nulle, il en est de même du triangle réciproque.

11. Théorème. — *Les coordonnées* $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ *de deux points réciproques* O′, O″ *vérifient les égalités*

$$\alpha'\alpha'' = \beta'\beta'' = \gamma'\gamma''. \qquad (6)$$

En effet, les deux triangles (*fig. 6*) BOA, COA, donnent

$$\frac{\text{BOA}}{\text{COA}} = \frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{\text{BA}'}{\text{CA}'}.$$

D'autre part,

$$\frac{BO'A}{CO'A} = \frac{\gamma''}{\beta''} = \frac{BA''}{CA''}.$$

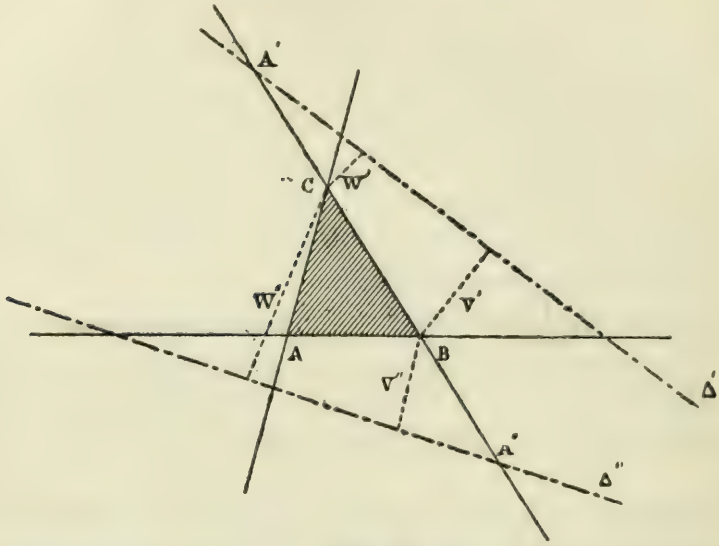


Fig. 8.

D'ailleurs

$$BA' = CA'' \quad \text{et} \quad BA'' = CA';$$

les égalités précédentes donnent donc

$$\frac{\gamma'}{\beta'} = \frac{\beta''}{\gamma''},$$

ou

$$\beta'\beta'' = \gamma'\gamma''.$$

On a donc, finalement,

$$\alpha'\alpha'' = \beta'\beta'' = \gamma'\gamma''.$$

12. Théorème. — *Si l'on considère deux droites* Δ', Δ'' *transversales réciproques par rapport au triangle* ABC, *les perpendiculaires* (U', V', W'), (U'', V'', W'') *abaissées des sommets de ce triangle, sur ces deux droites, vérifient les égalités*

$$U'U'' = V'V'' = W'W''. \tag{7}$$

Les triangles semblables donnent

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{V'}{W'},$$

et

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{V''}{W''}.$$

Mais on suppose

$$A'B = A''C, \quad \text{et} \quad A'C = A''B;$$

on a donc

$$\frac{V'}{W'} = \frac{W''}{V''}.$$

ou

$$V'V'' = W'W''.$$

On trouve, pour les mêmes raisons,

$$U'U'' = V'V'',$$

et l'on a, finalement,

$$U'U'' = V'V'' = W'W''.$$

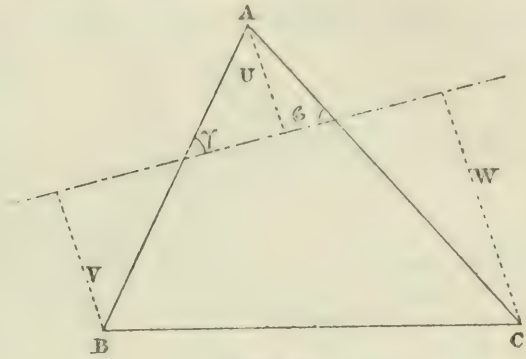


Fig. 9.

13. Remarque. — Les longueurs U, V, W, qu'on peut appeler les coordonnées de la droite Δ par rapport au triangle ABC, vérifient la relation (8)

$$U^2 \sin^2 A + V^2 \sin^2 B + W^2 \sin^2 C - 2VW \sin B \sin C \cos A$$
$$- 2UW \sin A \sin C \cos B - 2UV \sin A \sin B \cos C = \frac{S^2}{R^2},$$

S désignant l'aire du triangle ABC, R étant la longueur du rayon du cercle circonscrit à ce triangle.

On a, en effet,

$$U + V = c \sin \gamma, \text{ et } V + W = b \sin \beta.$$

D'ailleurs,

$$\cos(\beta + \gamma) = - \cos A.$$

Cette relation donne,

$$\sin^2 A = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos A$$

et, par suite,

$$\sin^2 A = \frac{(U+V)^2}{c^2} + \frac{(U+W)^2}{b^2} - 2\,\frac{(U+V)(U+W)}{bc} \cos A.$$

C'est de cette dernière égalité que l'on déduit la formule (8). Cette relation a été donnée par Painvin *(Géométrie analytique; relation entre les coordonnées trilatères d'une droite*, p. 89); elle peut se mettre sous la forme

$$4S^2 = a^2(U - V)(U - W) + b^2(V - U)(V - W)$$
$$+ c^2(W - V)(W - U). \qquad (9)$$

Nous donnerons maintenant une série de propositions que nous appliquerons dans la suite à certaines constructions.

Quelques-unes d'entre elles sont très connues, ou tout à fait évidentes; nous nous bornons à les énoncer.

14. Théorème. — *La droite* PQ *menée par le point de concours* O *des diagonales du trapèze* ABCD *est partagée, par le point* O *et par les côtés du trapèze, en deux parties égales.*

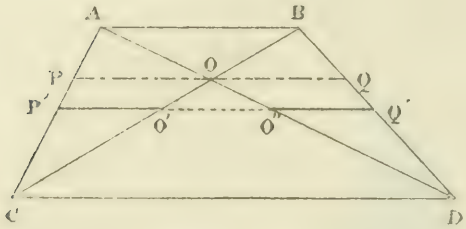


Fig. 10.

De plus, on a

$$\frac{1}{PO} = \frac{1}{QO} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$$

15. Théorème (*). — *Si l'on coupe un trapèze par une droite* P'Q' *parallèle à ses bases, cette droite rencontre les côtés et les diagonales en des points*

$$P', O', O'', Q':$$

et l'on a

$$P'O' = O''Q'.$$

Cette propriété résulte immédiatement de la précédente, et, d'ailleurs, elle peut être considérée comme constituant un de cas particuliers du théorème suivant, qui est peut-être moins connu.

16. Théorème. — *Soit* ABCD *un quadrilatère; une droite* Δ *est mobile dans son plan, mais elle reste constamment parallèle au côté* AB; Δ *rencontre les côtés* AD, BC *en des points* I, J *et les diagonales* AC, BD *en des points* I', J'; *le rapport* $\frac{II'}{JJ'}$ *est constant et égal à* $\frac{PA}{PB}$; P *désignant le point de rencontre de* CD *avec* AB.

Soit O le point de concours des diagonales AC, BD: par O menons MN, parallèlement à AB. Les triangles semblables de la figure ainsi formée donnent

$$\frac{II'}{OM} = \frac{AI'}{AO} = \frac{BJ'}{BO} = \frac{JJ'}{ON};$$

(*) Cette propriété élémentaire est un cas particulier de celles qui se rattachent aux ponctuelles projectives. (Voy. Cremona, *livre cité*, p. 55 et suivantes: *Constructions des formes projectives.*)

Ainsi, nous avons

$$\frac{II'}{JJ'} = \frac{OM}{ON}.$$

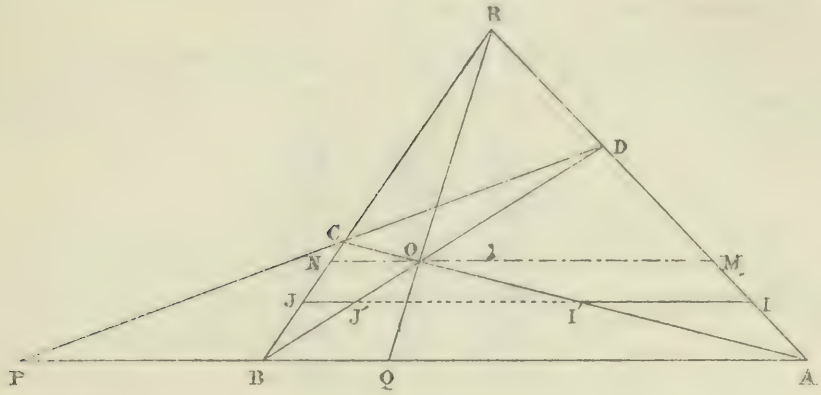


Fig. 11.

D'ailleurs, RO rencontre AB en un certain point Q, conjugué harmonique de P. Il résulte de cette observation que

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB},$$

et comme

$$\frac{QA}{QB} = \frac{OM}{ON},$$

nous avons bien, finalement,

$$\frac{II'}{JJ'} = \frac{PA}{PB}.$$

17. Théorème de Desargues. — *Lorsque deux triangles* ABC, A'B'C' *sont tellement situés que les droites* AA', BB', CC' *soient concourantes, les côtés correspondants se coupent deux à deux en trois points situés en ligne droite; et réciproquement.*

C'est cette propriété bien connue qui a servi de base à la transformation homologique de Poncelet; les deux triangles ABC, A'B'C', ainsi placés, sont dits *homologiques*.

18. Théorème de Mac-Laurin et de Braikenridge (*). — *Soient* Δ, Δ' *deux droites fixes et* A, B, C *trois*

(*) Le théorème de Mac-Laurin et de Braikenridge est plus général ; celui que nous donnons ici n'est, à proprement parler, qu'un corollaire de celui-là.

points fixes situés en ligne droite ; par A, *on mène une transversale mobile qui coupe* Δ *en* P *et* Δ′ *en* Q ; *les droites* BQ *et* CP *se coupent en un point* I *dont le lieu géométrique est une droite passant par le point commun.*

Les droites CP et BQ coupent, respectivement, OB et OC aux points R et S. Le théorème de Ménélaüs donne successivement

$$\frac{MP}{OP} \cdot \frac{OQ}{NQ} = \frac{AM}{AN},$$
$$\frac{OP}{MP} \cdot \frac{RB}{RO} = \frac{CB}{CM},$$
$$\frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{SO}{SC} = \frac{BN}{BC}.$$

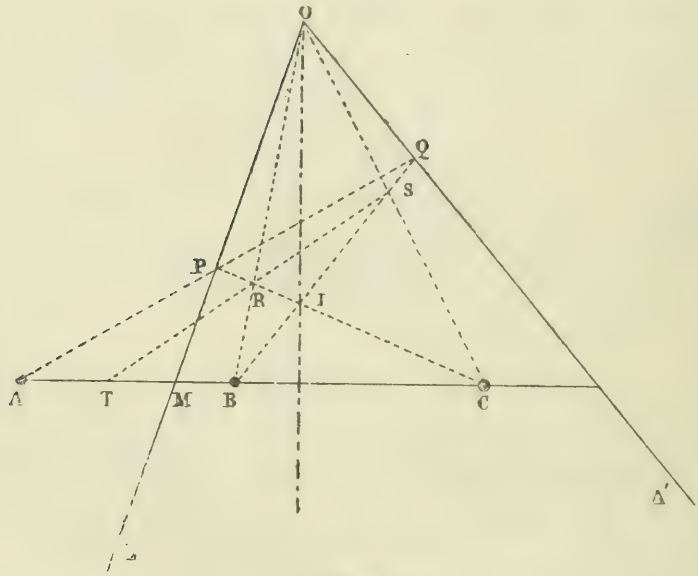


Fig. 12.

Multiplions ces égalités, membre à membre, et nous avons

$$\frac{RB}{RO} \cdot \frac{SO}{SC} = \frac{AM \,.\, BN}{CM \,.\, AN}.$$

(Voy. notre *Géométrie analytique*, p. 335). On doit d'ailleurs considérer le théorème de Mac-Laurin et de Braikenridge comme un cas particulier du théorème de Chasles, théorème relatif au lieu des points de concours des branches correspondantes de deux faisceaux homographiques. Mais le cas très simple que nous examinons ici suffit aux applications que nous avons en vue.

D'autre part, le théorème de Ménélaüs, appliqué de nouveau au triangle OBC et à la transversale TRS, donne encore

$$\frac{RB}{RO} \cdot \frac{SO}{SC} = \frac{TB}{TC}.$$

Ainsi,

$$\frac{TB}{TC} = \frac{AM \cdot BN}{CM \cdot AN}.$$

Cette égalité montre que le point T est fixe, quand on suppose que la transversale APQ est mobile autour de A; le lieu du point I est donc la polaire de T par rapport aux deux droites fixes OB, OC (*).

19. Théorème de Pappus. — *Sur les côtés d'un quadrilatère* ABCD *on prend deux points quelconques* P, Q; *ayant mené les droites* CP, AQ *d'une part*, DP, BQ *d'autre part, on obtient deux points* O′, O″ *qui sont en ligne droite avec le point de concours* O *des diagonales* AD, BC.

Cette remarquable propriété fait partie des trente-huit lemmes de Pappus qui ont permis de rétablir approximativement les trois livres des Porismes d'Euclide, aujourd'hui perdus (**).

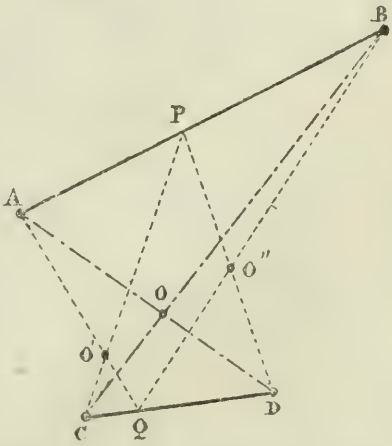


Fig. 13.

On peut la démontrer par des considérations diverses prenant pour base soit le théorème de Ménélaüs, soit les propriétés bien connues relativesaux transversales d'un faisceau de quatre droites concourantes. Ces démonstrations exigent toutes un certain effort; et on peut éviter celui-ci en observant, avec Chasles, que ce théorème de Pap-

(*) Cette proposition constitue un des porismes attribués à Euclide (V. Chasles, *les trois livres des Porismes d'Euclide*, p. 102).

(**) Voy. *Aperçu historique*, p. 12.

pus est un cas particulier du fameux hexagramme de Pascal.

Considérons en effet la figure APBCQD comme constituant un hexagone dont les six sommets appartiennent à deux droites; le théorème de Pascal nous apprend que les trois points O, O′, O″ sont en ligne droite. Ainsi, O′O″ passe constamment par le point O quand on suppose que P et Q se meuvent arbitrairement: le premiers ur AB, l'autre sur CD.

Théorème. — *On considère deux angles* P, Q, *dont les côtés se coupent deux à deux aux points* O′, O″, R — S; *si par les points* P, Q *on mène deux transversales* PAB, QCD, *les droites* BC *et* AD *concourent sur* O′O″.

Cette proposition est encore un porisme rétabli par Chasles (*), elle est une conséquence immédiate du lemme de Pappus. Si l'on considère en effet, comme l'indique la figure, AB et CD comme deux côtés opposés du quadrilatère brisé ABDC, P est un point de AB, Q un point de CD; et en appliquant à ces deux points le théorème précédent, on voit ainsi que les trois points O, O′, O″ sont en ligne droite.

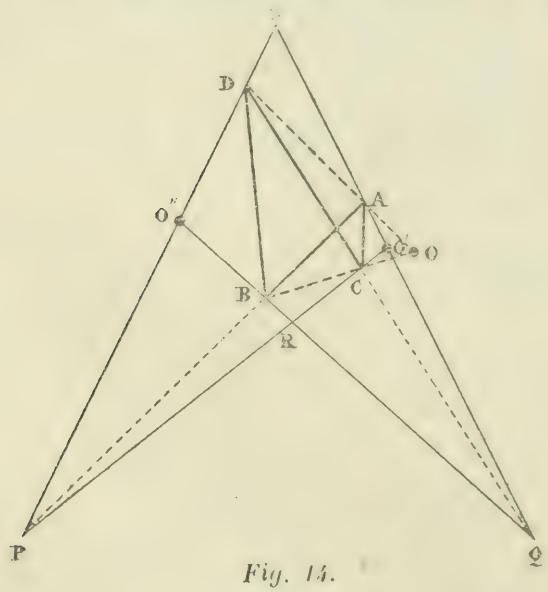


Fig. 14.

(A suivre.)

(*) Chasles, livre cité, p. 130 (*Porisme* XXIX).

QUESTIONS PROPOSÉES

171. — Trouver dans le plan d'un triangle un point P tel que les parallèles, menées de ce point aux trois côtés, déterminent sur ces côtés trois segments égaux entre eux.

Trouver dans le plan d'un triangle un point P_1 tel que les parallèles, menées de ce point aux trois côtés, et limitées à ces côtés, soient égales entre elles.

Démontrer que les deux points P, P_1 et le centre de gravité E du triangle sont en ligne droite, et que $P_1E = 2PE$.

(G. Boubals.)

172. — On considère un cercle Δ, et un diamètre AB de ce cercle. Soit M un point pris sur Δ; de M on abaisse une perpendiculaire MR sur AB.

Cela posé, soit H le milieu de MR; par H on mène une parallèle à AB qui rencontre Δ aux points P et Q. Les tangentes à Δ, aux points M, P, Q déterminent un triangle M'P'Q' (M' désignant le sommet qui correspond à la tangente en M; et ainsi des autres).

Démontrer que l'on a

$$M'P' + M'Q' = 2P'Q'. \qquad (G.\ L.)$$

173. — On considère deux droites rectangulaires Ox et Oy et sur Ox deux points fixes A et B.

D'un point C, mobile sur Oy, avec CO pour rayon, on décrit un cercle Δ et l'on mène à ce cercle, par les points A et B, deux tangentes qui se coupent en M.

Démontrer que si l'on projette le point A (ou le point B) sur CM, le lieu décrit par cette projection est un cercle passant par O; le centre de ce cercle est d'ailleurs situé au milieu de AB. *(G. L.)*

174. — Soit O un cercle; on considère, dans ce cercle, un diamètre fixe AB et le diamètre perpendiculaire Δ. Ayant pris un point M, mobile sur O, on joint MA et MB. MA ren-

contre A en C. Si par C on mène une parallèle à AB, elle rencontre MB en un certain point I.

Démontrer que le lieu décrit par I est une parabole. *(G.L.)*

175. — On considère un cercle Γ de centre O et deux diamètres rectangulaires Δ, Δ′; soit A l'une des extrémités de Δ. Autour de O on fait tourner un rayon OM et l'on projette en P, sur Δ′, l'extrémité M de ce rayon; AP rencontre OM en un point I.

Démontrer que le lieu de I est une parabole, ayant pour foyer le centre O et pour directrice la parallèle à Δ′ menée par A. *(G. L.)*

176. — On donne un cercle Γ et deux rayons rectangulaires OA, OB; soit M un point mobile sur Γ : MA rencontre OB en K; la perpendiculaire élevée au point K à la droite OB rencontre MB en un point I.

Démontrer que le lieu décrit par le point I est une droite. *(G. L.)*

177. — Soient A et B deux points fixes sur un cercle donné Γ de centre O; on prend sur Γ un point mobile M que l'on joint aux points A et B. La perpendiculaire abaissée du centre O sur MB rencontre les cordes MA, MB en deux points H et K; démontrer que le lieu décrit par le milieu de HK est une circonférence. *(G. L.)*

La notice biographique relative au regretté Directeur de ce journal, M. Vazeille, dont nous avons annoncé la mort dans le précédent numéro, paraît aujourd'hui dans le numéro de Mars du *Journal de Mathématiques spéciales*.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4866-5.

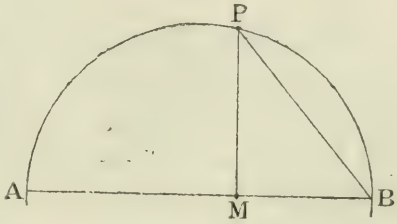
NOTE

SUR LA DIVISION D'UNE PORTION DE DROITE EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON

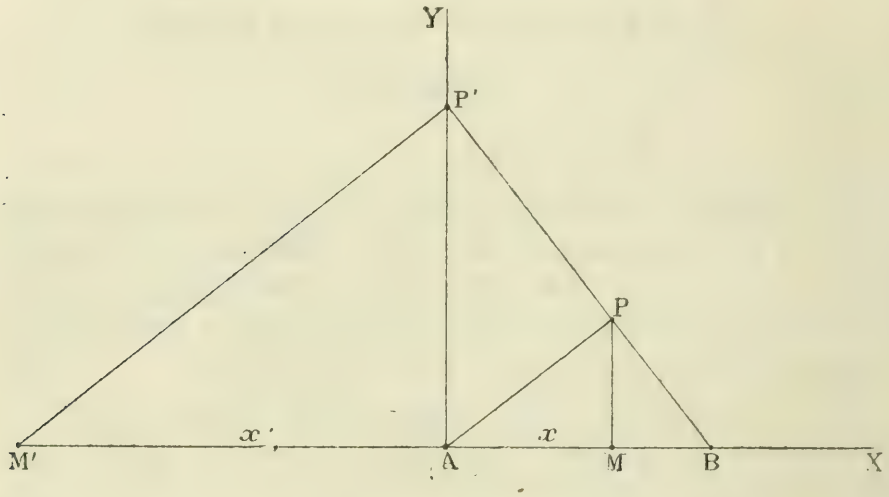
Par M. **E. Bloume**, professeur au Lycée de Grenoble.

Soit AB une portion de droite, il s'agit de déterminer un point M donnant deux segments MA. MB additifs (dont la somme est égale à AB), tels que le plus grand soit une moyenne proportionnelle entre le plus petit et la droite AB; c'est-à-dire tels que l'on ait $MA^2 = MB \times AB$.

Décrivons sur AB une demi-circonférence, élevons la perpendiculaire MP sur le diamètre. On aura $BP^2 = MB \,.\, AB$. Donc, si M est le point demandé on aura BP = AM. On déduit aisément de cette observation qu'il n'y a qu'un seul point sur AB jouissant de la propriété, car si l'on déplace une perpendiculaire au diamètre, de gauche à droite, on voit que AM croît de zéro à AB, et que BP décroît de AB à zéro. Il y a donc un point et un seul. Remarquons aussi que tout triangle rectangle semblable à ABP jouira de la propriété, BP = AM. Et réciproquement puisque, l'hypoténuse étant donnée, il n'y a qu'un seul triangle répondant à la propriété BP = AM. Au lieu d'admettre que le point M donnant la relation $MA^2 = MB \times AB$ soit sur la droite AB; nous pouvons le supposer sur le prolongement de M'; il n'y a plus réellement *division* de AB, néanmoins on convient de dire que M' *divise* AB en deux *segments soustractifs* [M'B — M'A = AB]



Si un tel point M′ existait; on aurait, en élevant la perpendiculaire AP′ et en formant le triangle rectangle BM′P′, $BP'^2 = M'B \times AB$ et $M'A^2 = M'B \times AB$, donc $BP' = M'A$. Par suite, la figure BP′M′ se déduirait de BPA en prolongeant BP jusqu'à la perpendiculaire AY. Ceci établit : 1° que M′ existe, 2° qu'il n'y a qu'un seul point sur le prolongement de BA, et aucun sur le prolongement de AB.



Cela posé, dans la figure (2) posons $M'A = BP' = x'$ $MA = BP = x$. Comme le triangle rectangle BP′A a l'angle P′ égale à l'angle A du triangle BAP, ils sont semblables, donc, on aura $PP' = AB$ [propriété des triangles semblables à BAP].

Comme $PP' = BP' - BP$, on a donc $x' - x = AB$.

En outre $BP \times BP' = AB^2$, donc $x' \times x = \overline{AB}^2$.

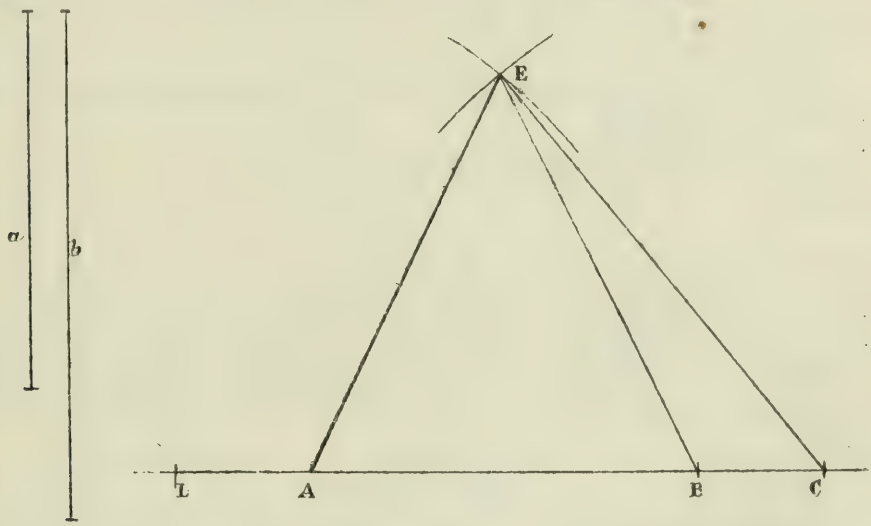
Ces deux propriétés ramènent la recherche de x et celle de x' au problème connu : *Construire deux longueurs connaissant leur différence et leur produit.*

CONSTRUCTION

D'UNE MOYENNE PROPORTIONNELLE

Par M. **Ed. Bordage,** professeur à Nantua.

Sur une droite indéfinie, on prend, à partir d'un point A, dans un certain sens, une longueur AB $= a$, et, dans le même sens, une longueur AC $= b$; puis, à partir du point B, mais en sens contraire, on porte une longueur BD $= b$. De C et D comme centres, avec b pour rayon, on décrit deux arcs de cercle qui se coupent en un point E; on joint AE : cette ligne est la moyenne proportionnelle cherchée.



En effet, joignons BE, CE. Les triangles ABE et AEC sont isoscèles ; ils sont, de plus, semblables, puisque l'angle à la base est commun.

Nous aurons donc la proportion :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AC}, \quad \text{ou} \quad \overline{AE}^2 = a.b.$$

Nota. — Cette construction, qui est probablement connue, nous paraît un peu plus simple que celles qui sont indiquées dans les ouvrages classiques de géométrie, parce qu'elle

n'exige pas la recherche du point milieu d'un segment de droite. Somme toute, le nombre des lignes tracées est moindre, dans la construction que nous communique M. Bordage, que dans celles que nous venons de rappeler. G. L.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié**, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

(*Suite*, voir p. 54.)

---

10. Théorème. — *Les points d'intersection des perpendiculaires abaissées des pieds de deux droites inverses sur les côtés adjacents sont sur deux droites inverses.*

Soit D l'intersection de LR et SN, F l'intersection de RT et SP. De l'égalité

$$AP \,.\, AL = AT \,.\, AN,$$

on tire

$$\frac{AL}{AT} = \frac{AN}{AP}.$$

Ce qui montre que les deux triangles ANL, ATP sont semblables, de même pour les triangles NFL, TDP : par suite les quadrilatères ANFL, ATDP sont semblables ; on en conclut :

$$\widehat{CAF} = \widehat{BAD},$$

égalité qui montre que AD et AF sont deux droites inverses.

11. Théorème. — *Le point de Lemoine est le centre de gravité du triangle formé en joignant les projections de ce point sur les trois côtés du triangle* (*).

Par le point K_a je mène K_aX parallèle à KK_b jusqu'à sa rencontre avec KK_c prolongée. Le triangle KK_aX ayant ses

---

(*) M. E. Lemoine, *Congrès de Lille*, 1874.
M. D'Ocagne, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1883 (p. 463). Exercice.

côtés respectivement perpendiculaires à ceux de ABC, on a :

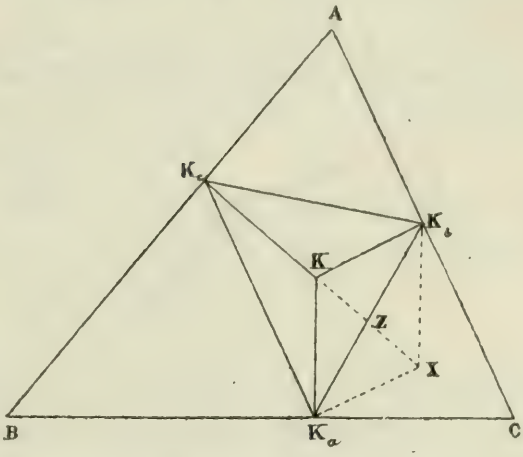
$$\frac{KK_a}{BC} = \frac{K_aX}{AC} = \frac{KX}{AB},$$

Mais

$$\frac{KK_a}{BC} = \frac{KK_b}{AC},$$

Donc :

$$KK_b = K_aX.$$



La figure KK_aK_bX est donc un parallélogramme et les diagonales K_aK_b, KX se coupent en leur milieu Z; donc K_cZ est une médiane du triangle $K_aK_bK_c$. On démontrerait de même que KK_a, KK_b sont des médianes, le point de Lemoine qui est leur point de concours K est bien le centre de gravité.

Remarque. — Cette propriété est connue parce que, ainsi que nous le verrons, le point de Lemoine coïncide avec le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés du triangle est minima.

12. Théorème. — *Le triangle formé en joignant les projections du point de Lemoine sur les trois côtés est le triangle inscrit dans le triangle* ABC *dont la somme des carrés est minima* (*).

La démonstration ayant été donnée par M. E. Lemoine dans ce *Journal* (*). je calculerai seulement la valeur du minimum.

13. Théorème. — *Le point de Lemoine est le point dont la somme des carrés des distances aux trois côtés est minima* (**).

(*) *Journal de Mathématiques Élémentaires* 1884 (p. 52).

(**) M. E. Lemoine, Lyon 1873. — M. D'Ocagne, *Applications (loc. cit.)*. Cette propriété a été rencontrée par Gauss dans la méthode des moindres carrés.

Soit K un point quelconque pris à l'intérieur du triangle ABC, K_a, K_b, K_c ses projections, il faut chercher le minimum de :

$$\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2$$

Sachant que :

$$BC \,.\, KK_a + AC \,.\, KK_b + AB \,.\, KK_c = 2S.$$

S étant la surface du triangle ABC.

Supposons que le point K soit assujetti à se mouvoir sur une parallèle à BC, on aura à chercher le minimum de

$$\overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2,$$

la quantité $AC \,.\, KK_b + AB \,.\, KK_c$ étant constante; mais, d'après un théorème connu, il a lieu quand

$$\frac{KK_b}{AC} = \frac{KK_c}{AB};$$

c'est-à-dire quand le point K se trouve sur la médiane antiparallèle issue de A. On prouverait de même qu'il se trouve sur les deux autres médianes antiparallèles, il se confond donc avec le point de Lemoine.

Soit enfin K un point tel que la somme des carrés de ses distances aux trois côtés soit minima; d'après un théorème connu sur le centre des moyennes distances, le minimum a lieu quand le point K se trouve au centre de gravité du triangle $K_aK_bK_c$, c'est-à-dire quand il se confond avec le point de Lemoine.

Calcul du minimum — on a :

$$\left(\frac{KK_a}{BC}\right)^2 = \left(\frac{KK_b}{AC}\right)^2 = \left(\frac{KK_c}{AB}\right)^2 = \frac{\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

puis :

$$\frac{KK_a}{BC} = \frac{\overline{KK_a}^2}{BC \,.\, KK_a} = \frac{\overline{KK_b}^2}{AC \,.\, KK_b} = \frac{\overline{KK_c}^2}{AB \,.\, KK_c}$$

$$= \frac{\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2}{2S},$$

ou

$$\left(\frac{KK_a}{BC}\right)^2 = \left(\frac{\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2}{2S}\right)^2.$$

Égalant les deux expressions de $\left(\frac{KK_a}{BC}\right)^2$ on tire :

$$\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2 = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Distances du point de Lemoine aux trois côtés du triangle ABC. — De l'égalité :

$$\frac{KK_a}{BC} = \frac{\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2}{2S}$$

on tire

$$KK_a = \frac{2aS}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad K_b K \frac{2bS}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$KK_c = \frac{2cS}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Surface du triangle $K_aK_bK_c$. — On a :

$$K_aK_bK_c = 3KK_aX.$$

Les triangles semblables ABC, KK_aX donnent :

$$\frac{S}{KK_aX} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2}$$

d'où

$$K_aK_bK_c = 3KK_aX \frac{3(\overline{KK_a}^2 + \overline{KK_b}^2 + \overline{KK_c}^2)S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

Somme des carrés des côtés du triangle $K_aK_bK_c$. — Soient l'_a, l'_b, l'_c les médianes du triangle $K_aK_bK_c$, on a :

$$\frac{4}{9}(\overline{l'_a}^2 + \overline{l'_b}^2 + \overline{l'_c}^2) = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

mais d'après un théorème connu :

$$\overline{l'_a}^2 + \overline{l'_b}^2 + \overline{l'_c}^2 = \frac{4}{3}\overline{K_aK_b}^2 + \overline{K_bK_c}^2 + \overline{K_cK_a}^2,$$

donc :

$$\overline{K_aK_b}^2 + \overline{KK_c}^2 + \overline{K_cK_a}^2 = \frac{12S^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 61.)

CHAPITRE III

LES PROBLÈMES FONDAMENTAUX

21. — Nous pouvons aborder maintenant la solution de certains problèmes qui intéressent tout particulièrement la géométrie de la Règle et de l'Équerre. Quelques-uns, parmi eux, sont très simples; nous passerons alors rapidement sur leur solution, en nous bornant à indiquer celle-ci; d'autres méritent de fixer un peu plus l'attention et nous les exposerons avec les détails nécessaires.

Les problèmes qui vont nous occuper rentrent nécessairement dans ceux qui sont dits *du premier degré* (*); nous ne pourrons, bien entendu, aborder ceux *du second degré* ou, plus généralement, *les problèmes quadratiques* (problèmes réductibles au second degré) puisque nous nous refusons l'usage du compas, instrument indispensable, du moins avec la restriction que nous allons faire connaître, à leur solution. A ce propos, nous ferons observer ici que certains problèmes du second degré, proposés dans la géométrie de la règle, n'ont été résolus, par les méthodes qu'elle peut présenter, que grâce à un point d'appui dont l'usage dénature complètement l'esprit et le but de cette science; et c'est ce que Poncelet a nettement établi, en montrant « qu'un seul cercle, décrit

(*) Cremona, *Géométrie projective*, p. 180.

une fois pour toutes, pouvait servir à résoudre tous les problemes du second degré (*) ».

A cette idée correspond, au point de vue du dessin, une géométrie particulière (**) que nous n'avons pas à envisager ici, géométrie fort curieuse d'ailleurs, et dans laquelle on se propose la solution des problèmes quadratiques, en s'accordant seulement la présence d'un cercle dans le plan du dessin (***).

22. — C'est encore une idée de ce genre, qui préside à la solution de certains problèmes de la géométrie de la règle, problèmes dans lesquels on se propose de mener des parallèles avec la règle seule et sans le secours de l'équerre ou, ce qui revient au même, de la fausse équerre.

Parmi les questions qui rentrent dans cette dernière catégorie nous indiquerons le problème suivant qui a été traité par LAMBERT (****) : *par un point donné dans le plan d'un*

(*) *Idem*, p. 182.

(**) Steiner a développé cette géométrie dans un livre ayant pour titre : *Die geometrischen Konstructionen ausgeführt mittelst der geraden Linien und eines festen Kreises* (Berlin, 1833).

(***) Nous citerons, à l'appui de ce que nous avançons ici, le problème proposé dans les *Annales* de GERGONNE (t. I, p. 259) dans les termes suivants : *Trois droites indéfinies étant données de position par rapport à une courbe quelconque du second degré, et dans un même plan avec elle; on propose de construire,* EN N'EMPLOYANT QUE LA RÈGLE SEULEMENT, *un triangle dont les trois côtés soient des tangentes à la courbe et dont les sommets se trouvent sur trois droites données.*

Ce problème a été résolu par SERVOIS (*loc. cit.*, p. 337) et par Rochat (*loc. cit.*, p. 342). Il paraît soluble par l'emploi de la règle *parce qu'une conique est tracée dans le plan du dessin*, mais c'est vraiment un problème du second degré et la règle seule ne peut suffire à la solution des problèmes de cette espèce. Dans le cas présent, si l'on se reporte aux solutions données par Servois et Rochat, on reconnaît précisément qu'elles exigent, à un certain moment, la connaissance des points communs à la conique donnée et à une certaine droite que l'on a construite. Ces points se déterminent *si la conique est tracée;* dans le cas contraire, il faut avoir recours à la construction des points doubles de deux divisions homographiques; or, celle-ci exige l'emploi du compas.

Enfin, pour résumer en quelques mots toute notre pensée sur ce point, il est aussi impossible de traiter les problèmes du second degré par la règle, que de résoudre ceux du troisième degré avec le compas.

(****) Lambert, *Freie Perspective*, t. II, p. 169 (Zurich, 174). — Voyez aussi Crémona, *loc. cit.*, p. 80.

parallélogramme mener, au moyen de la règle seule, la parallèle à une droite située dans le même plan. On voit de suite quel est le point d'appui de la construction proposée; celle-ci ne devient possible avec la règle seule (j'entends la règle dans le sens ordinaire du mot; non pas la règle plate, bien entendu, mais, si l'on peut dire, *la règle à une dimension*) que grâce à la présence du parallélogramme qu'on suppose tracé dans le plan du dessin.

Si l'on accorde la règle plate, le problème qui consiste à *mener, par un point donné, une parallèle à une droite également donnée* se résout sans qu'il soit nécessaire de connaître un parallélogramme dans le plan du dessin; la règle plate permettant de tracer des parallèles équidistantes et, par suite, des losanges.

23. — Voici d'ailleurs, pour marquer par un exemple toute l'utilité de la largeur donnée à la règle plate, comment le problème précédent a été résolu par le général de Coatpont (*).

Soit Δ la droite proposée; par le point donné A, on propose de mener une parallèle à cette droite. On place la règle dans la position 1, de façon que l'un de ses bords passe par A; on marque les points B et B′, puis on fait occuper à la règle les positions successives 2, 3, 4, en traçant successivement les droites α, β, γ. La droite AD obtenue, comme le montre la figure, est la parallèle cherchée.

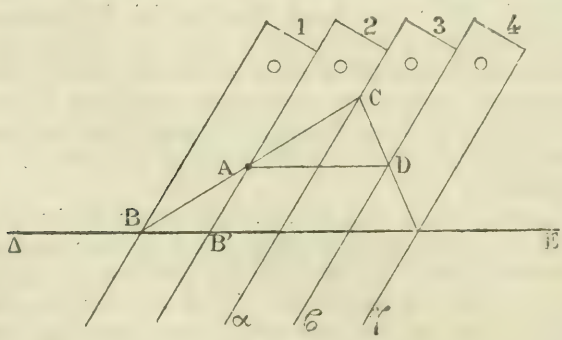


Fig. 15.

24. — Nous allons maintenant quitter ces généralités; mais il nous a paru nécessaire, avant de nous engager plus

(*) *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. III. 1877, p. 205).

profondément dans notre sujet, de bien définir les limites que nous lui avons tracées, et que les développements qui précèdent mettent, croyons-nous, suffisamment en lumière.

Et, pour nous résumer ici, il est donc bien entendu que la géométrie pratique que nous écrivons vise uniquement les problèmes du premier degré, pour la solution desquels elle adopte la *règle ordinaire*, la *règle plate*, l'*équerre* et la *fausse équerre*. Dans les opérations faites sur le terrain, opérations qui seront développées dans la seconde partie de ce livre, nous nous accorderons aussi le *cordeau*. Une simple ficelle, comme dirait Servois, fait tout cet instrument; mais nous montrerons alors le parti qu'on en peut tirer.

Ceci dit, nous abordons l'exposition de quelques problèmes qui sont d'un constant usage, et que, pour ce motif, nous appelons problèmes fondamentaux. Pour quelques-uns d'entre eux, nous ne ferons usage que de la règle seule; pour d'autres, nous utiliserons la règle et l'équerre; mais, dans tous les cas, nous nous interdisons formellement l'emploi du compas. Enfin, pour éviter toute confusion, nous aurons soin de spécifier toujours la règle plate, quand nous nous en servirons; sinon, le mot « règle » désignera l'instrument dans son sens ordinaire.

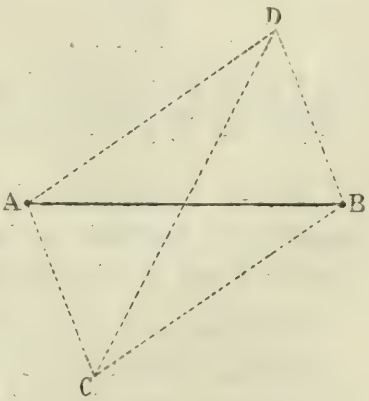


Fig. 16.

25. — Problème I. *Partager un segment* AB *en deux parties égales*,

Avec la règle et l'équerre on trace des parallèles qui forment un parallélogramme, dans lequel AB est une diagonale. La droite CD passe par le milieu de AB.

26. — Problème II. *Étant donné un segment* AB, *sur une droite indéfinie* Δ, *porter ce segment sur* Δ, *à partir d'un certain point* O, *donné sur* Δ.

On trace, d'abord, une droite Δ′ parallèle à Δ, puis on

forme successivement les parallélogrammes ABCD, CDOM. Il résulte de cette construction que OM = AB.

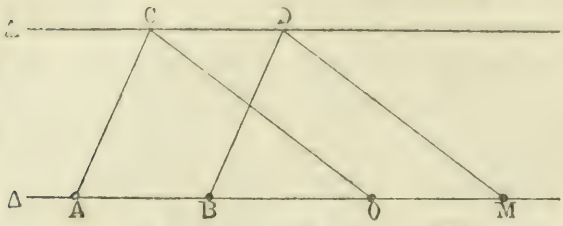


Fig. 17.

On peut donc, avec la règle et l'équerre, porter des longueurs déterminées, sur la droite qui les contient, ou sur des parallèles à cette direction, à partir d'un point donné.

27. — Problème III. *Prendre le symétrique d'un point* A, *par rapport à un autre point* B.

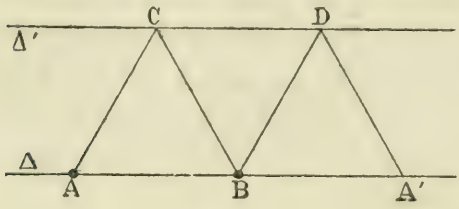


Fig. 18.

Ce problème peut, manifestement, être considéré comme un cas particulier du précédent. Il suffit d'appliquer la construction que nous avons indiquée tout à l'heure, comme le montre la figure ci-contre. Le point A', ainsi obtenu, est le symétrique de A, par rapport à B.

28. — Problème IV. *Porter une longueur donnée* AB, *sur une droite indéfinie* Δ, *inclinée de 60° sur la direction de* AB, *à partir d'une origine donnée* O.

Projetons, avec l'équerre, les points A et B, sur Δ; puis, prenons, comme nous venons de le montrer au paragraphe précédent, le point A″ symétrique de A', par rapport à B. Nous avons évidemment A'A″ = AB et, pour achever la construction proposée, il suffira de porter A'A″, à partir de l'origine O, comme nous l'avons indiqué plus haut (§ 26).

C'est ici le lieu de faire observer que la règle, dans le sens ordinaire de ce mot, ne suffit pas, comme nous l'avons fait observer dans la préface de ce livre, pour résoudre, dans le cas général, le problème que nous venons de traiter dans deux cas particuliers. Nous allons d'ailleurs nous occuper,

dans le paragraphe suivant, du cas général; mais en

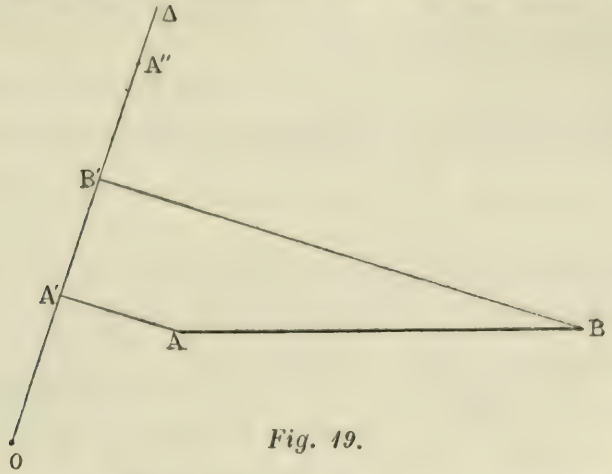


Fig. 19.

prenant la règle dans le sens que lui a donné le général de Coatpont, et que nous avons fait connaître.

29. — Problème V. *Porter un segment* AB, *sur une droite donnée* Δ.

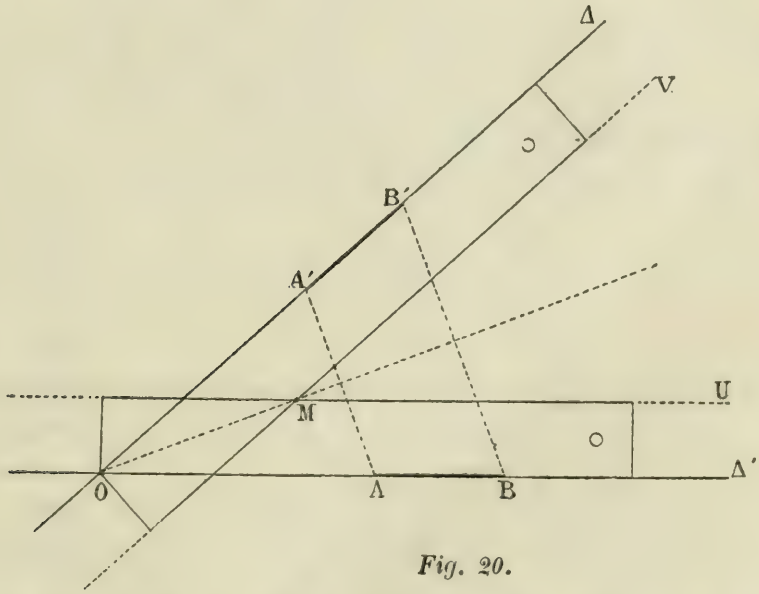


Fig. 20.

Si nous disposons la règle plate, à bords parallèles, successivement, comme l'indique la figure, la droite OM est visiblement la bissectrice de l'angle formé par AB avec une des directions de Δ. Après avoir tracé les droites U et V,

puis OM, si nous abaissons sur celle-ci des perpendiculaires AA′, BB′, nous obtenons, sur Δ, deux points A′ et B′. La longueur A′B′ est égale à AB.

Si l'on veut porter AB à partir d'une origine donnée sur Δ on aura recours à la construction indiquée plus haut (§ 26).

30. — Problème VI. *Tracer la bissectrice de deux directions données.*

Si l'on veut obtenir, avec la règle plate, la bissectrice des semi-droites OΔ, OΔ′ on placera cette règle, successivement, dans les deux positions indiquées par la figure ci-dessus; la droite OM, comme nous l'avons déjà remarqué, est la bissectrice cherchée.

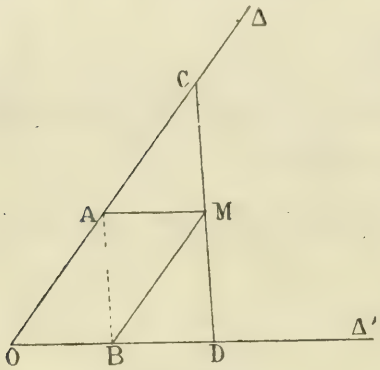


Fig. 21.

31. — Problème VII. *Par un point donné* M, *mener une droite qui soit partagée en deux parties égales par ce point et par deux droites données* Δ, Δ′.

On mène par M *(fig. 21)* des parallèles MA, MB aux droites Δ, Δ′; la droite cherchée CD est la parallèle à AB, tracée par M.

32. — Problème VIII. *Étant données deux parallèles* Δ, Δ′, *mener, par un point donné* P, *avec la règle seule, une parallèle à ces droites.*

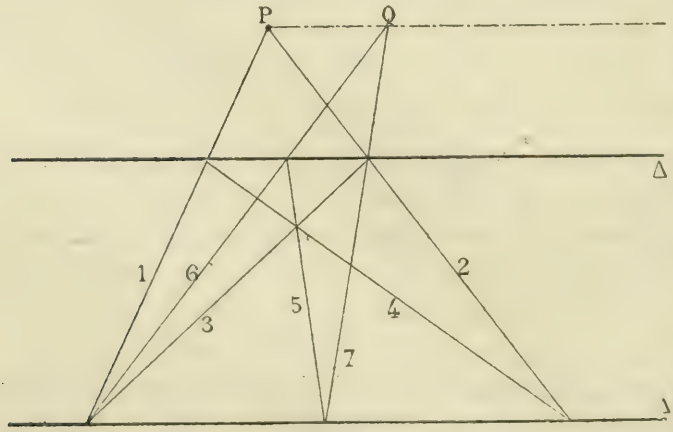


Fig. 22.

Ayant tracé, dans l'ordre indiqué par les chiffres placés sur la figure, les droites 1, 2,.. 7; on déduit par cette construction, du point P, le point

Q. La droite PQ, pour des raisons connues, ou faciles à trouver, est parallèle à Δ et à Δ'.

Ce problème est d'ailleurs un cas particulier du suivant, également bien connu.

33. — Problème IX. *Joindre un point donné au point commun à deux droites tracées, ce point de concours étant inaccessible, en ne se servant que de la règle.*

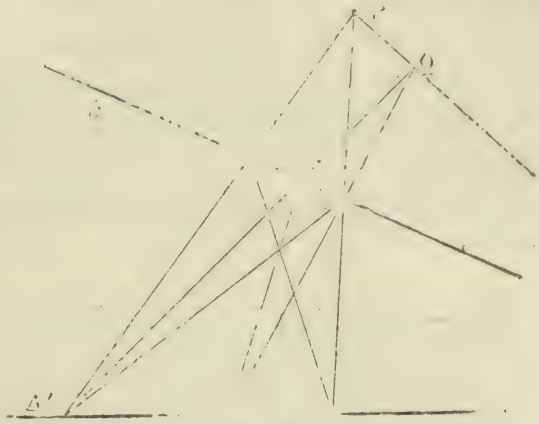


Fig. 23.

Ce problème se résout, avec la règle seulement, par une construction identique à celle que nous avons indiquée au paragraphe précédent et que la figure ci-contre rend suffisamment explicite.

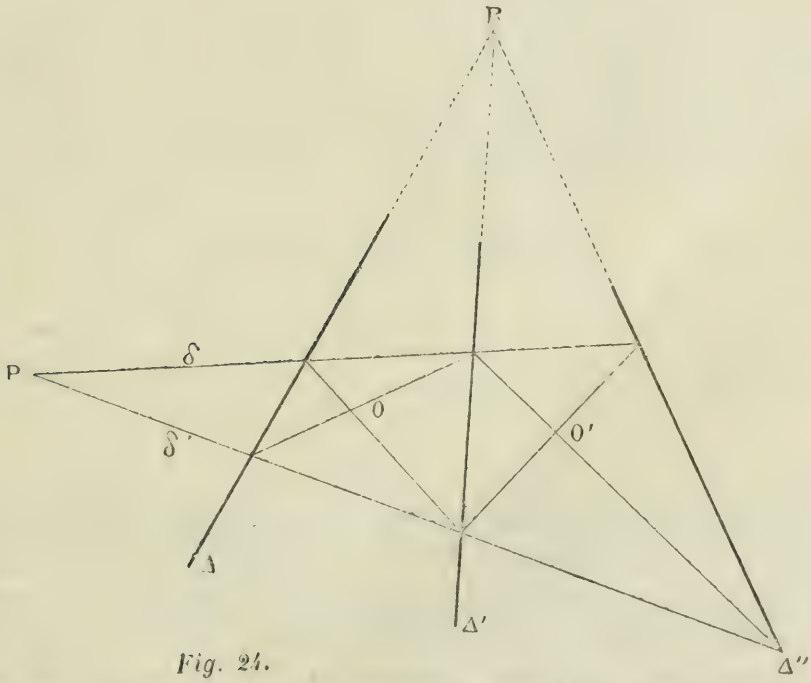


Fig. 24.

34. — Problème X. *Trois droites Δ, Δ', Δ'', étant tracées sur*

un dessin, mais leur rencontre ayant lieu en dehors des limites de l'épure, vérifier avec la règle seule qu'elles sont concourantes.

Ayant pris un point P, arbitrairement d'ailleurs, mais dans les limites de l'épure, on trace par P deux transversales quelconques δ, δ' et l'on achève la construction indiquée par la figure. En supposant que Δ, Δ', Δ'' soient concourantes, on sait que OO′ représente la polaire du point commun R, par rapport au couple δ, δ' ; d'aillenrs cette polaire doit passer par P. Ainsi, les trois points O, O′, P sont en ligne droite, si Δ, Δ' et Δ'' sont concourantes. La réciproque est vraie.

35. — Problème XI. *Étant donnés trois points en ligne droite* O, ω, O′ ; *trouver, avec la règle seule, le point* ω', *conjugué harmonique de* ω, *par rapport au segment* OO′.

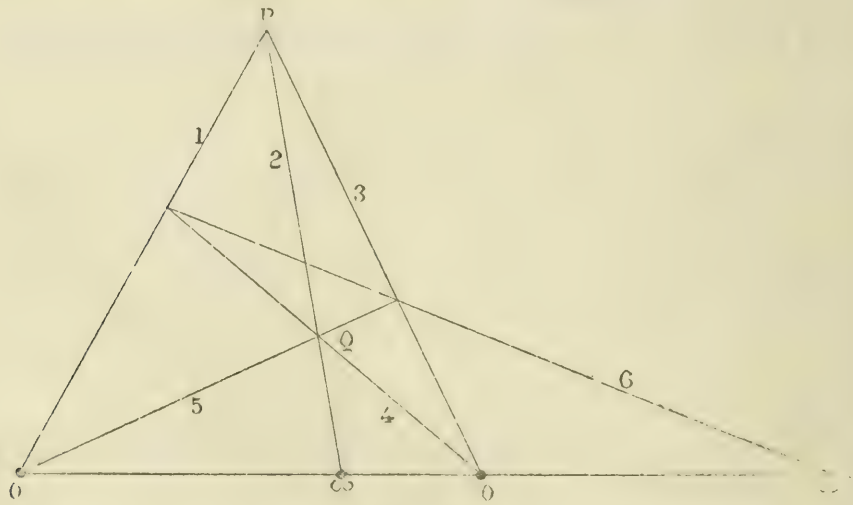


Fig. 25.

On trace d'abord les droites 1, 2, 3, en joignant avec la règle un point arbitraire P aux trois points donnés O, ω, O′; on prend ensuite Q, arbitrairement d'ailleurs, sur ω P ; enfin, on achève la construction par le tracé des lignes 4, 5, 6. Le théorème relatif aux diagonales d'un quadrilatère complet indique que ω' est le point demandé.

Cette construction bien connue, pour trouver le quatrième élément d'un groupe harmonique, paraît avoir été imaginée par De la Hire (*). Le problème I, traité plus haut, peut être considéré comme un cas particulier de celui-ci, en supposant que ω est le point situé à l'infini sur OO'.

36. — Problème XII. *Étant données trois droites*, PO, Pω, PO'; *trouver la droite* Pω', *rayon conjugué harmonique de* Pω *par rapport au couple* PO, PO'.

Ce problème est analogue au précédent; et, comme celui-ci, sa solution n'exige que l'usage de la règle.

37. — Problème XIII. *Étant donnés quatre points* a, b, c, d *d'une part sur une droite* Δ; *et trois autres points* a', b', c' *sur une droite* Δ', *trouver un point* d' *sur* Δ' *tel que le rapport anharmonique* (a, b, c, d) *soit égal au rapport anharmonique* (a', b', c', d').

Ce problème bien connu se résout, comme l'on sait, en joignant $a'd$ et en faisant sur cette droite, en a', α, β, d, la perspective du groupe a, b, c, d; puis, avec un nouveau point de vue, placé à l'intersection des droites $\alpha b'$, $\beta c'$, la perspective du groupe a', α, β, d, sur Δ' en a', b', c', d'.

On a

$$(a, b, c, d) = (a', \alpha, \beta, d),$$

et

$$(a', \alpha, \beta, d) = (a', b', c', d');$$

par suite,

$$(a, b, c, d) = (a', b', c', d').$$

38. — Problème XIV. *Prendre le symétrique d'un point donné* O, *par rapport à une droite* Δ, *également donnée de position.*

On trace d'abord le parallélogramme OABC; ayant mené

(*) De la Hire, *Sectiones Conicæ* (Parisiis, 1685), I, 10. — Voyez aussi Cremona, *loc. cit.*, p. 40.

Δ' parallèle à Δ, puis Δ'' perpendiculaire à Δ, le point O′ situé à l'intersection de Δ' et de Δ'' est le point cherché.

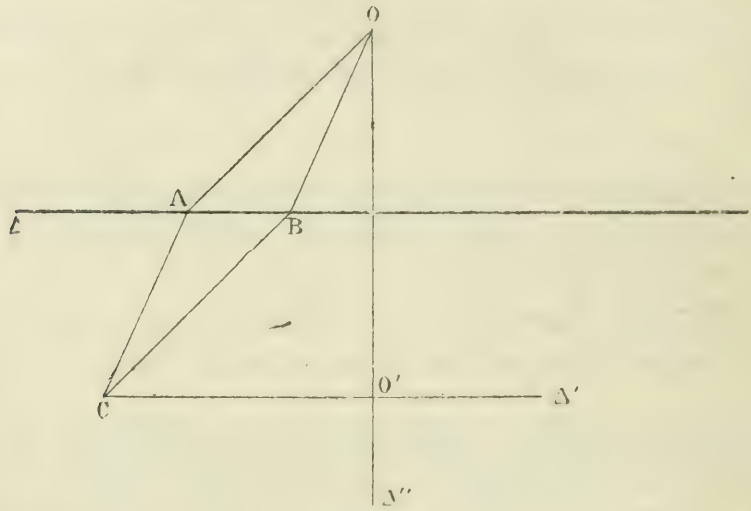


Fig. 26.

Cette solution exige, bien entendu, l'emploi de la règle et de l'équerre.

39. — Problème XV. *Construire le sixième point d'une involution, connaissant cinq points de cette involution.*

On sait que c'est à Desargues que l'on doit attribuer l'idée première de l'involution. Lorsque six points sont en ligne droite, ils ne constituent pas, en général une ponctuelle en involution, et, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que la ponctuelle considérée puisse se séparer en deux groupes $(a, b, c; a', b', c')$, de telle façon que les cercles décrits sur aa', bb', cc', comme diamètres aient le même axe radical.

Le théorème de Desargues, pris dans son interprétation la plus générale, peut être exprimé dans la forme suivante : *Trois coniques ayant les mêmes points communs déterminent sur une transversale quelconque six points en involution.*

En appliquant cette propriété aux trois coniques aplaties qui passent par quatre points donnés, on obtient un corollaire du théorème précédent. Ce corollaire, visant le quadrilatère complet et ses diagonales, peut se démontrer directement :

il permet évidemment, avec la règle pour tout instrument, de construire le sixième point d'une involution. Cette remarque a d'ailleurs été faite depuis longtemps (*).

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Géométrie descriptive pour l'Enseignement secondaire spécial, conforme au programme du 28 juillet 1882, par M. Ernest Lebon, agrégé de l'Université ; professeur de mathématiques au lycée Charlemagne (**).

Nous sommes heureux de signaler la publication de ces deux nouvelles éditions d'un ouvrage dont le succès est assuré. L'auteur, qui, par un langage sobre et précis, avait déjà facilité le travail de l'élève vient de le simplifier encore par la disposition typographique. D'après cette disposition les figures sont en regard du texte et quelques-unes ont même été répétées pour augmenter la commodité.

Plus de deux cents problèmes gradués à résoudre, dont la plupart sont des épures numériques, permettent à l'élève d'appliquer les théories qu'il vient d'apprendre et de s'habituer à exécuter des épures entrant dans un cadre donné. Ce choix d'exercices, dont le fond est pris dans les éditions précédentes, allège la tâche du professeur en lui évitant les tâtonnements inséparables de la rédaction d'une épure et l'ennui de rechercher, pour chaque nouvelle question, une application immédiate.

Cet ouvrage peut être regardé comme un résumé du Traité de Géométrie Descriptive pour l'enseignement secondaire classique (***). A cet égard nous pensons qu'il convient

---

(*) *Annales de Gergonne* : t. XVII, p. 185. (Sturm ; *Théorie des lignes du second ordre).*

(**) Delalain, éditeurs. *Cours de 3e année* (4e édition). Prix : 3 francs. — *Cours de 4e et 5e années* (2e édition). Prix 4 fr. 50.

(***) Delalain, éditeurs. *Premier volume* : Mathématiques élémentaires, prix 5 francs. — *Second volume :* Mathématiques spéciales, prix 12 francs. — *Supplément au premier volume :* préparation à l'École de Saint-Cyr, prix 3 fr. 50.

parfaitement aux candidats au baccalauréat ès sciences qui ne préparent pas l'examen d'admission à l'École Polytechnique, ainsi qu'aux candidats à l'École Navale.

N. Lesage,
Professeur au Lycée Charlemagne.

QUESTION 94

Solution par M. l'abbé H. Ropert, Professeur au Petit Séminaire de Guérande.

Soit un triangle ABC *: désignons par* A′, B′, C′ *les points de contact du cercle inscrit* Δ *avec les côtés de ce triangle. On sait que les droites* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes. Soit* ω *le point de concours : prenons ce que nous nommons le point* ω′ *réciproque de* ω. *(Ce point est défini de la manière suivante : on prend* A″ *symétrique de* A′ *par rapport au milieu de* BC *; de même pour* B″ *et* C″ *;* ω′ *est le point de concours de* AA″, BB″, CC″*). On propose de démontrer que le point* ω′, *le centre de gravité* G *du triangle* ABC, *et le centre* O *de* Δ, *sont trois points en ligne droite. On demande la valeur du rapport* $\frac{G\omega'}{GO}$. (G. L.)

Cherchons la distance de ω′ au côté BC. Le triangle ABA″, coupé par la transversale Cω′C″ donne

$$\frac{CA''}{CB} \cdot \frac{C''B}{C''A} \cdot \frac{\omega'A}{\omega'A''} = 1.$$

On en déduit :

$$\frac{A\omega'}{A''\omega'} = \frac{BC \,.\, AC''}{CA'' \,.\, BC''} = \frac{a(p-b)}{(p-b)(p-a)} = \frac{a}{p-a}.$$

Désignons par δ_a la distance cherchée et par h_a la hauteur correspondante au côté BC : on aura

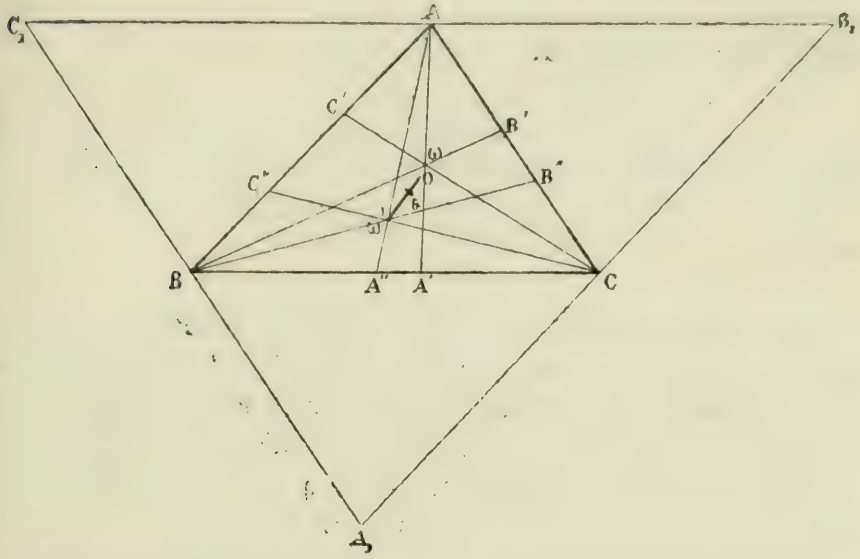
$$\frac{\delta_a}{h_a} = \frac{A''\omega'}{A'A''} = \frac{A''\omega'}{A''\omega' + A\omega'} = \frac{p-a}{(p-a)+a} = \frac{p-a}{p} = 1 - \frac{a}{p},$$

$$\delta_a = h_a - \frac{ah_a}{p} = h_a - \frac{2S}{p} = h_a - 2r;$$

en représentant par r le rayon du cercle Δ.

On aurait, de la même manière, pour les distances de ω' aux deux autres côtés du triangle :

$$\delta_b = h_b - 2r,$$
$$\delta_c = h^c - 2r.$$



Il résulte de là que le point ω' est à la même distance $2r$, des parallèles menées aux côtés du triangle ABC par ses sommets: c'est donc le centre du cercle inscrit au triangle $A_1B_1C_1$ formé par ces parallèles. Mais les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont inversement homothétiques; le centre d'homothétie étant le point G centre de gravité commun aux deux triangles, et le rapport d'homothétie étant 2. Donc les deux points homologues O et ω forment avec le point G une seule et même ligne droite. De plus $\frac{G\omega'}{GO} = 2$.

Remarque. — La question précédente peut être généralisée. En effet, on démontre facilement au moyen du théorème des transversales que les douze lignes qui joignent les sommets du triangle ABC aux douze points de contact du cercle inscrit et des trois cercles ex-inscrits, concourent, trois par trois, en huit points. Le point ω' étudié ci-dessus est évidemment l'un de ces points. Trois autres de ces points que je désignerai par ω_a, ω_b, ω_c, sont situés aux distances respectives $2r_a$, $2r_b$, $2r_c$ des côtés du triangle $A_1B_1C_1$, en sorte que ces points sont

les centres des cercles ex-inscrits de ce triangle $A_1B_1C_1$. Des calculs aussi simples que ceux que nous venons de présenter conduisent à ces différents résultats.

Un raisonnement semblable au précédent montrerait aussi que les points ω_a et O_a, ω_b et O_b, ω_c et O_c sont en ligne droite avec le point G, et que

$$\frac{G\omega_a}{GO_a} = \frac{G\omega_b}{GO_b} = \frac{G\omega_c}{GO_c} = \frac{G\omega'}{GO} = 2.$$

Évidemment, je représente par O_a, O_b, O_b, les centres des cercles ex-inscrits au triangle ABC, et par r_a, r_b, r_c leurs rayons.

Note. — L'observation qui termine la solution qu'on vient de lire n'est pas, il nous semble, une *généralisation* de la question proposée ; elle constitue plutôt une *extension* de celle-ci aux cercles ex-inscrits, et cette sorte d'extension s'applique manifestement à toutes les questions qui concernent le cercle inscrit à un triangle, avec les modifications convenables.

Mais il existe, de cette question que nous avons empruntée à notre mémoire sur la transformation par points réciproques (*Annales de l'École Normale*, 1867), une véritable généralisation. Cette intéressante généralisation que nous a signalée M. Chapron est la suivante :

Dans un polygone circonscriptible à un cercle, le centre de gravité G *du périmètre, le centre de gravité* G *de la surface et le centre* O *de la circonférence inscrite sont en ligne droite; de plus le rapport des longueurs* Gg *et* OG, *est égal à* $\frac{1}{2}$.

Cette question a été proposée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Vuibert et elle a été résolue, très élégamment, par M. Bousquet (*loc. cit.*, 1879-80, p. 86), en employant la méthode statique de Jean de Ceva.

M. Brocard nous fait aussi observer, avec raison, que la solution de la question 94 est renfermée dans la note IV de son étude relative à l'Hyperbole des neuf points (*Journal de math. spéc.* 1884, p. 207). Le point réciproque de celui qu'on obtient en joignant les sommets du triangle aux points de contact du cercle inscrit, d'après M. Brocard (*loc. cit.*),

paraît avoir été signalé et étudié particulièrement par Hocheim (*Archives de Grunert*, t. III, 1871); de là, le nom de point d'Hocheim qu'on lui a quelquefois donné.

G. L.

Nota. — Autres solutions par MM. Alfred Fitz-Patrick, élève de troisième année à l'enseignement spécial, Lycée d'Angoulême; Vigarié, élève au lycée Saint-Louis, classe de M. Vintejoux; Chapron, à Bragelogne.

QUESTIONS PROPOSÉES

178. — Démontrer que si d est la distance du centre du cercle circonscrit au triangle ABC, au point de concours des droites qui joignent les sommets aux points de contact des cercles exinscrits, et si R et r sont les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit on a :

$$\frac{d}{2} = R - r. \qquad \textit{(S. Boubals.)}$$

179. — Sur une droite fixe OX, on porte trois longueurs OA′, OB′, OC′, proportionnelles aux carrés des côtés d'un triangle; puis on forme les angles XA′M, XB′N, XC′P, respectivement égaux aux angles opposés, dans le même triangle.

Démontrer :

1° Que les trois droites A′M, B′N, C′P se rencontrent en un même point T;

2° Que les longueurs A′T, B′T, C′T sont proportionnelles aux rectangles bc, ca, ab des côtés;

3° Que la perpendiculaire TQ abaissée sur OX est d'une longueur proportionnelle au double de l'aire du triangle;

4° Que OQ est proportionnelle à $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$;

5° Que OT est proportionnelle à $\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$;

6° Que l'angle XOT $= \theta$ est égal à l'angle de Brocard c'est-à-dire déterminé par la relation :

$$\operatorname{cotg} \theta = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C. \qquad \textit{(Laisant.)}$$

180. — Sur une droite fixe OX, on porte trois longueurs OA′, OB′, OC′ égales aux côtés d'un triangle; puis on forme les angles XA′M, XB′N, XC′P, respectivement égaux aux moitiés des angles opposés dans le même triangle.

Démontrer :

1° Que les trois droites A′M, B′N, C′P se rencontrent en un même point T;

2° Que les longueurs A′T, B′T, C′T sont égales aux distances des sommets des triangles au centre du cercle inscrit;

3° Que la perpendiculaire TQ abaissée sur OX est égale au rayon du cercle inscrit;

4° Que OQ est égale au demi-périmètre;

5° Que l'angle XOT $= \varphi$ est déterminée par la relation :

$$\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$ *(Laisant.)*

181. — Résoudre les équations

$$x^2 - yz = a^2,$$
$$y^2 - xz = b^2,$$
$$z^2 - xy = c^2;$$

en déduisant de celles-ci deux équations du premier degré.

(Educational Times.)

Nota. — L'abondance des matières nous force à remettre au prochain numéro, la suite de l'article de M. Ferrent sur l'analyse indéterminée.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 6832-5.

ÉTUDE ELÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE
DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 49.)

62. — Mais, dans le cas où $b^2 - 4ac = 0$, il est inutile de réduire l'équation générale.

Nous pouvons, en effet, résoudre cette équation par une méthode que nous croyons nouvelle, et qui donne les valeurs des inconnues, sous forme algébrique, en supposant connue une première solution.

Dans cette résolution nous mettons en évidence deux points principaux :

1° *Quand l'équation admet une solution, elle en admet une infinité;*

2° *La connaissance d'une seule solution suffit toujours pour amener la connaissance de toutes les autres.*

Nous ne pouvons pas supposer que les deux carrés manquent à la fois dans l'équation générale; car, s'il en était ainsi, à cause de la relation $b^2 - 4ac = 0$, b serait également nul, et l'équation se réduirait au premier degré. Nous pouvons donc supposer le coefficient, a, de y^2 différent de zéro.

Les coefficients étant entiers, il résulte de la relation $b^2 - 4ac = 0$ que b est pair; posons donc $b = 2b'$, et cette relation devient

$$b'^2 - ac = 0 \qquad (140)$$

et l'équation générale sera

$$ay^2 + 2b'xy + cx^2 + dy + fx + g = 0. \qquad (141)$$

Multiplions tous les termes par a, qui n'est pas nul, et remplaçons ac par b'^2, pour éliminer c :

$$a^2y^2 + 2ab'xy + b'^2x^2 + ady + afx + ag = 0; \qquad (142)$$

y' et x' étant une première solution, on aura

$$a^2y'^2 + 2ab'x'y' + b'^2x'^2 + ady' + afx' + ag = 0;$$

d'où

$$a^2(y^2 - y'^2) + 2ab'(xy - x'y') + b'^2(x^2 - x'^2)$$
$$+ ad(y - y') + af(x - x') = 0$$

et, comme

$$2(xy - x'y') = (x + x')(y - y') + (x - x')(y + y'), \quad (143)$$

il vient (*)

$$[a^2(y + y') + ab'(x + x') + ad](y - y')$$
$$= -[b'^2(x + x') + ab'(y + y') + af](x - x')$$

ou, en supprimant le facteur commun a,

$$[a(y + y') + b'(x + x') + d](y - y')$$
$$= -\left[\frac{b'^2}{a}(x + x') + b'(y + y') + f\right](x - x'), \quad (144)$$

$x - x'$ doit diviser le premier membre ; mais nous ne pouvons pas supposer que ce binôme divise l'un ou l'autre des facteurs qui le composent.

Pour laisser à l'équation toute sa généralité, nous devons supposer le binôme $x - x'$ égal au produit rr' de deux facteurs, dont chacun divise l'un des facteurs du premier membre; $-\left[\frac{b'^2}{a}(x + x') + b'(y + y') + f\right]$ devra aussi être le produit ss' de deux facteurs, dont chacun sera égal au quotient d'un des facteurs du premier membre par r ou r'. Nous aurons ainsi les équations :

$$x - x' = rr', \quad (145)$$

$$-\left[\frac{b'^2}{a}(x + x') + b'(y + y') + f\right] = ss', \quad (146)$$

$$y - y' = rs, \quad (147)$$

$$a(y + y') + b'(x + x') + d = r's'. \quad (148)$$

Éliminons y et x :

$$\left.\begin{aligned} -\left[\frac{b'^2}{a}(2x' + rr') + b'(2y' + rs) + f\right] &= ss' \\ a(2y' + rs) + b'(2x' + rr') + d &= r's' \end{aligned}\right\}. \quad (149)$$

(*) Nous aurions pu opérer autrement la transformation qui nous a conduit à l'équation (144).

Les trois premiers termes de (142) et de l'égalité suivante formant le carré d'un binôme, nous aurions pu écrire ces deux relations :

$$(ay + b'x)^2 + ady + afx + ag = 0$$

et

$$(ay' + b'x')^2 + ady' + afx' + ag = 0;$$

d'où

$$(ay + b'x)^2 - (ay' + b'x')^2 + ad(y - y') + af(x - x') = 0,$$

équation qui donne immédiatement la relation (144), en remplaçant la différence des carrés par le produit de la somme des racines par leur différence.

Nous avons préféré rappeler la relation (143), déjà mentionnée par Euler, relation qui permettrait d'opérer une transformation semblable à la précédente dans le cas où les trois termes du second degré ne formeraient pas un carré.

Multiplions la première de ces deux équations par a, la seconde par b', et ajoutons

$$ass' + b'r's' = b'd - af \qquad (150)$$

Soit π le plus grand commun diviseur de a et b'; π divise toujours le second membre :

$$\frac{a}{\pi} ss' + \frac{b'}{\pi} r's' = \frac{b'd - af}{\pi}. \qquad (151)$$

s' doit diviser le second membre; celui-ci étant numérique, s' ne pourra prendre qu'un nombre limité de valeurs. Soit σ' l'une d'elles :

$$\frac{a}{\pi} s + \frac{b'}{\pi} r' = \frac{b'd - af}{\pi\sigma'}, \qquad (152)$$

σ et ρ' étant une première solution de cette équation, les solutions générales seront :

$$\left.\begin{aligned} s &= \sigma + \frac{b'}{\pi} t \\ r' &= \rho' - \frac{a}{\pi} t \end{aligned}\right\} \qquad (153)$$

Portons les valeurs de s, r' et s' dans la seconde des équations (149) :

$$a\left[2y' + r\left(\sigma + \frac{b'}{\pi} t\right)\right]$$
$$+ b'\left[2x' + r\left(\rho' - \frac{a}{\pi} t\right)\right] + d = \rho'\sigma' - \frac{a}{\pi}\sigma' t.$$

Les termes du second degré disparaissent, et l'équation se réduit à

$$(a\sigma + b'\rho')\, r + \frac{a\sigma'}{\pi} t = \rho'\sigma' - 2ay' - 2b'x' - d. \quad (154)$$

σ et ρ' étant une première solution de (152), on a

$$a\sigma + b'\rho' = \frac{b'd - af}{\sigma'}. \qquad (155)$$

(154) devient donc

$$\frac{b'd - af}{\sigma'} r + \frac{a\sigma'}{\pi} t = \rho'\sigma' - 2ay' - 2b'x' - d. \quad (156)$$

Soit π' le plus grand commun diviseur de $\frac{b'd - af}{\sigma'}$ et $\frac{a\sigma'}{\pi}$; π' devra diviser le second membre, et on devra rejeter les valeurs de π' et les correspondantes de σ, ρ' et σ', qui ne rempliraient pas cette condition.

D'ailleurs, on n'a pas à craindre que l'équation (156) ne puisse jamais être résolue en nombres entiers pour aucune valeur de σ'.

En effet, parmi les valeurs que σ' est susceptible de prendre, il existe toujours la valeur $\sigma' = 1$, et cette valeur permet toujours de résoudre l'équation (156).

Cette équation devient en effet, dans cette hypothèse,

$$(b'd - af)r + \frac{a}{\pi} t = \rho' - 2ay' - 2b'x' - d. \qquad (157)$$

Le plus grand commun diviseur des coefficients des inconnues est $\frac{a}{\pi}$; car $\frac{a}{\pi}$ divise af, et, comme l'on a

$$b'^2 = ac,$$

ou

$$\frac{b'}{\pi} \cdot b' = \frac{a}{\pi} c,$$

$\frac{a}{\pi}$ divise $\frac{b'}{\pi} b'$, et, par conséquent, b', puisque $\frac{a}{\pi}$ et $\frac{b'}{\pi}$ sont premiers entre eux (*); $\frac{a}{\pi}$ divise donc $b'd$ et $b'd - af$

Or, $\frac{a}{\pi}$ divise toujours le second membre de (157); $\frac{a}{\pi}$ divise en effet $2ay'$ et $2b'x'$; il nous reste donc seulement à prouver que $\frac{a}{\pi}$ divise $\rho' - d$.

Dans l'hypothèse $\sigma' = 1$, la relation (155) devient

$$a\sigma + b'\rho' = b'd - af,$$

ou

$$\frac{a}{\pi}(\sigma + f) + \frac{b'}{\pi}(\rho' - d) = 0;$$

d'ailleurs $\frac{a}{\pi}$, qui est premier avec $\frac{b'}{\pi}$, divise $\rho' - d$.

ρ et τ étant une première solution de (156), cette équation sera résolue par les valeurs :

(*) $\frac{a}{\pi}$, qui est premier avec $\frac{b'}{\pi}$, divisant b' ou $\pi \frac{b'}{\pi}$, divise donc π; a sera donc à la fois un multiple de π et un diviseur de π^2.

$$\left.\begin{aligned} r &= \rho + \frac{a\sigma'}{\pi\pi'}\omega \\ t &= \tau + \frac{af - b'd}{\pi'\sigma'}\omega \end{aligned}\right\}. \qquad (158)$$

Les valeurs de y et x (145) et (147) deviennent d'abord, à cause des valeurs (153) :

$$y = y' + r\left(\sigma + \frac{b'}{\pi}t\right),$$

$$x = x' + r\left(\rho' - \frac{a}{\pi}t\right),$$

et enfin d'après (158) :

$$\left.\begin{aligned} y &= y' + \left(\rho + \frac{a\sigma'}{\pi\pi'}\omega\right)\left(\sigma + \frac{b'}{\pi}\tau + \frac{b'}{\pi}\frac{af - b'd}{\pi'\sigma'}\omega\right) \\ x &= x' + \left(\rho + \frac{a\sigma'}{\pi\pi'}\omega\right)\left(\rho' - \frac{a}{\pi}\tau - \frac{a}{\pi}\frac{af - b'd}{\pi'\sigma'}\omega\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (159)$$

dans lesquelles les six quantités σ', σ, ρ', π', ρ et τ pourront prendre un nombre limité de valeurs différentes.

La suite des opérations qui nous ont conduit au résultat précédent nous permet d'établir les deux points annoncés au début, à savoir : 1° que, *s'il existe une solution, il en existe une infinité*, et 2° que *la connaissance d'une seule solution suffit pour en déduire la connaissance de toutes les autres.*

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié,** élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

(*Suite*, voir p. 76.)

14. Théorème. — *Les trois médianes antiparallèles passent respectivement par les trois sommets du triangle formé par les côtés des carrés construits extérieurement sur les côtés du triangle donné* (*).

(*) M. d'Ocagne (*loc. cit.*) Exercice, p. 463. — J. Neuberg, *Mathesis*, 1881. Cette propriété, signalée pour la première fois par Grebe (*Archives de Grunert* t. VIII), fait que le point de Lemoine est souvent désigné en Allemagne sous le nom de Point de Grebe.

Je joins le point de rencontre des côtés extérieurs des carrés construits sur AB, AC au point A. Si d'un point M de cette droite j'abaisse des perpendiculaires sur les côtés extérieurs des carrés, ces perpendiculaires sont proportionnelles à AB et AC; ce qui montre que le point M se trouve sur la médiane antiparallèle issue de A. Le point de Lemoine est donc le centre d'homologie du triangle ABC et du triangle formé par les côtés extérieurs des carrés.

Remarque. — Le théorème est encore vrai si l'on construit les carrés intérieurement sur les côtés du triangle ABC.

15. Théorème. — *La médiane antiparallèle est conjuguée harmonique de la tangente au cercle circonscrit issue du même sommet par rapport aux côtés adjacents* (*).

Soit A_1 le point où la tangente en A au cercle ABC coupe le prolongement de BC. Les deux triangles semblables ABA_1, ACA_1 donnent

$$\frac{BA_1}{AA_1} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{AA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC},$$

D'où

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{B\alpha}{C\alpha}.$$

Beaucoup de propriétés de la médiane antiparallèle s'appliquent à cette nouvelle droite; j'en indiquerai quelques-unes dans la suite.

16. Théorème. — *On prolonge dans le sens* BA *le côté* AB *du triangle* ABC *d'une longueur égale* AB′ *en* B′, *et en* C *on élève des perpendiculaires respectivement à* AB, AC *qui se coupent en* I ; AI *est perpendiculaire à la médiane antiparallèle issue de* A (**).

Soient JJ′, TT′ les projections des pieds α et M*a* de la médiane antiparallèle et de la médiane sur AB, AC ; on a

$$\widehat{MaAC} = \widehat{JJ'\alpha} = \widehat{MaTT'},$$

le quadrilatère AB′IC étant inscriptible (deux angles opposés droits)

(*) M. E. Lemoine. Lyon 1873. - M. d'Ocagne *(loc. cit.)*, 1884 p. 28.
(**) M. d'Ocagne, *loc. cit.* Exercice, p. 463.

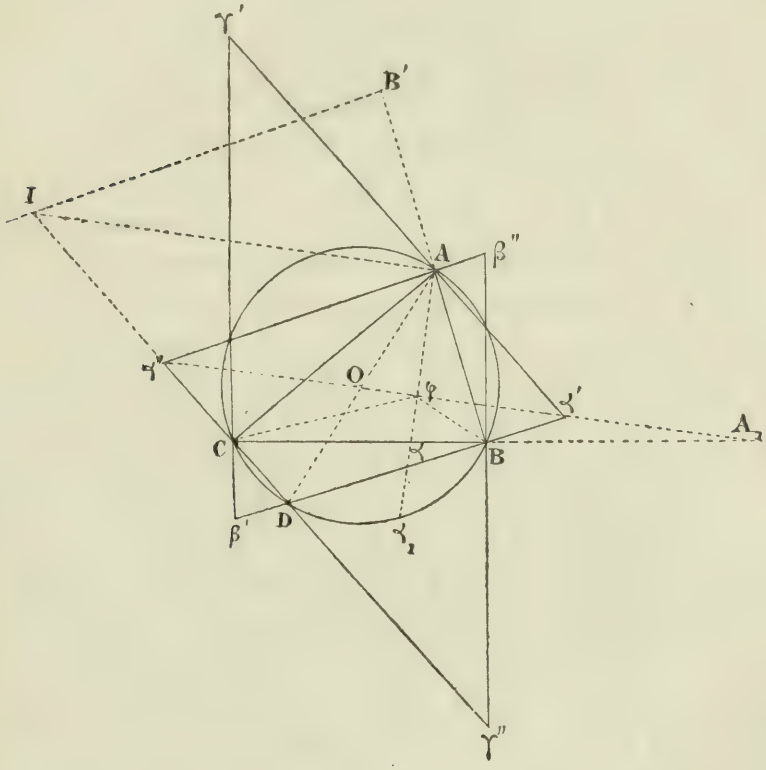
$$\widehat{B'IA} = \widehat{BCA};$$

or AMa joignant les milieux de BB′, BC du triangle BB′C, les deux droites AMa, B′C sont parallèles alors :

$$\widehat{MaAC} = \widehat{B'CA};$$

par suite

$$\widehat{MaTT'} = \widehat{B'IA}.$$



Les deux angles égaux ont un côté BI, MaJ parallèles, les deux autres AI, JJ′ le sont aussi; or JT′ est perpendiculaire à Aα. Donc AI est perpendiculaire à la médiane antiparallèle issue de A.

On peut aussi observer que B′C est perpendiculaire à JJ′.

(A suivre.)

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT

RESTAURÉS ET PUBLIÉS SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX ET INÉDITS

Par M. **Édouard Lucas.**

On appelle *Carré magique* l'ensemble de nombres égaux ou inégaux placés dans les cases d'un carré de telle sorte que la somme des nombres renfermés dans chacune des lignes, des colonnes et des diagonales soit toujours la même et égale à un nombre fixe appelé la *constante* du carré.

Autrefois, on ne considérait que les carrés magiques formés par la suite des nombres entiers consécutifs; mais on a dû amplifier cette définition à cause de la question des carrés dits à *enceintes*. Dans une lettre bien connue de Fermat à Mersenne, on trouve un carré incomplet de ce genre avec 144 cases remplies par Fermat; mais « parce que le temps me manque, écrit-il, je diffère à vous envoyer les cinq enceintes qui manquent, pour parfaire le carré entier de 22, jusqu'au départ du prochain courrier. Après cela vous devez croire que, dès que j'aurai le loisir, j'irai aussi avant sur ce sujet qu'il est possible. » Nous donnerons plus tard la restauration complète de ce carré; cette restitution qui portait sur la recherche de 340 nombres a été faite d'une manière fort remarquable par M. V. Coccoz, commandant d'artillerie en retraite; mais nous espérons plus et donner le nombre des solutions du problème d'après les indications de Fermat.

Nous ferons observer que la plupart des auteurs qui ont écrit sur les carrés magiques, et ils sont nombreux, paraissent s'être trompés en ne considérant la question qu'au point de vue arithmétique; c'est, avant tout, une question d'algèbre pure. Il s'agit de trouver pour le carré de quatre, par exemple, seize nombres assujettis à dix conditions : quatre pour les lignes, quatre pour les colonnes, et deux pour les diagonales. On pourrait donc appliquer les méthodes ordinaires de la discussion d'un système d'équa-

tions du premier degré et exprimer les inconnues en fonction de six d'entre elles. Mais on voit immédiatement que les conditions du problème ne sont pas distinctes, et que l'une d'elles est la conséquence des neuf autres. En effet, lorsque l'on a imposé aux seize nombres les conditions telles que la somme des quatre lignes et des trois premières colonnes soit la même, il est bien évident qu'il en est ainsi de la quatrième colonne. Mais, si l'on supprime cette condition, le problème devient dissymétrique, pour ainsi dire, et fort difficile à résoudre par les procédés ordinaires. Si l'on traite la question des carrés magiques par la théorie des déterminants ou par la résolution algébrique des équations suivant la méthode ordinaire, on est conduit à d'énormes calculs. C'est peut-être la première marche suivie par Fermat lorsqu'il écrit dans une autre lettre à Mersenne que les inventions de Frénicle le ravissent, et qu'il désirerait connaître quelques-unes de ses méthodes, en avouant que les siennes, pour le sujet des carrés magiques, comme pour d'autres, conduisent à de grands calculs.

Quoi qu'il en soit, la théorie complète des carrés magiques paraissait une énigme dont on devait attendre longtemps encore la solution, lorsque nous avons eu le bonheur de mettre la main sur des manuscrits originaux et inédits de Fermat; ces manuscrits se composent de quatorze cahiers et de feuillets détachés. Le présent mémoire a pour but de montrer la marche suivie par Fermat dans la formation des carrés pairs, d'après l'étude des dessins et des carrés du manuscrit. La méthode est loin d'être développée; chaque page contient quelques dessins faits d'un trait de plume et des carrés magiques avec des lettres, presque toujours, et quelquefois des chiffres. Au-dessous, une ou deux lignes indiquant par le signe ∞ ou *æq* l'égalité de nombres compris dans les cases indiquées et réunies par un trait sur le dessin; puis le nombre des solutions pour chaque dessin et pour chaque carré. Nous avons cherché à reproduire aussi fidèlement que possible la pensée de notre auteur favori; mais pour la rendre intelligible à tous ceux qui s'occupent, aux heures de loisir, des questions de cette nature, nous

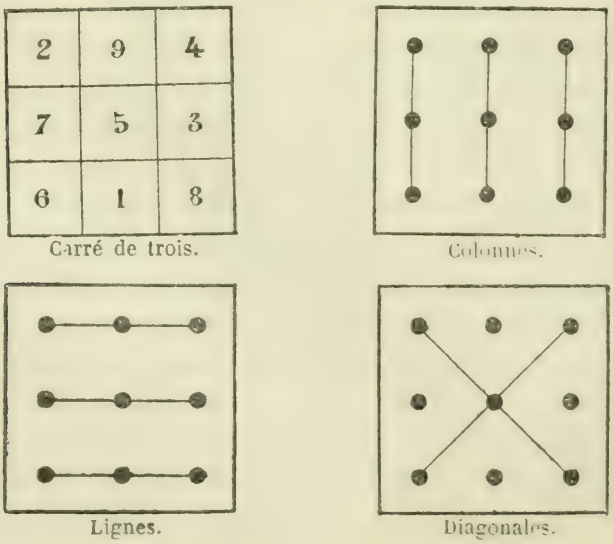
l'avons rendue aussi élémentaire que possible, puisqu'il suffit pour la comprendre de connaître les quatre premières règles de l'arithmétique. Le lecteur admirera l'art merveilleux et incomparable avec lequel l'illustre génie qui surpassa tous les géomètres de l'antiquité et que nul n'a surpassé depuis, a su se débarrasser de tous les calculs.

Nous donnerons ensuite la solution d'un problème vainement cherché par Euler qui y consacra 154 pages in-8° dans les *Comptes rendus de la Société de Flessingue*. Le mémoire a pour titre : Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques, et Euler ajoute : Or, après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on a été obligé de reconnaître qu'un tel arrangement est absolument impossible, quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse. » La solution de Fermat s'obtient en quelques traits de plume.

Les Carrés magiques de Trois.

On peut placer les neuf premiers nombres dans les cases d'un carré conformément au tableau *(fig. 1)*; cette figure possède les propriétés suivantes :

Fig. 1. — Les carrés de trois.



1° La somme des nombres renfermés dans une même colonne est égale à quinze pour chacune des trois colonnes ;

2° La somme des nombres renfermés dans une même ligne est encore égale à quinze pour chacune des trois lignes ;

3° La somme des nombres renfermés dans chacune des deux diagonales est encore égale à quinze.

On dit que cette figure est un *carré magique de trois* ; on peut réaliser cette figure avec les neuf premières boules du jeu de loto ou encore avec les dés d'un jeu de dominos dont les ensembles de points représentent successivement les neuf premiers nombres, ou encore avec les cartes de même couleur, depuis l'as jusqu'au neuf d'un jeu de whist.

La Rotation et la Symétrie.

Si l'on fait tourner le carré magique *(fig. 1)* d'un quart de tour autour de son centre, il reste magique : car les lignes deviennent les colonnes, les colonnes deviennent les lignes et les deux diagonales s'échangent l'une dans l'autre. On se rend mieux compte encore de cette propriété en faisant tourner les figures. En continuant le mouvement il en est de même ; par suite, la rotation d'un carré magique en donne trois autres. Nous avons représenté *(fig. 2)* les quatre carrés qui se déduisent les uns des autres par rotation.

Fig. 2. — La rotation des carrés magiques.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Séparons les lignes horizontales de l'un quelconque des quatre carrés que nous venons d'obtenir et au lieu de les supposer dans l'ordre de haut en bas, plaçons-les dans l'ordre de bas en haut. nous obtenons encore (*fig. 3*) quatre carrés magiques.

Fig. 3. — La symétrie des carrés magiques.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Ainsi tout carré magique donne huit solutions distinctes. parce que tous les nombres du carré sont inégaux entre eux deux à deux. Mais on a amplifié la définition des carrés, et dans cette définition plus générale, on ne suppose pas qu'il soit nécessaire de prendre des nombres consécutifs à partir de un. ni des nombres tous distincts. Nous représentons (*fig. 4*) des carrés magiques contenant plusieurs nombres égaux: les principes de rotation et de symétrie ne donnent plus que quatre solutions distinctes au lieu de huit.

Fig. 4. — Carrés magiques à nombres égaux.

4	1	4
3	3	3
2	5	2

4	3	2
1	3	5
4	3	2

2	5	2
3	3	3
4	1	4

2	3	4
5	3	1
2	3	4

Enfin, si tous les nombres du carré sont égaux, il n'y a plus qu'une seule solution: il est d'ailleurs facile de voir que tout carré de trois donne 1, 4 ou 8 solutions, et jamais plus.

Les carrés magiques de quatre.

Écrivons les seize premiers nombres suivant l'ordre naturel, dans les seize cases d'un carré de quatre (*fig. 5*); lorsque nous désignerons plus tard une case par un numéro, ce sera toujours par le nombre correspondant de cette figure.

Échangeons entre eux les huit nombres qui se trouvent placés deux par deux sur les cases représentées par les boules noires opposées (*fig. 6*), nous obtenons ainsi le carré magique de la *fig. 7*. On trouve ce carré dans Fermat et dans le mémoire de Frénicle dont il est parlé plus loin, avec l'indication du procédé qui sert à le construire. Mais si l'on place toutes les lignes dans l'ordre inverse on obtient, par symétrie, le carré magique qui se trouve représenté sur la célèbre gravure *Melancholia* d'Albert Dürer burinée en 1514; la date de cette gravure est d'ailleurs indiquée par les deux nombres *15* et *14* de la ligne inférieure.

Fig. 5.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 6.

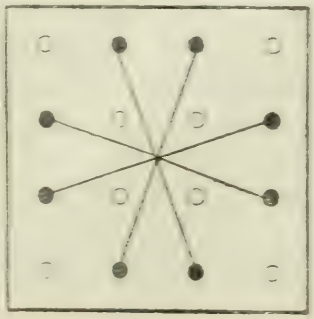


Fig. 7.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

De l'addition et de la multiplication des carrés.

Les carrés magiques se prêtent à diverses transformations générales évidentes :

1° Un carré reste magique si l'on augmente ou si l'on diminue tous les éléments d'une même quantité; en les diminuantde leur moyenne arithmétique, c'est-à-dire du quotient de leur somme par leur nombre, on peut supposer la constante nulle; on introduit ainsi des éléments négatifs, mais cet inconvénient est compensé par la simplification des calculs;

2° Un carré reste magique lorsque l'on multiplie ou que l'on divise tous les nombres par une même quantité;

3° En ajoutant les nombres des cases correspondantes de deux carrés on obtient encore un carré magique; dans le cas où les carrés ne sont pas de même grandeur, mais de même parité, on peut border le plus petit de quatre, huit, douze.... rangées en plaçant des zéros ou des nombres égaux dans les cases ajoutées.

Mais ces transformations altèrent, dans le cas général, les éléments du carré; voici une transformation qui conserve les mêmes nombres lorsque ceux-ci sont complémentaires deux à deux, c'est-à-dire tels que si on les range par ordre de grandeur et si on les désigne par

$$a, b, c, d, \ldots d', c', b', a',$$

la somme des nombres placés à égale distance des extrêmes soit constamment la même. Ainsi, l'on suppose

$$a + a' = b + b' = c + c' = d + d' = \ldots = s.$$

En effet, considérons un carré magique quelconque formé avec de tels nombres, et remplaçons l'un par l'autre chaque nombre complémentaire. Les éléments d'une même ligne, d'une même colonne ou d'une même diagonale se trouvent remplacés par leurs compléments, et ainsi $o, p, q, r, \ldots$ par $s - o, s - p, s - q, s - r, \ldots$; la somme de chaque rangée n'est donc pas altérée.

Nous devons observer que cette méthode de transformation que nous appellerons méthode par complément ne donne pas toujours de nouveaux carrés; ainsi, en l'appli-

quant à la *fig.* 7 on retrouve un carré que l'on pourrait obtenir par rotation et par symétrie. On se rendra facilement compte du résultat pour tout carré en joignant par des droites les centres des cases contenant les nombres complémentaires et en regardant si le dessin obtenu est ou n'est pas symétrique par rapport au centre ou aux médianes du carré.

En prenant quatre nombres a, b, c, d tels que

$$a + d = b + c,$$

on dit que ces nombres forment une *équidifférence*, et lorsque l'on prend au hasard les deux premiers a et b, on obtient toujours une *équidifférence* en les augmentant tous deux d'un même nombre quelconque ; si l'on augmente maintenant les quatre nombres a, b, c, d d'une même quantité, on forme une nouvelle équidifférence e, f, g, h.

Les méthodes de Fermat pour le carré de quatre s'appliquent ainsi à seize nombres a, b, c, d, e, f, g, h formant une double équidifférence, et à huit nombres complémentaires obtenus en retranchant les huit premiers d'un même nombre s. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 80.)

CHAPITRE IV

LE PARTAGE D'UNE DROITE EN PARTIES ÉGALES

PROBLÈME. — *Partager un segment donné* AB *en* p *parties égales.*

40. Solution de Servois. — Je rapporterai d'abord la solution que Servois a proposée dans le livre que j'ai cité au début de ce travail. Cette solution est ingénieuse ; nous

devons pourtant faire observer qu'elle ne ressort pas absolument de la géométrie de la règle seule, parce qu'elle exige qu'une parallèle au segment AB existe dans le plan du dessin ; or, cette parallèle ne peut être tracée qu'en utilisant soit la règle et l'équerre, soit la règle plate. Toutefois, cette restriction une fois faite, cette donnée étant accordée, la construction de Servois s'effectue avec la règle seule.

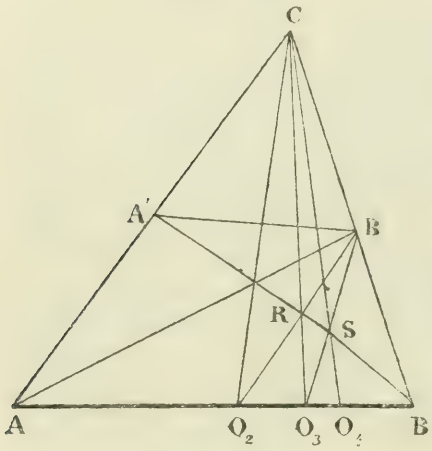


Fig. 27.

Soit AB le segment proposé, droite qu'on veut partager en p parties égales.

Ayant tracé A'B' parallèlement à AB, la construction indiquée par la figure donne d'abord le point O_2, milieu de AB.

Joignons O_2B' ; cette droite rencontre A'B en R et CR détermine les points O_3 ; O_3B est le tiers de AB.

Joignons O_3B' qui coupe AB' en S ; CS coupe AB en O_4 ; O_4B est le quart de AB.

Et ainsi de suite.

Pour démontrer cette loi, supposons que le point O_{p-1} soit tellement situé sur AB que nous ayons

$$O_{p-1}B = \frac{AB}{p-1}; \tag{1}$$

puis, effectuons la construction indiquée par la figure.

Nous allons prouver que

$$O_pB = \frac{AB}{p}.$$

Nous avons d'abord, d'après le théorème de Ménélaüs,

$$\frac{O_pO_{p-1}}{O_pB} \cdot \frac{MB'}{MO_{p-1}} \cdot \frac{CB}{CB'} = 1. \tag{2}$$

D'autre part, les triangles semblables donnent

$$\frac{MB'}{MO_{p-1}} = \frac{A'B'}{BO_{p-1}}, \text{ et } \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}. \tag{3}$$

Les égalités (2) et (3) prouvent que

$$\frac{O_pO_{p-1}}{O_pB} = \frac{BO_{p-1}}{AB} = \frac{1}{p-1}.$$

Nous avons donc

$$\frac{O_pO_{p-1} + O_pB}{O_pB} = \frac{1 + p - 1}{p - 1},$$

ou

$$\frac{O_{p-1}B}{O_pB} = \frac{p}{p-1}.$$

Cette dernière égalité, comparée avec (1), donne bien, finalement,

$$O_pB = \frac{AB}{p}.$$

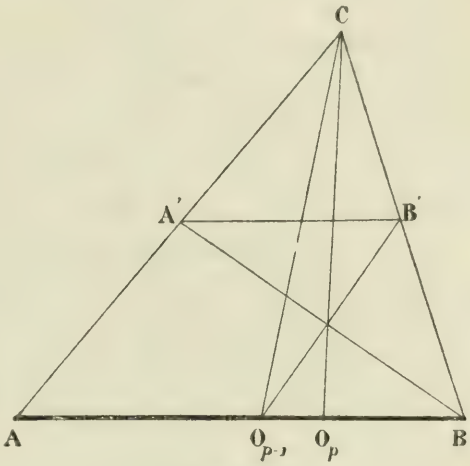


Fig. 28.

41. Remarque. — La démonstration de Servois est sensiblement plus longue que celle que nous venons d'indiquer; mais elle se termine par une réflexion utile, portant sur ce fait que « ce problème pourrait servir à se former sur le terrain une échelle de lever ». Observons pourtant, à ce propos, que les échelles de lever se font ordinairement au 1/10e, au 1/100e...; et nous donnerons plus loin une construction très rapide pour partager une droite en 10, 100... parties égales.

42. Solution de M. Cremona. — Pour résoudre le même problème, AB désignant encore le segment proposé, M. Cremona suppose connu le point C, symétrique de A par rapport à B. C'est, au fond, comme le voulait Servois, dans la solution que nous venons de rappeler, s'accorder une parallèle au segment. En effet, ce problème ne peut être résolu, non plus que ceux de la même espèce, avec la règle seule; mais, pour insister encore une fois sur cette idée, avec la règle plate, ou avec la règle et l'équerre. Quoi

qu'il en soit, voici la solution proposée par M. Cremona (*).

Soit joint un point quelconque M_1 aux points A, B et C; la construction indiquée par la figure donne trois points O_1, O_2, O_3 et l'on a

$$O_1O_2 = O_2O_3.$$

Les droites CO_2, BO_3 donnent alors le point M_2; puis, de celui-ci on déduit le point O_4; et ainsi de suite.

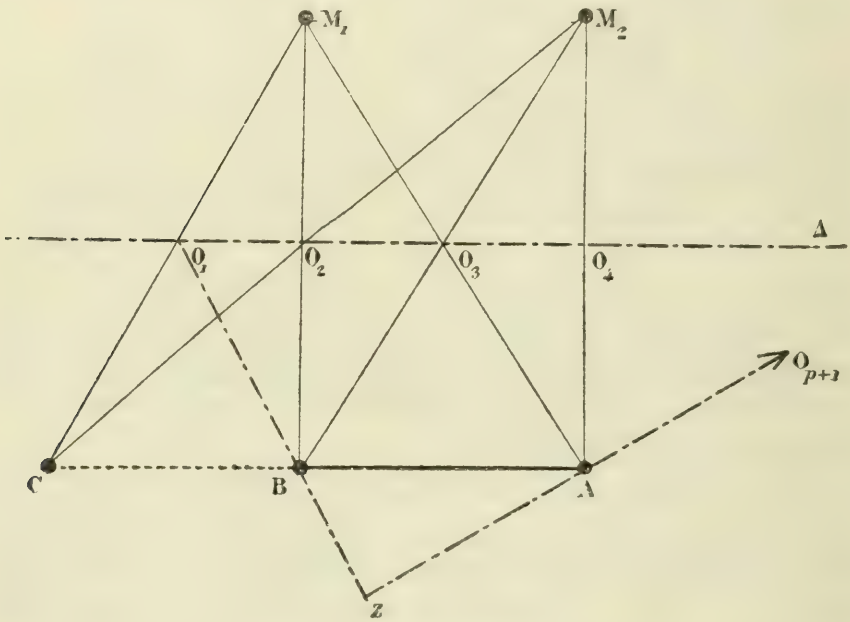


Fig. 29.

On détermine ainsi sur une droite Δ, parallèle à AB, une série de points :

$$O_1,\ O_2,\ O_3\ \ldots\ O_{p+1}.$$

et l'on a

$$O_1O_2 = O_2O_3\ \ldots\ = O_p\,O_{p+1}.$$

Cela posé, si l'on joint BO_1 et AO_{p+1}, ces droites se coupent en un certain point Z et le faisceau (ZO_2, ZO_3, ... ZO_p) donne sur AB la ponctuelle cherchée.

43. Remarque I. — Si le point Z était rejeté à l'infini, ce

(*) *Loc. cit.*, p. 82.

qui arriverait si, par hasard, on avait

$$AB = pO_1O_2,$$

il suffirait de changer la position du point initial M_1, en le rapprochant ou en l'éloignant de AB. Mais il est très facile, par un simple coup d'œil donné sur le dessin, d'éviter cette singularité; on peut même toujours s'arranger de façon que le point Z soit placé dans les limites du cadre.

44. Remarque II. — On peut résumer la construction précédente en observant qu'elle revient, en définitive, à porter p longueurs égales sur une parallèle au segment donné et à faire la perspective du groupe ainsi obtenu sur la droite donnée, les rayons extrêmes de cette perspective passant par les extrémités du segment proposé.

Si l'on s'accorde l'usage continu de la règle plate, on voit qu'il résulte de la remarque précédente un moyen rapide de résoudre le problème en question. Mais cette construction est trop évidente pour que nous ayons besoin d'y insister autrement.

45. Solution de M. Baehr. — Sous le titre : *Figuration des inverses des nombres entiers et des inverses des produits de deux nombres entiers consécutifs*, M. Baehr, professeur à l'École polytechnique de Delft, a communiqué à l'Association française pour l'avancement des sciences (*) une remarque dont malheureusement le titre seul figure dans l'Annuaire.

Mais M. Laisant l'a reproduite plus tard (**) avec quelques détails et nous allons la donner ici, avec certaines modifications.

M. Baehr prend pour base de sa construction un rectangle dont les côtés sont, respectivement, égaux à 1 et 2. Pour plus de généralité, considérons un trapèze quelconque ABCD; puis effectuons la construction indiquée par la figure, con-

(*) Congrès du Havre; 1877.

(**) *Discours d'ouverture et notice historique sur les travaux mathematiques de l'Association*, par C.-A. Laisant, député de la Loire-Inférieure, docteur ès sciences mathématiques; congrès de Montpellier, 1879.

struction qui conduit, de proche en proche, aux points O_1, O_2, ... O_{p-1}, O_p que nous allons considérer.

Par application d'un principe précédent (§ 14) (après avoir posé $M_kO_k = X_k$, $AB = a$, $CD = b$) nous avons :

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{a},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{x_p} = \frac{1}{x_{p-1}} + \frac{1}{a}.$$

Ces égalités combinées donnent

$$\frac{1}{x_p} = \frac{1}{b} + \frac{p}{a}.$$

Si, dans cette formule, nous supposons $a = b$, ce qui, au point de vue de la construction géométrique précédente, revient à prendre pour point de départ de celle-ci un parallélogramme, au lieu d'un trapèze, nous avons

$$x_p = \frac{AB}{p+1}.$$

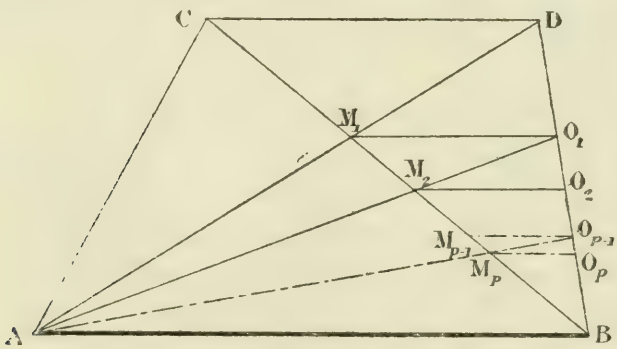


Fig. 30.

De cette remarque résulte un tracé rapide et simple, pour résoudre, au moyen de la règle et de l'équerre, le problème qui nous occupe. Mais nous allons déduire encore, comme on va le voir dans le paragraphe suivant, de la construction que nous venons d'indiquer, un procédé rapide pour partager une droite donnée en dix parties égales. Ce cas particulier de la division d'un segment en parties égales présente une importance spéciale au point de vue des opérations pratiques que soulève l'arpentage.

46. Problème XIV. — *Partager une droite donnée en 10, 100,... parties égales.*

Première solution. — Reportons-nous à la figure précédente et cherchons quel est le rapport des deux longueurs O_pO_{p-1} et BD.

Nous avons d'abord

$$\frac{BO_p}{BD} = \frac{x_p}{b}, \text{ et } \frac{BO_{p-1}}{BD} = \frac{x_{p-1}}{b}.$$

Ces égalités donnent

$$\frac{O_pO_{p-1}}{BD} = \frac{x_{p-1} - x_p}{b}. \qquad (1)$$

D'autre part, des relations :

$$\frac{1}{x_p} = \frac{1}{b} + \frac{p}{a}, \quad \frac{1}{x_{p-1}} = \frac{1}{b} + \frac{p-1}{a},$$

nous concluons

$$\frac{x_{p-1} - x_p}{b} = a\left[\frac{1}{a+pb} - \frac{1}{a+(p+1)b}\right],$$

et, conséquemment,

$$\frac{x_{p-1} - x_p}{b} = \frac{ab}{[a+pb]\,[a+(p+1)b]}. \qquad (2)$$

Des égalités (1) et (2) nous déduisons

$$\frac{O_pO_{p-1}}{BD} = \frac{ab}{(a+pb)[a+(p+1)b]}.$$

Si nous supposons, en particulier, $a = 2b$ et $p = 2$, la formule précédente donne alors

$$\frac{O_2O_1}{BD} = \frac{1}{10}.$$

En admettant que BC soit la droite qu'il faut partager en dix parties égales, on voit comment on peut tirer de cette remarque un procédé rapide pour résoudre le problème en question. En appliquant au segment $\frac{BD}{10}$ la même construction, on aura la centième partie de BD; et ainsi de suite.

Seconde solution. — Soit AB le segment proposé; par A traçons une droite arbitraire Az, puis prenons (§ 38) la symétrique de B par rapport à Az; nous obtenons ainsi un triangle isoscèle BAC que nous allons considérer. Par le point R, milieu de AB, menons RT parallèle à BC, puis joignons les

points R et T à un point P, arbitrairement choisi sur BC. Des points R et T nous déduisons successivement, par la construction indiquée par la figure, les points S, Q, K et I; c'est ce dernier que nous visons plus particulièrement, et nous nous proposons de chercher le rapport des segments IR et AB.

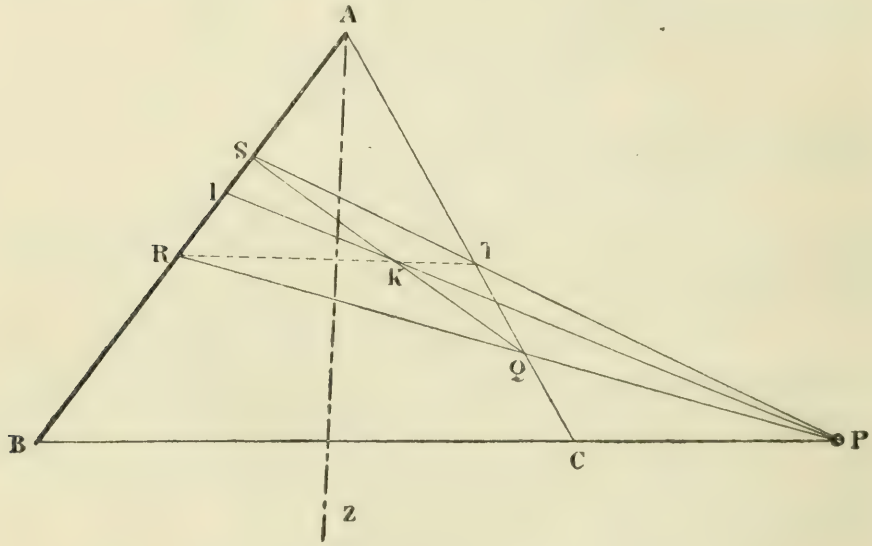


Fig. 31.

Nous poserons $PC = m$, $PB = n$; le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle ABC et à la transversale PTS donne

$$\frac{AS}{BS} = \frac{m}{n},$$

et, par suite,

$$\frac{AS}{AB} = \frac{m}{m+n}, \qquad (1)$$

ou, en observant que $AB = 2AR$,

$$\frac{AS}{AR} = \frac{2m}{m+n}, \quad \text{ou} \quad \frac{AS}{RS} = \frac{2m}{n-m}. \qquad (2)$$

La droite PI pouvant être considérée comme la polaire de A, par rapport au faisceau des droites (PR, PS), le point I est conjugué harmonique de A, par rapport au segment RS. On a donc

$$\frac{IS}{IR} = \frac{AS}{AR} = \frac{2m}{m+n}.$$

De cette égalité on déduit

$$\frac{IS}{RS} = \frac{2m}{3m+n}. \qquad (3)$$

Les relations (2) et (3) donnent, par combinaison,

$$\frac{AS}{IS} = \frac{3m+n}{n-m};$$

celle-ci, par comparaison avec (1), conduit à l'évaluation du rapport cherché. On a, d'abord,

$$\frac{IS}{AB} = \frac{m(n-m)}{(m+n)(3m+n)}; \qquad (4)$$

puis, finalement,

$$\frac{IR}{AB} = \frac{n-m}{2(3m+n)}. \qquad (5)$$

En supposant $n = 2m$, c'est-à-dire en prenant le point P symétrique de B, par rapport à C, on a

$$\frac{IR}{AB} = \frac{1}{10}.$$

Dans cette même hypothèse l'égalité (4) donne

$$\frac{IS}{AB} = \frac{1}{15}.$$

Ainsi, l'application de la construction que nous indiquons ici, fournit un moyen rapide de trouver la dixième ou la quinzième partie d'une droite; mais le premier partage, comme nous l'avons déjà fait observer, présente seul un intérêt particulier. *(A suivre.)*

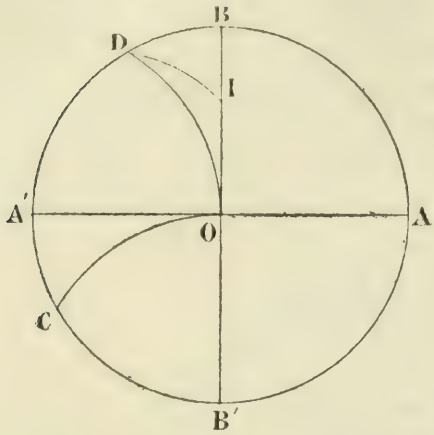
CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Chapron, maître d'études au Collège de Bar-sur-Aube.

..... A propos du pentagone d'Albert Dürer, permettez-moi de vous signaler la construction suivante du pentagone régulier. Elle me paraît un peu plus simple que celles que l'on voit exposées dans les traités élémentaires de géométrie.

Soient, dans un cercle O, deux diamètres rectangulaires

AA′, BB′; prenons les cordes B′C, A′D égales au rayon. Du point C, avec la corde CD comme rayon, décrivons un arc qui coupe en I le diamètre BB′; A′I est le côté du pentagone régulier inscrit dans le cercle O.



C'est ce qu'on voit en calculant la longueur de OI; celle-ci est égale en effet au côté du décagone régulier.

Cette manière d'inscrire le pentagone est tirée d'un *Cours de dessin linéaire*, par Chardon, 1857.

QUESTIONS PROPOSÉES

182. — Par le sommet A d'un triangle ABC on mène une parallèle AD à BC, son inverse AA_1 et la médiane antiparallèle $A\alpha$. Démontrer la relation

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{B\alpha}{C\alpha}.$$

(E. Vigarié.)

Erratum. — Dans le numéro précédent, p. 95, lignes 2 et 3 : Au lieu de *Hocheim*, lisez Hoccheim; et au lieu de t. III, lisez t. LII.

Nota. — La construction de la moyenne proportionnelle donnée dans le numéro cité, et retrouvé par M. Ed. Bordage, n'est pas nouvelle, comme permettait de le supposer, *à priori*, son extrême simplicité. M. Vigarié nous fait observer qu'elle a déjà été présentée dans le journal de M. Vuibert (p. 54; 1879-80) par M. Eugène Morin, élève au lycée d'Agen, d'après des notes prises au cours de M. Martinaud.

G. L.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10712-5.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE
DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir p. 97.)

63. — Pour donner à σ', dans les formules (159), toutes les valeurs que cette quantité est susceptible de prendre, après lui avoir donné toutes les valeurs positives possibles, il faudrait aussi donner à cette quantité les mêmes valeurs prises en signe contraire; car ces dernières diviseraient $\frac{b'd - af}{\pi}$ aussi bien que les premières.

Mais alors le second membre de (152) changerait de signe sans que le premier ait été modifié. L'équation (152) serait donc résolue, dans ce cas, par les valeurs $-\sigma$, $-\rho'$.

Les trois quantités σ', σ et ρ' changeraient donc de signe en même temps, sans changer de valeur numérique.

Le premier membre de l'équation (156) changerait donc de signe, sans que le second soit modifié. Cette équation sera donc résolue par les valeurs $-\rho$, $-\tau$, et les cinq quantités σ', σ, ρ', ρ et τ changeraient de signe en même temps. Quant aux quantités π et π', elles représentent des plus grands communs diviseurs, et peuvent toujours être prises positivement. Mais, en examinant les valeurs (159) de y et x, on voit que le mouvement simultané des signes des cinq quantités σ', σ, ρ', ρ et τ n'apportera aucun changement dans ces expressions.

Il sera donc inutile de donner à σ' des valeurs négatives.

64. — Lorsqu'on voudra utiliser les formules (159) pour le calcul des solutions d'une équation particulière, on devra commencer par fixer les valeurs des quantités π, σ', σ, ρ', π', ρ et τ.

La détermination de ces valeurs donne lieu, dans certains cas, à des difficultés.

L'examen de tous les cas qui peuvent se présenter nous mènerait un peu loin. Nous allons étudier seulement l'un d'entre eux.

Le nombre π peut toujours être déterminé. En effet, π est le plus grand commun diviseur de a et b'; a ne peut être nul; dans le cas où b' serait nul, π serait égal à a.

Lorsque le second membre de l'équation (151) n'est pas nul, σ' peut être déterminé.

Lorsque $b'd - af = 0$, σ' paraît d'abord indéterminé; b' ne peut être nul en même temps que $b'd - af$; en effet, il en résulterait $f = 0$, $c = 0$, à cause de la relation $b'^2 - ac = 0$, a ne pouvant être nul, et l'équation (141) ne dépendrait plus que d'une seule inconnue.

L'équation (152) sera donc bien indéterminée, et son second membre sera nul. Les valeurs de σ et ρ' seront donc nulles.

L'équation (156) deviendra

$$\frac{a\sigma'}{\pi} t = -2ay' - 2b'x' - d \qquad (160)$$

et π' sera égal à $\frac{a\sigma'}{\pi}$.

La relation $b'd - af = 0$, ou $\frac{b'}{\pi} d - \frac{a}{\pi} f = 0$, nous fait voir que $\frac{a}{\pi}$, qui est premier avec $\frac{b'}{\pi}$, divise d, et, par conséquent, que $\frac{a}{\pi}$ divise toujours le second membre de (160). $\frac{a}{\pi}$ divisant aussi b' à cause de la relation $b'^2 = ac$, ou $\frac{b'}{\pi} b' = \frac{a}{\pi} c$.

Si $2ay' + 2b'x' + d$ n'est pas nul, π' ou $\frac{a\sigma'}{\pi}$ devant diviser le second membre de (160), nous devrons rejeter toutes les valeurs de π' et de σ' qui ne rempliraient pas cette condition, de sorte que σ', qui n'avait pu être déterminé jusqu'à présent, ne pourra prendre qu'un nombre limité de valeurs différentes.

Ces valeurs sont les divers diviseurs de l'expression

$$-\frac{\pi}{a}(2ay' + 2b'x' + d), \qquad (161)$$

laquelle se réduit à un nombre entier.

ρ restera indéterminé, et t ou τ aura un nombre limité de valeurs, dont l'expression sera

$$\tau = \frac{-\pi}{a\sigma'}(2ay' + 2b'x' + d). \qquad (162)$$

Les formules (159) deviendront donc

$$\left.\begin{aligned} y &= y' + \frac{b'\tau}{\pi}(\rho + \omega) \\ x &= x' - \frac{a\tau}{\pi}(\rho + \omega) \end{aligned}\right\}. \qquad (163)$$

Mais il est facile de s'apercevoir que ces formules reviennent aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} y &= y' + \frac{b'}{\pi}\omega \\ x &= x' - \frac{a}{\pi}\omega \end{aligned}\right\}, \qquad (164)$$

c'est-à-dire que les expressions (163) ne peuvent donner aux inconnues y, x, d'autres valeurs que celles comprises dans les formules (164).

En effet, ρ étant indéterminé, $\rho + \omega$ peut passer par toute valeur entière, positive ou négative, de même que ω, et, en second lieu, τ pouvant toujours prendre une valeur égale à l'unité, les autres valeurs de τ ne pourraient donner aux expressions (163) que des valeurs comprises parmi celles provenant de l'hypothèse $\tau = 1$.

Dans le cas qui nous occupe, les formules (159) se réduisent donc aux expressions (164).

Or, dans l'hypothèse $b'd - af = 0$, l'équation (141) devient, en multipliant par a qui n'est pas nul :

$$a^2y^2 + 2ab'xy + acx^2 + ady + afx + ag = 0.$$

Remplaçons ac par b'^2, et af par $b'd$, pour éliminer c et f.

$$(ay + b'x)^2 + d(ay + b'x) + ag = 0$$

ou

$$(ay + b'x)(ay + b'x + d) + ag = 0. \qquad (165)$$

Cette équation étant satisfaite, par hypothèse, par les valeurs y', x', on a

$$(ay' + b'x')(ay' + b'x' + d) + ag = 0, \qquad (166)$$

d'où

$$(ay+b'x)(ay+b'x+d) = (ay'+b'x')(ay'+b'x'+d), \qquad (167)$$

ou

$$\left(ay + b'x + \frac{d}{2}\right)^2 = \left(ay' + b'x' + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Cette équation peut être remplacée par l'une ou l'autre des deux suivantes :

$$ay + b'x = ay' + b'x' \qquad (168)$$

$$ay + b'x = -ay' - b'x' - d. \qquad (169)$$

L'équation (169) ne peut être admise pour remplacer la proposée, car elle devrait être satisfaite par les valeurs y', x'. et il en résulterait

$$2ay' + 2b'x' + d = 0,$$

ce qui est contraire à notre hypothèse.

Il ne nous reste donc plus que l'équation (168) qui, étant résolue, donnerait précisément les valeurs déjà trouvées (164).

65. — Nous ne nous arrêterons pas à l'examen des autres cas.

Si l'emploi des formules (159) paraissait mal commode, tant par la longueur des calculs nécessaires à la détermination des constantes, que par les difficultés qui peuvent se présenter dans les cas particuliers, la méthode exposée au n° 62 aurait toujours le mérite de donner le moyen de résoudre directement une équation particulière, en indiquant la marche à suivre.

Les difficultés qui pouvaient se présenter dans l'emploi des formules, difficultés qui provenaient de ce que certaines équations indéterminées se simplifiaient, ou même devenaient déterminées, deviendraient des circonstances favorables, en permettant de résoudre plus facilement les équations successives. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 51.)

XLVII

Étant donné un triangle ABC, *trouver un point* O *tel que les rayons* R_a, R_b, R_c *des cercles circonscrits respectivement aux triangles* OBC, OAC, OAB *soient proportionnels à trois quantités données* α, β, γ.

Appelons x, y, z les angles COB, AOC, BOA, on a

$$x + y + z = 360,$$

d'où

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin z = 0; \qquad (1)$$

mais

$$R_a = \frac{a}{2 \sin x}, \quad R_b = \frac{b}{2 \sin y}, \quad R_c = \frac{c}{2 \sin z}.$$

On peut donc écrire, en appelant ρ la valeur commune des rapports :

$$\frac{\alpha \sin x}{a} = \frac{\beta \sin y}{b} = \frac{\gamma \sin z}{c} = \rho. \qquad (2)$$

De (2) on tire $\sin x$ et par suite $\cos x$, $\sin y$, etc.

En substituant dans (1) on a

$$\pm \frac{a\rho}{\alpha}\sqrt{1 - \frac{b^2\rho^2}{\beta^2}} \pm \frac{b\rho}{\beta}\sqrt{1 - \frac{a^2\rho^2}{\alpha^2}} + \frac{c\rho}{\gamma} = 0.$$

Divisant par ρ, développant en chassant les radicaux et réduisant on trouve

$$\rho^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2\left(\frac{\beta}{b}\right)^2\left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}\right)\left(\frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} - \frac{a}{\alpha}\right)\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{c}{\gamma} - \frac{b}{\beta}\right)$$
$$\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} - \frac{c}{\gamma}\right).$$

Les formules (2) donnent alors les angles x, y, z, etc.

Nous engageons les élèves à discuter le problème en examinant les diverses hypothèses à faire et les conventions à adopter pour le signe des rayons, de façon à ramener les diverses solutions à une même formule, lorsque O n'est plus à l'intérieur de ABC.

Remarque I. — Les formules (2) montrent que si O est le point d'où l'on voit les côtés sous le même angle, les rayons R_a, R_b, R_c sont:

$$\frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad \frac{c}{\sqrt{3}},$$

ce que l'on sait d'autre part.

Remarque II. — Si l'on cherche le point pour lequel R_a, R_b, R_c sont égaux, on trouve le point de concours des hauteurs.

Remarque III. — Si l'on cherche le point pour lequel R_a, R_b, R_c sont proportionnels à sin x, sin y, sin z, on trouve

$$\cos^2 x = \frac{(p-a)^2}{bc}; \sin^2 x = \frac{-a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 2ac + 2ab}{4bc}$$
$$= \frac{r(4R + r)}{bc},$$

etc., et

$$\frac{R_a^2}{a} = \frac{R_b^2}{b} = \frac{R_c^2}{c}.$$

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié**, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

(*Suite*, voir p. 101.)

17. Théorème.

Par A *je mène la droite* $\alpha'\gamma'$ *perpendiculaire à* AC
— B — $\alpha'\beta'$ — AB
— C — $\gamma'\beta'$ — BC
— A — $\alpha''\beta''$ — AB
— B — $\beta''\gamma''$ — BC
— C — $\alpha''\gamma''$ — AC

Soient A_1, B_1, C_1 *les points où* $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ *coupent* BC, AC, AB; α, β, γ *les conjugués harmoniques de* A_1, B_1, C_1 *par rapport à* BC, AC, AB.

1° Les droites $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ *passent par le centre* O *du cercle circonscrit à* ABC;

2° Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *se coupent au point de Lemoine;*

3° Les trois points A_1, B_1, C_1 *sont en ligne droite* (*).

1° Les droites $\alpha'\beta'$, $\alpha'\gamma''$ se coupent en un point D, le quadrilatère ABDC est inscriptible (deux angles opposés B et C droits) et AD est un diamètre du cercle circonscrit. La figure $A\alpha'D\alpha''$ est un parallélogramme dont les diagonales AD, $\alpha'\alpha''$ se coupent en parties égales, donc $\alpha'\alpha''$ passe par le milieu de AD qui est le centre du cercle ABC. On ferait la même démonstration pour $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$.

2° Joignons le point C au point φ où $\alpha'\alpha''$ coupe la médiane antiparallèle $A\alpha$. Les droites $A\alpha$ et $\alpha'\alpha''$ sont perpendiculaires En effet, si on prolonge AB dans le sens BA d'une longueur AB′ égale à AB et qu'en B′ on élève une perpendiculaire jusqu'à sa rencontre en I avec la perpendiculaire à AC, la droite IA est perpendiculaire à $A\alpha$ (théorème précédent). Comme BD, $A\alpha''$, B′I sont perpendiculaires à AB et que AB égale AB′ on a

$$\alpha''I = \alpha''D = A\alpha'.$$

La figure $AI\alpha''\alpha'$ est un parallélogramme; donc $\alpha'\alpha''$ qui est parallèle à AI est perpendiculaire à $A\alpha$.

Les angles $A\varphi\alpha''$, $AC\alpha''$ étant droits, on a dans le quadrilatère inscriptible $A\varphi C\alpha''$

$$\widehat{AC\varphi} = \widehat{A\alpha''\varphi} = \widehat{BA\alpha},$$

de même

$$\widehat{AB\varphi} = \widehat{CA\varphi}.$$

Les triangles $AC\varphi$, $AB\varphi$ sont donc semblables et on a

$$\frac{C\varphi}{A\varphi} = \frac{A\varphi}{B\varphi} = \frac{AC}{AB}.$$

D'où

$$\frac{C\varphi}{B\varphi} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\alpha C}{\alpha B},$$

(*) M. E. Lemoine, Lyon 1873; *loc. cit.*

Égalité qui montre que $A\alpha$ est bissectrice de l'angle $B\varphi C$; la droite $\alpha'\alpha''$ perpendiculaire à $A\alpha$ ira donc rencontrer BC en un point A_1 conjugué harmonique de α, ou bien α est conjugué harmonique de A_1. Les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ étant les médianes antiparallèles du triangle concourent au point de Lemoine.

3° Il suffit d'observer que les points A_1, B_1, C_1 divisent les côtés en segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents.

18. Théorème. — *La droite* $A_1B_1C_1$ *est la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle* ABC.

Soit α_1 le point où $A\alpha$ coupe la circonférence ABC. La droite $\alpha'\alpha''$ passant par les points A_1 et O et étant perpendiculaire à $A\alpha$, la deuxième tangente issue de A_1 passera par le point α, ce qui prouve que A_1 est un point de la polaire du point de Lemoine par rapport à ABC; de même pour B_1 et C_1. La droite $A_1B_1C_1$ est donc la polaire du point de Lemoine par rapport à la circonférence ABC.

19. Théorème. — *Si par les sommets d'un triangle* ABC, *on mène des tangentes au cercle circonscrit à ce triangle, on forme avec ces tangentes un triangle* $A''B''C''$ *tel que les droites* AA'', BB'', CC'' *se coupent au point de Lemoine du triangle* ABC (*).

Soient A''_a, A''_b, A''_c les projections du point A'' sur BC, AC, AB. Le point A'' étant sur les tangentes menées par les points B et C, on a:

$$\frac{A''A''_a}{A''A''_b} = \frac{BC}{AC}, \qquad \frac{A''A''_c}{A''A''_a} = \frac{AB}{BC}.$$

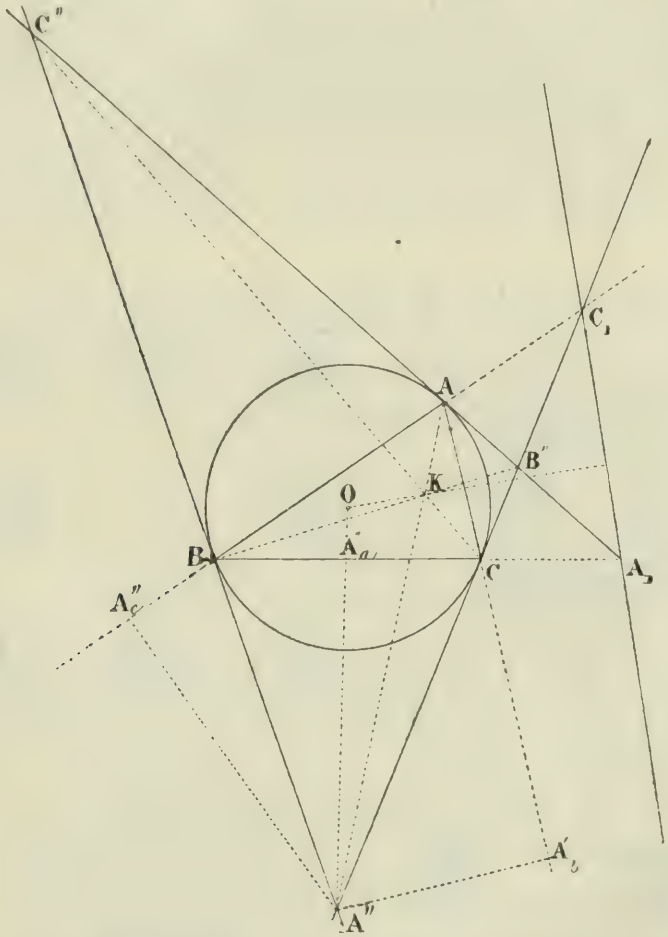
D'où

$$\frac{A''A''_c}{A''A''_b} = \frac{AB}{AC}.$$

Égalité qui montre que le point A'' appartient à la médiane

(*) M. J. Neuberg, *loc. cit.* — E. Lemoine, *loc. cit.*

antiparallèle $A\alpha$; on prouverait de même que les points B'', C'' sont sur les médianes antiparallèles $B\beta$, $C\gamma$. Les droites AA'', BB'', CC'' n'étant autres que les médianes antiparallèles du triangle concourent au point de Lemoine.



Le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi :

Les trois médianes antiparallèles d'un triangle passent respectivement par les trois sommets d'un triangle polaire réciproque de ce triangle par rapport à son cercle circonscrit (*).

La droite $A_1B_1C_1$ étant la polaire du point de Lemoine par rapport à ABC, on peut ajouter que

(*) M. d'Ocagne, *loc. cit.* Exercice, p. 463.

Les deux triangles ABC, A″B″C″ *sont homologiques, leur centre d'homologie est le point de Lemoine, leur axe d'homologie est la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle* ABC, *par conséquent il est perpendiculaire à* KO.

On peut encore observer que ces droites AC″, AB, AA″, AC forment un faisceau harmonique et que le théorème 14 s'applique au triangle A″B″C″, sous la réserve de remplacer les carrés extérieurs par les carrés intérieurs. On voit aussi que A″, B″, C″ sont les pôles de BC, AC, AB.

(A suivre.)

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT

RESTAURÉS ET PUBLIÉS SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX ET INÉDITS

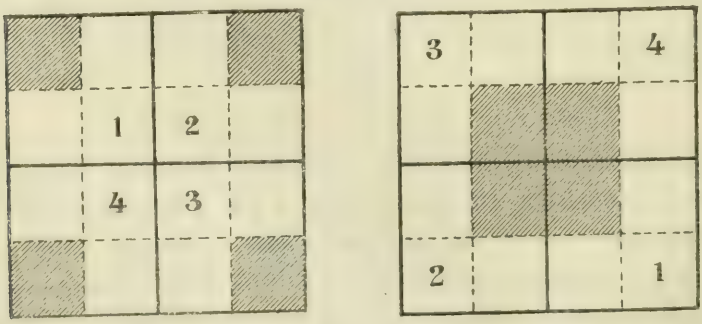
Par M. **Édouard Lucas.**

(*Suite*, voir p. 104.)

Transformations générales des carrés.

Tout carré *pair*, c'est-à-dire celui dont le côté contient un nombre pair de cases se divise en quatre quartiers par deux lignes médianes; cela posé, on a la proposition suivante :

Fig. 8. — Échange des quartiers.

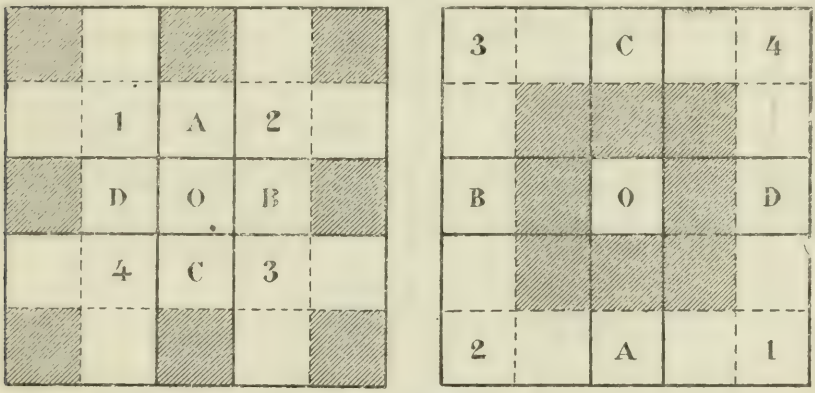


Tout carré pair reste magique, si l'on échange simultanément, sans les tourner, les quartiers opposés. Nous désignerons dans la suite les quartiers par les n°s 1, 2, 3, 4 comme

dans le carré à gauche *(fig. 8)*; en échangeant les quartiers 1 et 3, 2 et 4, on obtient le carré à droite. On constate immédiatement sur ces deux carrés que les rangées et les deux diagonales conservent les mêmes nombres dans un ordre différent. On démontre de même la proposition suivante : *Tout carré impair reste magique si l'on échange simultanément, sans les tourner, les quartiers opposés ainsi que les fragments opposés des deux rangées médianes* (fig. 9).

Ces transformations ne donnent pas de nouveaux carrés pour le carré de trois; mais pour celui de quatre, ils en

Fig. 9.



donnent d'autres que ceux que l'on aurait obtenus par rotation ou par symétrie. On démontre de même l'exactitude de la transformation suivante qui s'applique indistinctement aux carrés pairs et aux carrés impairs : *Tout carré reste magique si l'on échange deux horizontales, puis deux verticales qui sont toutes les quatre à la même distance du centre.* Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette proposition en construisant la figure.

Si l'on applique cette transformation après l'échange des quartiers opposés, on obtient encore un nouveau carré; par suite, tout carré donne par l'échange des rangées ou des quartiers trois autres carrés magiques. Nous donnons *(fig. 10)* les quatre carrés que l'on déduit d'un seul carré de quatre par les échanges que nous venons de démontrer.

Fig. 10. — Échanges des quartiers et des médianes.

a	*b*	*c*	*d*
e	*f*	*g*	*h*
i	*j*	*k*	*l*
m	*n*	*o*	*p*

N° 1.

a	*c*	*b*	*d*
i	*k*	*j*	*l*
e	*g*	*f*	*h*
m	*o*	*n*	*p*

N° 2.

k	*l*	*i*	*j*
o	*p*	*m*	*n*
c	*d*	*a*	*b*
g	*h*	*e*	*f*

N° 3.

f	*h*	*e*	*g*
n	*p*	*m*	*o*
b	*d*	*a*	*c*
j	*l*	*i*	*k*

N° 4.

Les Tables de Frénicle.

Les ouvrages de Frénicle ont été publiés dans un volume imprimé au Louvre en 1693 par les soins du mathématicien de la Hire, et réimprimés dans le tome V des *Mémoires de l'Académie des Sciences* (Paris, 1729). On y trouve la *Table générale des Quarrez de Quatre;* cette table de 45 pages in-4° contient les 880 solutions du problème pour tous les carrés faits avec les seize premiers nombres entiers; en tenant compte de la rotation et de la symétrie, on obtient donc 7040 carrés différents.

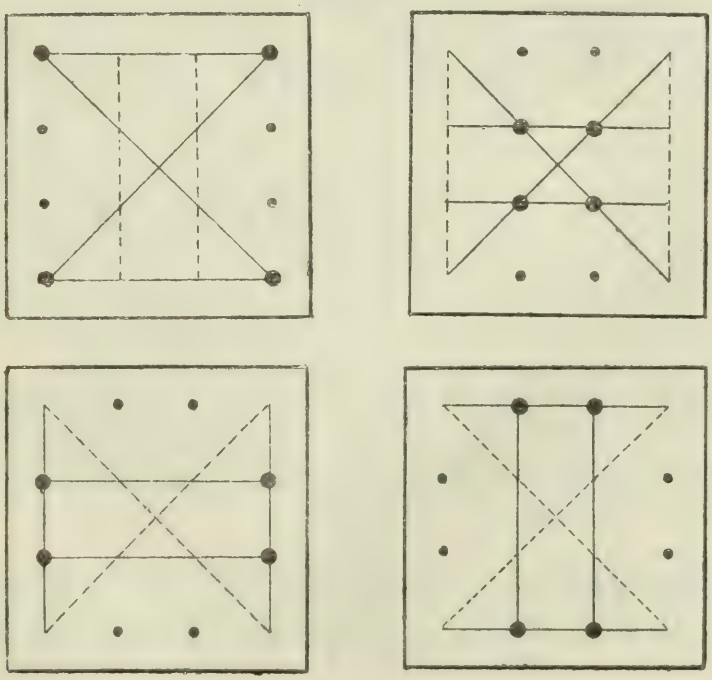
Mais, si l'on se reporte à la théorie des échanges que nous venons d'exposer, on s'aperçoit immédiatement que les tables de Frénicle peuvent être réduites au quart de leur étendue, et qu'il suffit, pour classer tous les carrés, de supposer que l'un quelconque des seize nombres du carré, le plus petit, par exemple, peut toujours être ramené dans l'une des cases

1 ou *2* *(fig. 5)*. En effet, d'après le principe de rotation, on peut toujours supposer un nombre quelconque dans le premier quartier, c'est-à-dire sur l'une des cases 1, 2, 5, 6; en outre, par symétrie, si le nombre choisi est placé sur la case 5, on peut le ramener sur la case 2, et par échange des quartiers, lorsqu'il est placé sur la case 6, on peut le ramener sur la case 1; d'ailleurs nous montrerons dans ce qui suit l'inutilité de cette table. Cependant on trouve dans le mémoire de Frénicle quelques propositions générales sur les carrés de quatre; nous en ajouterons quelques autres tirées de nos manuscrits et complétées par M. Delannoy.

Théorème I. — *Dans tout carré de quatre, la somme des angles du carré extérieur, celle des angles du petit carré intérieur, les sommes des angles de chacun des deux rectangles médians sont égales à la constante.*

Cette proposition se démontre immédiatement sur chacun des carrés *(fig. 11)*, en ajoutant les nombres placés sur les

Fig. 11.



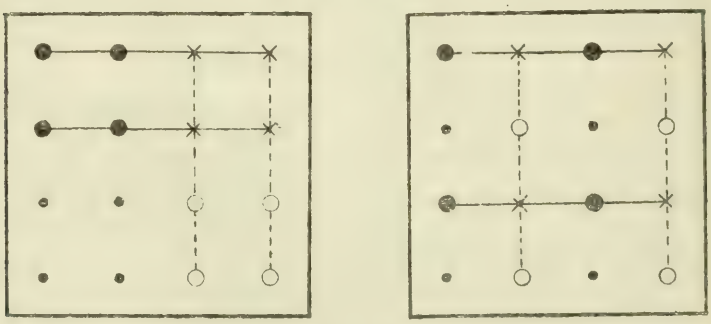
quatre traits pleins et en retranchant ceux qui sont placés sur les traits pointillés. On observera d'ailleurs que le second carré se déduit du premier par échange des quartiers opposés, et le quatrième du troisième par rotation.

Ainsi tout carré de quatre contient quatorze fois la constante sur des lignes régulières : quatre lignes, quatre colonnes, deux diagonales, deux rectangles médians, le petit carré intérieur et le grand carré extérieur.

Théorème II. — *Dans tout carré de quatre, la somme des quatre boules noires de l'un des carrés* (fig. 12) *égale la somme des boules blanches de l'autre carré; et la somme de l'un de ces carrés augmentée du carré adjacent formé de croix ou de points vaut deux fois la constante.*

La seconde partie de cette proposition se démontre en faisant la somme des nombres placés sur les traits pleins ou sur les traits pointillés, et la première partie en retranchant ces deux sommes l'une de l'autre. Nous désignerons sous le nom de *carrés de trois* chacun des quatre carrés formés

Fig. 12.

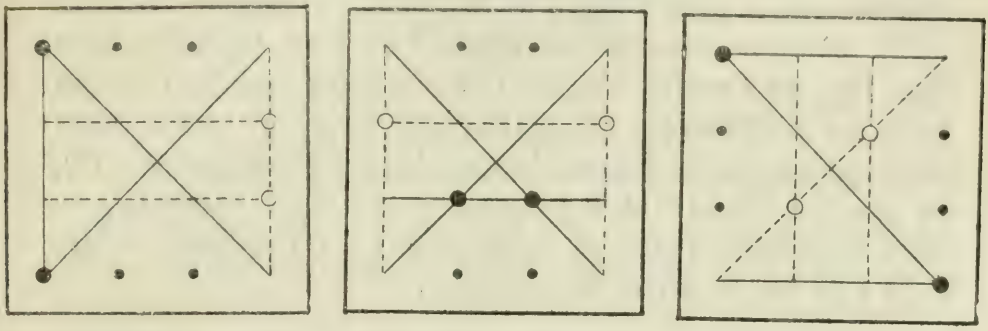


de boules noires ou blanches, de croix ou de points dans la partie de droite *(fig. 12)*. On observera d'ailleurs que ce carré se déduit du précédent par échange simultané des quatre rangées intérieures.

Théorème III. — *Dans tout carré de quatre la somme des extrémités d'une rangée extérieure égale la somme des nombres intérieurs de la rangée extérieure opposée ; la somme des extré-*

mités d'une rangée intérieure égale la somme des nombres intérieurs de la rangée voisine et la somme des extrémités d'une diagonale égale la somme des nombres intérieurs de l'autre diagonale (fig. 13).

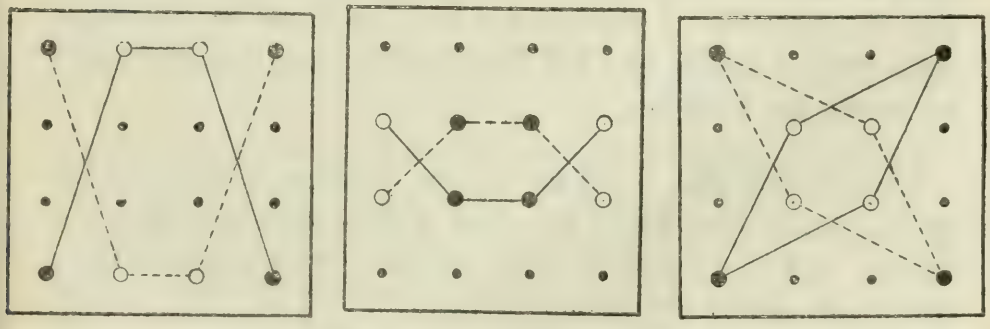
Fig. 13.



Pour démontrer cette proposition on ajoute les nombres contenus sur les trois traits pleins et l'on retranche les nombres situés sur les trois traits pointillés. On observera de plus que le troisième carré se déduit du précédent par l'échange des quartiers opposés.

Cette égalité entre deux boules noires et deux boules blanches donne lieu, par rotation et par symétrie, à dix équations homogènes qui remplacent avantageusement les dix équations de la définition des carrés magiques de

Fig. 14. *Fig. 15.* *Fig. 16.*



quatre. En effet, l'ensemble des quatre boules forme un grand trapèze *(fig. 14)*, un petit trapèze *(fig. 15)* ou un losange *(fig. 16)*. Par conséquent, si l'on ajoute les boules

blanches de l'un des grands trapèzes *(fig. 14)* aux boules noires de l'autre, on constate l'égalité des lignes extérieures; en ajoutant les boules blanches de chacun d'eux, on en déduit l'égalité des lignes extérieures au grand carré extérieur, et à l'un des rectangles moyens; puis par rotation on en déduit que les lignes extérieures, les colonnes extérieures, le grand carré et les deux rectangles médians ont la même somme. En considérant les deux petits trapèzes *(fig. 15)*, on conclut l'égalité des lignes intérieures, des colonnes intérieures, du petit carré intérieur et des deux rectangles moyens. En considérant les deux losanges *(fig. 16)*, on conclut l'égalité des diagonales, du carré intérieur, du carré extérieur; donc, en rassemblant les résultats de ces trois figures, le carré est magique.

Corollaire I. — Pour former un carré avec seize nombres pris au hasard, il faut qu'en prenant les sommes de toutes les combinaisons des nombres deux à deux, on trouve dix sommes de deux nombres égales à dix sommes de deux autres nombres.

Corollaire II. — Si parmi les seize nombres donnés, il en existe un seul plus petit que tous les autres, ou un seul plus grand que tous les autres, ces deux nombres ne peuvent occuper en même temps l'un la place d'une boule noire, l'autre la place d'une boule blanche pour les dix positions qui correspondent à chacun des huit trapèzes ou des deux losanges des *fig. 13*, *14*, *15* et *16*; car sans cela le théorème III ne serait pas vérifié.

Corollaire III. — Si parmi les nombres donnés, il en existe deux plus petits ou deux plus grands que tous les autres, ces deux nombres ne peuvent occuper en même temps les places de deux boules noires ou de deux boules blanches pour les dix positions que nous venons de considérer.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 111.)

CHAPITRE V

LE TRACÉ DES CONIQUES, CONNAISSANT LES SOMMETS

47. — Nous ne voulons, bien entendu, nullement aborder, dans ce chapitre, ou dans les suivants, une étude particulière, encore moins une étude générale des coniques; notre intention se bornera à présenter quelques propriétés intéressant le côté pratique que nous poursuivons dans ce travail; particulièrement le tracé des coniques et celui de leurs tangentes. Nous dirons aussi un mot de la détermination du centre de courbure dans les coniques. A ces points de vue divers, nous allons, successivement, considérer l'ellipse, l'hyperbole et la parabole.

Théorème. — *Soit* AA′ *un axe d'une ellipse* Γ; *on prend sur* Γ *un point* M *et l'on joint ce point aux extrémités* A, A′ *de l'axe considéré : la perpendiculaire à* AM, *au point* A, *rencontre* A′M *en* μ; *le lieu de* μ *est une droite* Δ *perpendiculaire à* AA′.

Cette proposition que nous avons rencontrée autrefois dans le développement d'une étude de géométrie comparée à laquelle nous avons donné le nom de *transformation réciproque* (*), peut s'établir élémentairement de la manière suivante.

Le point M étant situé sur une ellipse dont les axes ont pour longueur respectivement a et b, on a

$$\frac{MH^2}{AH.\,A'H} = \frac{b^2}{a^2}. \qquad (1)$$

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*; 1882.

D'autre part, les triangles semblables de la figure donnent

$$\frac{MH}{A'H} = \frac{\mu D}{A'D} \quad \text{et} \quad \frac{MH}{AH} = \frac{AD}{\mu D}. \qquad (A)$$

De ces deux égalités on déduit

$$\frac{\overline{MH}^2}{AH.\ A'H} = \frac{AD}{A'D}.$$

Cette relation, rapprochée de (1), prouve que

$$\frac{AD}{A'D} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ainsi, le lieu décrit par le point μ est une droite Δ, per-

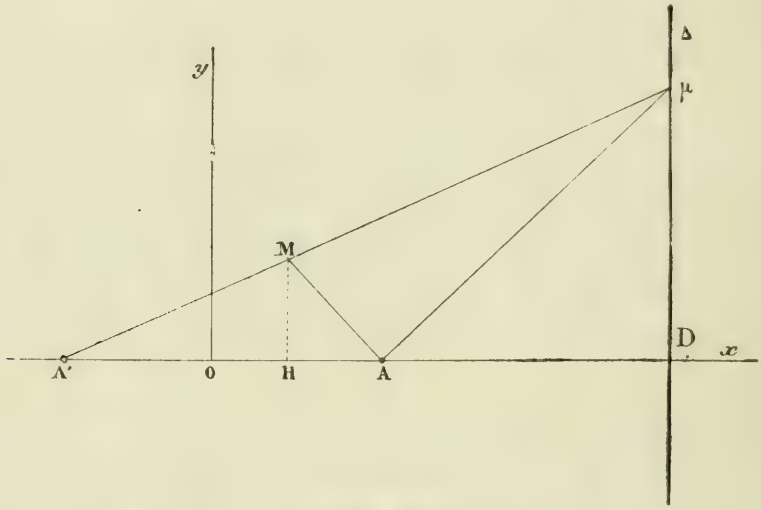


Fig. 32.

pendiculaire à A'A, en un point D qui partage extérieurement le segment AA' dans le rapport des carrés des axes de l'ellipse proposée.

On doit observer que la démonstration précédente s'applique manisfestement au cas où l'on ferait la construction indiquée, en prenant le petit axe de l'ellipse, au lieu du grand axe.

48. Problème. — *Construction de l'ellipse, point par point, au moyen de la règle et de l'équerre, connaissant trois sommets.*

Le théorème que nous venons de démontrer conduit immédiatement à la solution de ce problème.

Soient A, A′, B les trois sommets proposés ; appliquons au point B la construction que nous avons effectuée au point M avec les cordes AM, A′M. Nous aboutissons ainsi à un point C (l'angle BAC étant droit) qui appartient à Δ ; cette droite s'obtient donc en abaissant de C une perpendiculaire sur AA′.

D'après cela, si nous prenons un point μ, arbitrairement, sur Δ, avec la règle et l'équerre nous aurons le point cor-

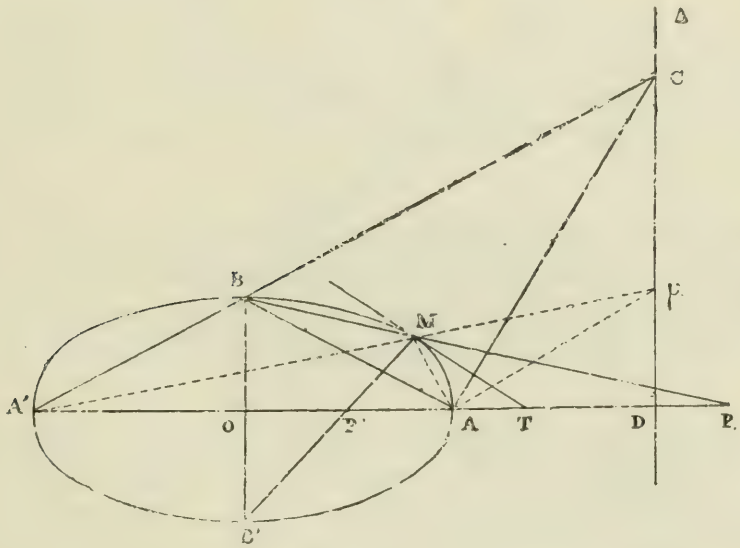


Fig. 33.

respondant M et nous pourrons, dans ces conditions, construire l'ellipse, point par point.

49. Construction de la tangente. — *Première solution.* — Pour expliquer la construction que nous allons indiquer pour la tangente à l'ellipse, par un point donné sur la courbe, au moyen de la règle et de l'équerre, considérons d'abord un cercle O et, dans ce cercle, deux diamètres rectangulaires AA′, *bb′*. Prenons sur la circonférence un point *m*, puis effectuons la construction indiquée par la figure ; nous allons montrer que la tangente *m*T passe par le milieu de PP′.

En effet, les angles $\widehat{1}$ et $\widehat{2}$ sont égaux, comme ayant le même complément $\widehat{\alpha}$. D'autre part, nous avons, pour des raisons évidentes,

$$\widehat{1} = \widehat{3} = \widehat{4}:$$

d'où nous concluons

$$\widehat{2} = \widehat{4}.$$

La droite mT est donc, dans le triangle rectangle PmP′, la médiane correspondant au côté PP′.

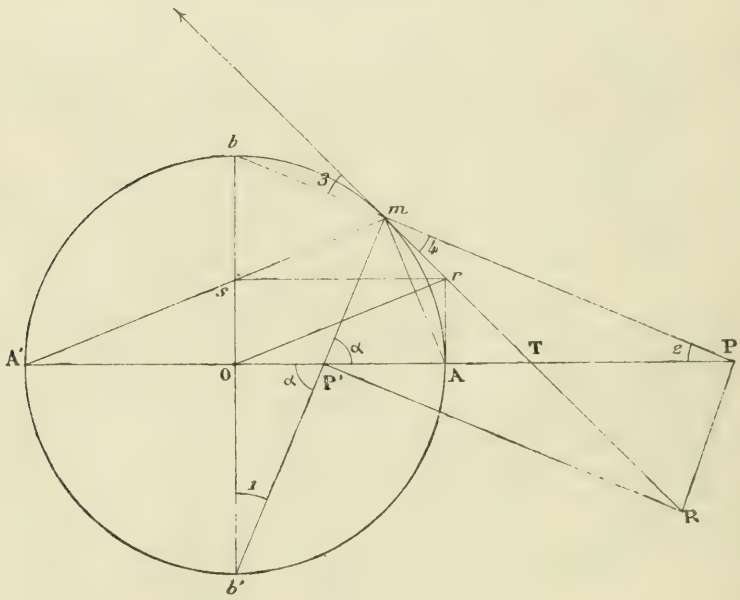


Fig. 34.

Reportons-nous maintenant à la *fig. 33* et considérons l'ellipse comme la projection du cercle principal, lorsqu'on a fait tourner celui-ci, autour de AA′, d'un angle convenable. Les droites mb, mb' ont alors pour projection, respectivement, MB, MB′ et celles-ci coupent AA′ précisément aux points P et P′ ; mT a pour projection MT, droite qui est la tangente à l'ellipse au point M′. D'après cela, MT passe par le milieu de PP′ et pour obtenir la tangente MT, avec la règle et l'équerre, il suffit de compléter le parallélogramme PMP′R; la seconde diagonale MR est la tangente cherchée.

Seconde solution. — Considérons dans la *fig. 34* le point de rencontre r, de mT, avec la tangente au cercle, au point A. La droite rO est perpendiculaire sur Am; conséquemment, elle est parallèle à A'm. Nous concluons de cette observation que les deux triangles sA'O, rOA sont égaux et que, par suite, rs est parallèle à AA'.

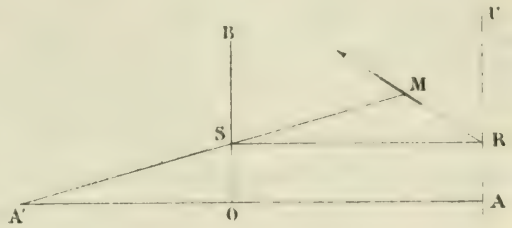


Fig. 35.

Si nous considérons maintenant, comme tout à l'heure, la projection de cette figure sur le plan de l'ellipse considérée, la droite rs se projette suivant une droite RS parallèle à AA' et nous déduisons, de cette remarque, la construction suivante.

Soit M *le point considéré sur l'ellipse, dont trois sommets* A, A', B *sont donnés ; au point* A *élevons* AU *perpendiculaire sur* AA' ; S *étant le point de rencontre de* MA' *avec l'axe* OB, *on mène* SR *parallèle à* AA' ; RM *est la tangente demandée.*

Remarque. — Les propriétés sur lesquelles nous avons basé les deux constructions précédentes sont *projectives*; nous pouvons donc faire observer que l'une et l'autre peuvent être appliquées dans le cas où l'on donne, en position et en grandeur, deux diamètres conjugués de la courbe.

50. Cas de l'hyperbole. — La construction que nous avons indiquée tout à l'heure pour le tracé de l'ellipse, point par point, au moyen de la règle et de l'équerre, subsiste pour l'hyperbole, avec une modification que nous allons faire connaître.

Montrons d'abord que le théorème qui sert de base à la construction citée est encore vrai pour l'hyperbole.

Reportons-nous à la *fig. 32* et supposons que, dans cette figure, μ représente un point de l'hyperbole. Nous avons donc

$$\frac{\overline{DO}^2}{a^2} - \frac{\overline{\mu D}^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{\overline{\mu D}^2}{b^2} = \frac{(DO + a)(DO - a)}{a^2} = \frac{DA' \,.\, DA}{a^2}.$$

D'autre part, les égalités (A) établies plus haut (§ 47) prouvent que

$$\frac{AH}{A'H} = \frac{\overline{\mu D}^2}{AD \,.\, A'D}.$$

Cette égalité, combinée avec la précédente, donne enfin

$$\frac{AH}{A'H} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ainsi, en admettant que le point μ soit mobile sur l'hyperbole dont les sommets réels sont A et A', et dont l'axe non

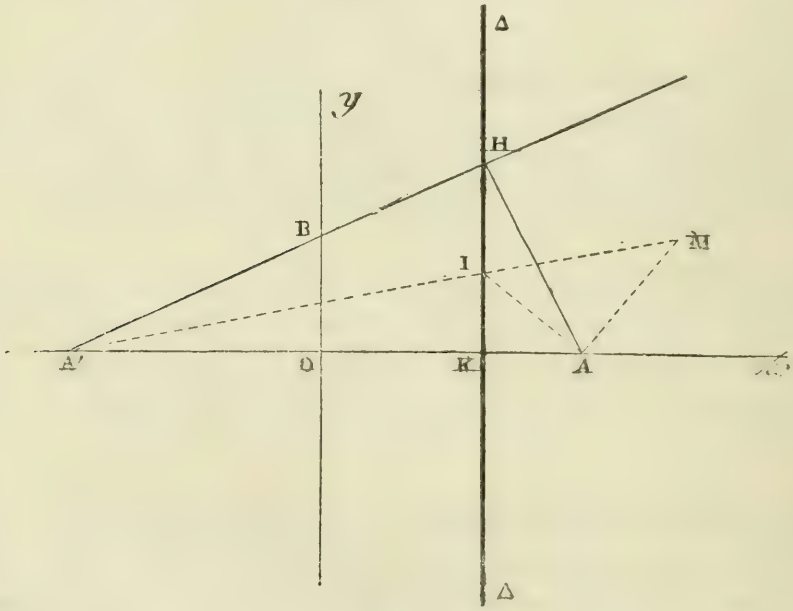


Fig. 56.

transverse a pour longueur b, le point correspondant M décrira une droite bien déterminée MH, perpendiculaire à AA', en un point H appartenant au segment AA' et tel que les segments AH, A'H soient entre eux dans le rapport de b^2 à a^2.

Il nous reste à montrer comment, d'après cette remarque, on peut réaliser, pour l'hyperbole, la construction de la courbe

point par point au moyen d'une règle et d'une équerre, les sommets de la courbe étant seuls connus.

Soient A, A′ et B les trois sommets donnés; on sait que A′B est une direction asymptotique de la courbe et l'on peut chercher le point qui, sur MH, correspond au point situé à l'infini, sur l'hyperbole, dans la direction A′B. Ce point s'obtient en abaissant sur A′B la perpendiculaire AH. Si, du point H, on abaisse HK perpendiculaire sur AA′, on obtient une droite Δ qui représente le lieu géométrique des points correspondants de l'hyperbole, conformément à la loi géométrique proposée plus haut.

D'après cela, si l'on prend sur Δ un point I et si l'on effectue la construction indiquée par la figure ci-dessus, au point I correspond (l'angle IAM étant droit) un point M de l'hyperbole.

51. Remarque. — Nous ne voulons faire allusion au tracé de la tangente à l'hyperbole, avec la règle et l'équerre, en un point pris sur la courbe, que pour rappeler que cette construction est très connue. Elle résulte immédiatement de la propriété fondamentale en vertu de laquelle la tangente à l'hyperbole est partagée en deux parties égales par le point de contact et les asymptotes.

(A suivre.)

QUESTION 127

Solution par E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

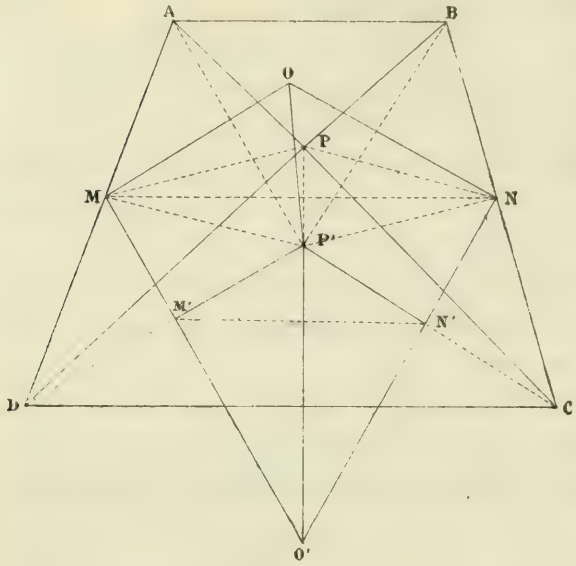
On considère un trapèze ABCD, *dans lequel les diagonales* AC, BD *se coupent orthogonalement en* P. *Soit pris le point* P′ *symétrique de* P, *par rapport à la parallèle équidistante des bases. Démontrer que les cercles* P′AB, P′CD *sont tangents.* (G. L.)

Soit MN la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles. Joignons le point P′ aux points A, B, C, D, M, N, et le point P aux points M et N; on a :

$$MP = MP' = \frac{AD}{2}.$$

$$NP = NP' = \frac{BC}{2}.$$

Les deux triangles AP'D, BP'C sont donc rectangles; par suite, les perpendiculaires élevées sur les milieux de leurs côtés passent respectivement en M et NSoient O et O' les centres des cercles P'AB, P'CD; il suffit de prouver que les trois points O, O', P' sont en ligne droite. Or les deux quadrilatères O'MON, O'M'P'N' sont homothétiques et cette remarque établit la proposition en question.



QUESTION PROPOSÉE

183. — Par un point S on mène deux tangentes SA, SB à une ellipse de foyers F et F'. Démontrer les relations :

$$\frac{\overline{SF}^2}{\overline{SF'}^2} = \frac{FA \,.\, FB}{F'A \,.\, F'B}; \qquad \frac{\overline{SA}^2}{\overline{SB}^2} = \frac{AF \,.\, AF'}{BF \,.\, BF'}.$$

(E. Vigarié.)

Ces deux relations très simples ont été évidemment observées déjà ; elles résultent d'ailleurs immédiatement des propriétés connues (théorème de Poncelet et autres) relatives aux foyers et aux tangentes issues d'un point à une conique. Mais elles sont remarquables et susceptibles d'une démonstration élémentaire des plus simples; nous les proposons, pour ce motif, comme exercice. G. L.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 13426-5.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINEE

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

(*Suite*, voir page 121.)

66. — Nous allons appliquer les formules (159) à deux exemples. Soit l'équation :

$$3y^2 - 12xy + 12x^2 + 7y - 8x - 18 = 0,$$

qui a, pour première solution

$$y' = 1,\ x' = 2.$$

On a :

$$a = 3,\ b' = -6,\ d = 7,\ f = -8,\ \pi = 3.$$

$$\frac{a}{\pi} = 1,\ \frac{b'}{\pi} = -2,\ \frac{b'd - af}{\pi} = -6.$$

et (151) devient :

$$ss' - 2r's' = -6.$$

Les valeurs de σ' sont donc : 1, 2, 3, 6, d'où les quatre équations :

$$\sigma' = 1 \ldots s - 2r' = -6 \ldots \sigma = 0 \quad \ldots \rho' = 3,$$
$$\sigma' = 2 \ldots s - 2r' = -3 \ldots \sigma = -3 \ldots \rho' = 0,$$
$$\sigma' = 3 \ldots s - 2r' = -2 \ldots \sigma = 0 \quad \ldots \rho' = 1,$$
$$\sigma' = 6 \ldots s - 2r' = -1 \ldots \sigma = -1 \ldots \rho' = 0;$$

en regard de chacune desquelles nous indiquons les valeurs correspondantes de σ et ρ'.

On a $b'd - af = -18$, $-2ay' - 2b'x' - d = 11$, et l'équation (156) devient :

$$-\frac{18}{\sigma'}r + \sigma' t = \rho'\sigma' + 11,$$

d'où résultent les quatre équations :

$\sigma' = 1, \sigma = 0, \quad \rho' = 3, -18r + t = 14, \rho = 0, \tau = 14, \pi' = 1$
$\sigma' = 2, \sigma = -3, \rho' = 0, -9r + 2t = 11, \rho = -1, \tau = 1, \pi' = 1$
$\sigma' = 3, \sigma = 0, \quad \rho' = 1, -6r + 3t = 14, \ldots\ldots\ldots\ldots$
$\sigma' = 6, \sigma = -1, \rho' = 0, -3r + 6t = 11, \ldots\ldots\ldots\ldots$

que nous faisons accompagner des valeurs correspondantes de σ', σ, ρ', ρ, τ et π'.

Les deux dernières des quatre équations précédentes doivent être rejetées comme ne pouvant être résolues.

Les formules (159) seront donc :

$$y = 1 + (\rho + \sigma'\omega)(\sigma - 2\tau - \frac{36}{\sigma'}\omega),$$

$$x = 2 + (\rho + \sigma'\omega)(\rho' - \tau - \frac{18}{\sigma'}\omega,)$$

d'où dous déduisons les valeurs :

$$1^\circ \quad y = 1 - \omega(28 + 36\omega)$$
$$x = 2 - \omega(11 + 18\omega)$$
$$2^\circ \quad y = 1 - (-1 + 2\omega)(5 + 18\omega)$$
$$x = 2 - (-1 + 2\omega)(1 + 9\omega)$$

67. — Résolvons encore l'équation :

$$y^2 + y + 60x + 120 = 0.$$

On a :

$$a = 1,\ b' = 0,\ d = 1,\ f = 60,\ \pi = 1,$$

$$\frac{b'd - af}{\pi} = -60,\ \frac{a}{\pi} = 1,\ \frac{b'}{\pi} = 0;\ y' = 0,\ x' = -2$$

formant une première solution; (151) devient :

$$ss' = -60.$$

Les valeurs de σ et σ' sont

$$\sigma = -60, -30, -20, -15, -12, -10, -6, -5, -4, -3, -2, -1.$$

$$\sigma' = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.$$

ρ' reste indéterminé, et l'équation (156) devient

$$-\frac{60}{\sigma'}r + \sigma' t = \rho'\sigma' - 1$$

ou

$$\frac{60}{\sigma'}r - \sigma'(t - \rho') = 1.$$

Nous devons rejeter toutes les valeurs de σ' qui donnent un facteur commun aux expressions $\frac{60}{\sigma'}$, et σ'. Ces valeurs sont

$$\sigma' = 2;\ 6;\ 10,\ 30.$$

Il ne nous reste donc plus que les huit valeurs suivantes :

$\sigma = -60, -20, -15, -12, -5, -4, -3, -1.$
$\sigma' = 1, 3, 4, 5, 12, 15, 20, 60.$

d'où les huit équations

$$\sigma' = 1 \ldots 60r - (t - \rho') = 1 \ldots \rho = 0, \ \tau - \rho' = -1,$$
$$\sigma' = 3 \ldots 20r - 3(t - \rho') = 1 \ldots \rho = 2, \ \tau - \rho' = 13,$$
$$\sigma' = 4 \ldots 15r - 4(t - \rho') = 1 \ldots \rho = 3, \ \tau - \rho' = 11,$$
$$\sigma' = 5 \ldots 12r - 5(t - \rho') = 1 \ldots \rho = 3, \ \tau - \rho' = 7,$$
$$\sigma' = 12 \ldots 5r - 12(t - \rho') = 1 \ldots \rho = 5, \ \tau - \rho' = 2,$$
$$\sigma' = 15 \ldots 4r - 15(t - \rho') = 1 \ldots \rho = 4, \ \tau - \rho' = 1,$$
$$\sigma' = 20 \ldots 3r - 20(t - \rho') = 1 \ldots \rho = 7, \ \tau - \rho' = 1,$$
$$\sigma' = 60 \ldots r - 60(t - \rho') = 1 \ldots \rho = 1, \ \tau - \rho' = 0,$$

et $\pi' = 1$.

Les formules (159) deviennent

$$y = \sigma(\rho + \sigma'\omega),$$
$$x = -2 + (\rho + \sigma'\omega)\left(\rho' - \tau - \frac{60}{\sigma'}, \omega\right),$$

d'où les huit séries de solutions

$$\begin{aligned}
1^\circ \ y &= -60\omega \\
x &= -2 - \omega(-1 + 60\omega) \\
2^\circ \ y &= -20\,(2 + 3\omega) \\
x &= -2 - (2 + 3\omega)(13 + 20\omega) \\
3^\circ \ y &= -15(3 + 4\omega) \\
x &= -2 - (3 + 4\omega)(11 + 15\omega) \\
4^\circ \ y &= -12(3 + 5\omega) \\
x &= -2 - (3 + 5\omega)(7 + 12\omega) \\
5^\circ \ y &= -5(5 + 12\omega) \\
x &= -2 - (5 + 12\omega)(2 + 5\omega) \\
6^\circ \ y &= -4(4 + 15\omega) \\
x &= -2 - (4 + 15\omega)(1 + 4\omega) \\
7^\circ \ y &= -3(7 + 20\omega) \\
x &= -2 - (7 + 20\omega)(1 + 3\omega) \\
8^\circ \ y &= -(1 + 60\omega) \\
x &= -2 - \omega(1 + 60\omega).
\end{aligned}$$

(A suivre.)

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT

RESTAURÉS ET PUBLIÉS SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX ET INÉDITS

Par M. **Édouard Lucas.**

(*Suite*, voir p. 130.)

Des carrés à quartiers égaux.

Lorsque la somme des angles de l'un des quartiers est égale à la constante, il en est de même des trois autres, ainsi que cela résulte immédiatement du théorème II; on dit alors que le carré est à *quartiers égaux (fig. 17)*. On a ainsi cinq petits carrés ombrés dont la somme est égale

Fig. 17.

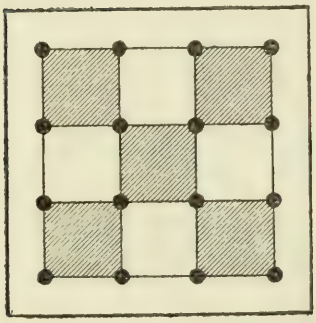


Fig. 18.

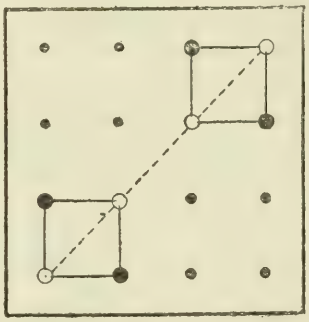
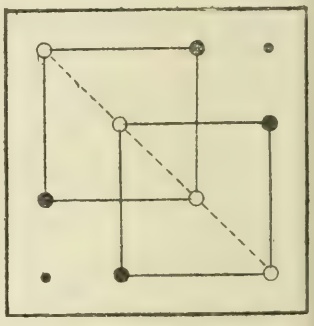


Fig. 19.



à la constante. Ces carrés possèdent plusieurs propriétés qui viennent s'ajouter aux précédentes, et permettent de trouver, de vingt-quatre manières différentes, quatre nombres placés régulièrement dont la somme est toujours égale à la constante.

En effet, si l'on ajoute deux quartiers opposés et si l'on retranche la diagonale commune, on voit immédiatement que la somme des boules noires du rectangle diagonal *(fig. 18)* égale la constante; réciproquement si la somme des quatre boules de ce rectangle est égale à la constante, les quartiers sont égaux.

D'autre part, si l'on remplace les quartiers opposés *(fig. 18)*

par les carrés de trois *(fig. 19)*, on démontre encore que si l'un de ces carrés est égal à la constante, il en est de même de tous les autres et d'un rectangle diagonal, et réciproquement. Ainsi donc, dans tout carré de quatre, lorsque l'un des carrés ou des rectangles des *fig. 17, 18, 19* est égal à la constante, il en est de même des neuf autres obtenus par rotation ou par symétrie.

Voici quatre autres propriétés des carrés à quartiers égaux sur les égalités à somme variable entre vingt-quatre groupes de deux boules noires et de deux boules blanches correspondantes. Elles sont indiquées sur les *fig. 20, 21, 22 et 23.*

Fig. 20.

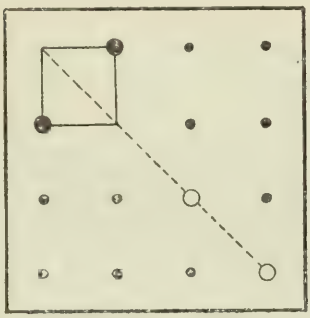


Fig. 21.

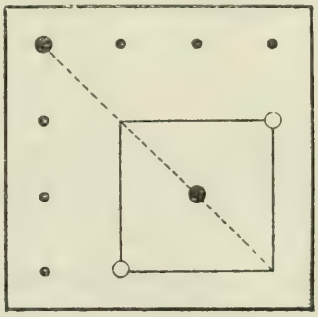


Fig. 22.

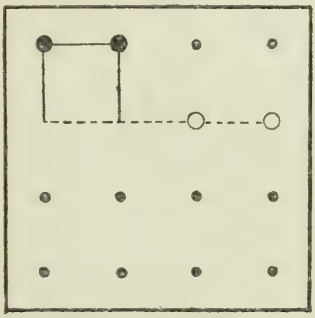
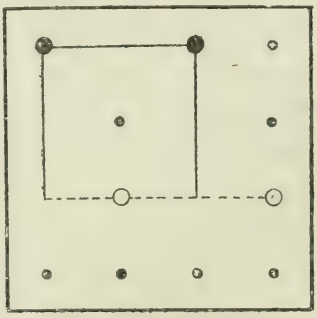


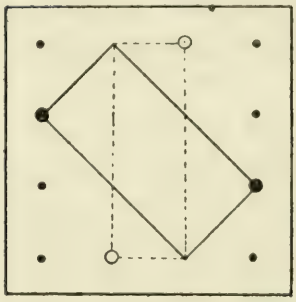
Fig. 23.



Ces propriétés se démontrent immédiatement en ajoutant les nombres situés aux angles de l'un des carrés où se trouvent deux boules noires et en retranchant la diagonale ou la ligne représentée en traits pointillés ; ces figures se transforment les unes dans les autres par échange simultané des quartiers ou des rangées intérieures.

Les deux propositions qui correspondent aux *fig. 20 et 21* m'ont été indiquées par M. Delannoy, les deux autres figures sont tirées des manuscrits de Fermat.

Fig. 24.



On a encore une autre égalité entre deux boules blanches et deux boules noires *(fig. 24)* ; on la démontre en ajoutant les boules du rectangle diagonal représenté en traits pleins et en retranchant celles du rectangle médian figuré en traits pointillés ; les quatre boules sont aux sommets d'un carré. Nous verrons plus loin que, dans le cas général, il ne saurait exister d'autres égalités de ce genre.

La table d'addition.

Ainsi que nous l'avons vu, il résulte des considérations de rotation et de symétrie, et des deux premiers échanges par rangées ou par quartiers que l'on peut toujours supposer l'un des nombres quelconques du carré dans le premier quartier sur l'une des cases 1 ou 2 ; ces remarques s'appliquent à tous les carrés et donnent lieu à leur classification naturelle (*). Pour dresser une table des carrés de quatre, il suffit donc de ne considérer que ceux qui ont le plus petit nombre sur la case 1 ou sur la case 2. Mais, pour les carrés à quartiers égaux, cette table devient inutile, puisque l'on peut les déduire tous des transformations régulières d'une *table d'addition.*

Formons avec quatre nombres quelconques a, b, c, d et quatre autres nombres quelconques p, q, r, s, une table d'addition, comme celle de Pythagore pour la multiplication, mais en adoptant cette notation que ap, par exemple, signifie la somme et non le produit de a et p *(fig. 25)*.

(*) Suivant une remarque de M. Delannoy, Frénicle aurait rangé la table des carrés suivant la grandeur du nombre se trouvant sur la case 1, et pour les carrés ayant le même nombre dans cette case, d'après le nombre situé sur la case 6 (contiguë en diagonale).

Si l'on échange deux lignes ou deux colonnes quelconques, les seize nombres de la table changent de place mais non de valeur ; il en est de même si l'on remplace les lignes par les colonnes, ou inversement ; on obtient de cette façon $2(1.2.3.4)^2$ ou 1152 tables d'addition distinctes, si les seize nombres de la table sont différents ; d'ailleurs il ne peut y avoir d'autres solutions si les nombres donnés sont arbitraires, puisque l'on peut supposer que p, q, r, s et a, b, c, d représentent des nombres mesuré par des unités d'espèces différentes.

Fig. 25.

	a	b	c	d
p	ap	bp	cp	dp
q	aq	bq	cq	dq
r	ar	br	cr	dr
s	as	bs	cs	ds

Ainsi donc, toute table d'addition de 16 nombres donne 1152 tables distinctes dans le cas général ; mais on doit diviser ce nombre par 8 et le ramener à 144 si l'on ne considère pas comme différentes les sept tables déduites d'une première par rotation ou par symétrie.

Ces tables jouissent de propriétés remarquables ; on observera d'abord que la somme des termes de chacune des diagonales reste constante et égale à

$$a + b + c + d + p + q + r + s;$$

plus généralement, si l'on prend quatre termes de telle sorte qu'il n'y en ait pas deux dans une même ligne ou dans une même colonne, la somme des termes reste constamment la même et égale à la précédente. D'ailleurs le nombre de ces groupes de quatre termes est évidemment égal au nombre des permutations 1.2.3.4 des quatre premiers nombres, comme dans le problème des *quatre tours* sur l'échiquier de quatre cases de côté.

De plus, si l'on considère quatre nombres placés aux sommets d'un carré ou d'un rectangle quelconque de la table, on reconnaît immédiatement que la somme des nombres d'une diagonale égale la somme des nombres de l'autre diagonale ; on a ainsi trente-six égalités à deux boules et pas plus, dans le cas général. On a donc le théorème suivant :

Toute table générale d'addition de seize nombres donne 1152 *tables distinctes; elle renferme toujours vingt-quatre sommes de quatre nombres égales à la constante, et trente-six égalités de sommes variables entre deux groupes de deux nombres.*

On a évidemment un théorème semblable pour une table de multiplication, en remplaçant les sommes par des produits.

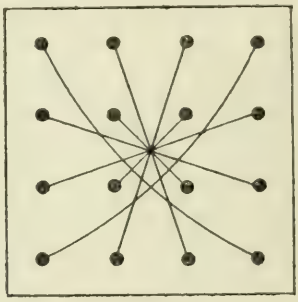
Le Carré magico-magique.

Prenons l'une quelconque des tables d'addition, échangeons entre eux les nombres opposés par rapport au centre du carré, en exceptant ceux des diagonales; puis, échangeons le quartier supérieur de droite avec le quartier inférieur de gauche; nous obtenons le *carré fondamental magico-magique*

Fig. 26.

ap	cs	dq	br
dr	bq	as	cp
bs	dp	cr	aq
cq	ar	bp	ds

Fig. 27. — Type A.



de Fermat. Ce carré a ses quartiers égaux. A toute table d'addition correspond un carré à quartiers égaux, les vingt-quatre égalités à la constante donnent les vingt-quatre égalités à quatre boules que nous avons démontrées plus haut; il en est de même pour les trente-six égalités à deux boules. Réciproquement, tout carré à quartiers égaux donne naissance à une table d'addition, puisque par la transformation inverse les trente-six égalités à deux boules sont les conditions d'existence d'une table d'addition. On a donc le théorème suivant:

Pour former avec seize nombres pris au hasard un carré magique à quartiers égaux, il faut et il suffit que l'on puisse former avec ces seize nombres une table d'addition; et si tous les nombres sont distincts, le nombre des carrés est égal à 1152 *ou* 8×144.

Il résulte encore de la remarque qui termine le paragraphe

précédent que l'on peut construire des carrés magiques tels que les sommes soient remplacées par des produits; il suffit de remplacer la table d'addition par une table de multiplication correspondante ap désignant alors le produit et non la somme de a et p.

Le problème des seize officiers.

Le problème précédent donne la solution du problème des seize officiers de quatre grades et de quatre régiments différents, qu'il s'agit de ranger en carré de telle sorte que dans chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale, il n'y ait pas deux officiers de même grade ou de même régiment. Si l'on représente les officiers de grades a, b, c, d, par les cartes *as*, *roi*, *dame*, *valet* du jeu de piquet, et les régiments p, q, r, s, par les couleurs *carreau pique*, *cœur*, *trèfle*, on les range d'abord de telle sorte que les as les rois, les dames, les valets soient respectivement sur les mêmes lignes (ou colonnes) tandis que les carreaux, piques, cœurs et trèfles soient respectivement dans les mêmes colonnes (ou lignes). Puis on applique la transformation de Fermat donnant naissance au carré magico-magique. En d'autres termes, on échange deux à deux les quatre groupes de cartes opposées du carré qui ne sont pas dans les diagonales; puis, sans les tourner, deux quartiers opposés. On obtient ainsi 1152 solutions. (Voir les *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet (3e édition, p. 202.)

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 137.)

52. Cas de la parabole. — Le tracé que nous allons indiquer pour la parabole repose sur la remarque suivante :

Soit A *un point quelconque d'une parabole de sommet* O; *on joint* OA, *puis, à cette droite, on élève une perpendiculaire* OA', *jusqu'à sa rencontre avec le diamètre du point* A; *le lieu de ce point* A', *quand* A *décrit la parabole proposée, est une droite perpendiculaire à l'axe.*

Cette propriété résulte immédiatement de la relation connue

$$y^2 - 2px = 0. \qquad (1)$$

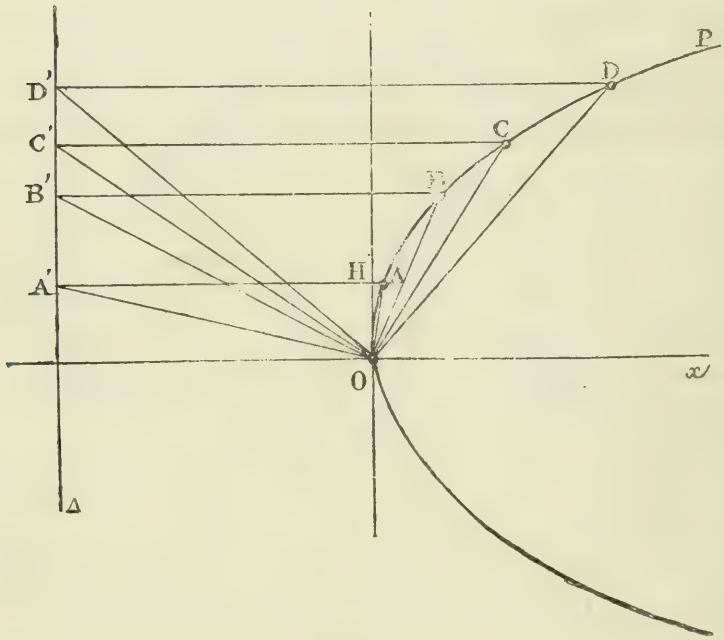


Fig. 37.

Le triangle rectangle A'OA donne, en effet,

$$OH^2 = AH \,.\, A'H,$$

ou

$$y^2 = x \,.\, A'H. \qquad (2)$$

En comparant (1) et (2), on a

$$A'H = 2p,$$

et cette égalité établit la proposition énoncée.

Par conséquent, si l'on donne les conditions essentielles pour déterminer une parabole, savoir : 1° le sommet, 2° l'axe ox, 3° un point A de la courbe ; on pourra, d'après ces données, construire la droite Δ, puis déterminer comme

l'indique la figure, les points A, B, C, D,... de la parabole qui correspondent aux points A′, B′, C′, D′,.., de Δ. Dans cette construction, les angles AOA′, BOB′ COC′,... sont droits.

53. Construction de la tangente. — Le tracé de la tangente est une conséquence évidente de la propriété de la sous-tangente à la parabole. Supposons que M soit le point donné; si nous projetons A sur ox, en R, la tangente en M passe par le point T, symétrique de Q par rapport à O. D'après cela : on projette A sur oy, au point R, on joint MO et l'on mène TR parallèlement à MO; la droite MT est la tangente demandée.

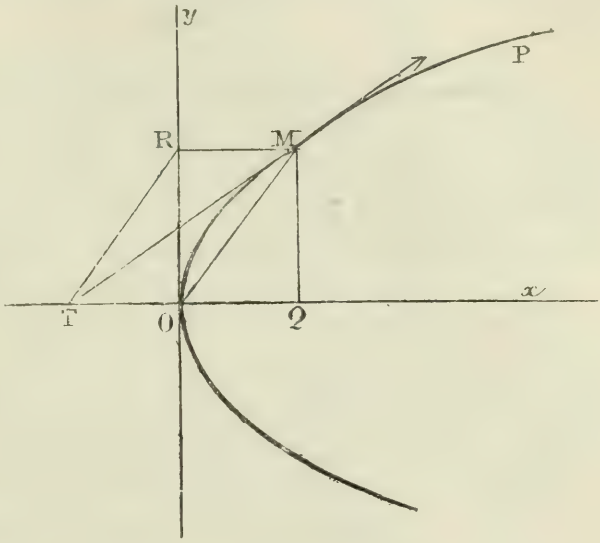


Fig. 38.

54. Remarque. — On peut d'ailleurs construire la parabole, simultanément point par point et tangente par tangente, de la manière suivante.

Imaginons trois points O′OO″ sur une droite et tels que l'on ait

$$OO' = O'O'',$$

et soient Δ Δ′ les perpendiculaires menées à OO′ aux points O, O′.

Par O″ menons une transversale qui rencontre Δ en A et Δ′ en A′. La parallèle à OO′ menée par A et la perpendiculaire à AA′ passant par A′ se coupent en un point I.

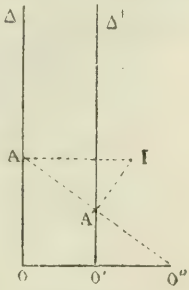


Fig. 3

Lorsque AA′ tourne autour du point O″, le point I décrit

une parabole et la droite IA′ représente la tangente à cette courbe au point I. *(A suivre.)*

ÉPURE DU CONCOURS DE 1885

POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

On donne dans le premier dièdre un point A *dont la cote* $\alpha a'$ *est* $19^m/^m$, *l'éloignement* αa *est* $22^m/^m$, *et un point* G *dont la cote* $\gamma g'$ *est* $53^m/^m$, *l'éloignement* γg *est* $48^m/^m$, *et dont la distance au plan de profil de* A *vers la droite est* $52^m/^m$. *La droite* AG *est une diagonale du parallélépipède rectangle dont une face est horizontale, une autre parallèle au plan vertical, trouver : 1° les projections du parallélipipède, 2° celles de la sphère qui lui est circonscrite. — Par les milieux* M, N, P *des trois arêtes* DH, BC, EF *on fait passer un plan, trouver les intersections de ce plan avec le parallélipipède, avec la sphère, et les vraies grandeurs de ces sections.*

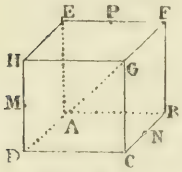


Fig. 1

Pour la mise à l'encre, on supprimera la portion de la sphère située au-dessus du plan sécant, et la portion du parallélipipède située au-dessous.

La construction des projections du parallélipipède, que nous désignons par π, ne présente aucune difficulté.

Le centre de la sphère circonscrite est le centre o, o' de π; la vraie grandeur $o'a'_1$ de son rayon est obtenue en amenant de front la demi-diagonale oa, $o'a'$.

Pour obtenir dans le plan MNP l'horizontale passant par m, m', nous cherchons son point i', i, situé sur $n'p'$, np; on voit aisément que l'horizontale obtenue $m'i'$, mi passe par o, o'. Il en résulte que le plan MNP passe par le centre de π. Nous avons aussi construit la droite de front nj, $n'j'$; elle passe par o, o'.

En appliquant la construction connue pour obtenir une projection d'un point situé dans un plan, connaissant l'autre, de la projection q' d'un sommet de la section, on déduit la

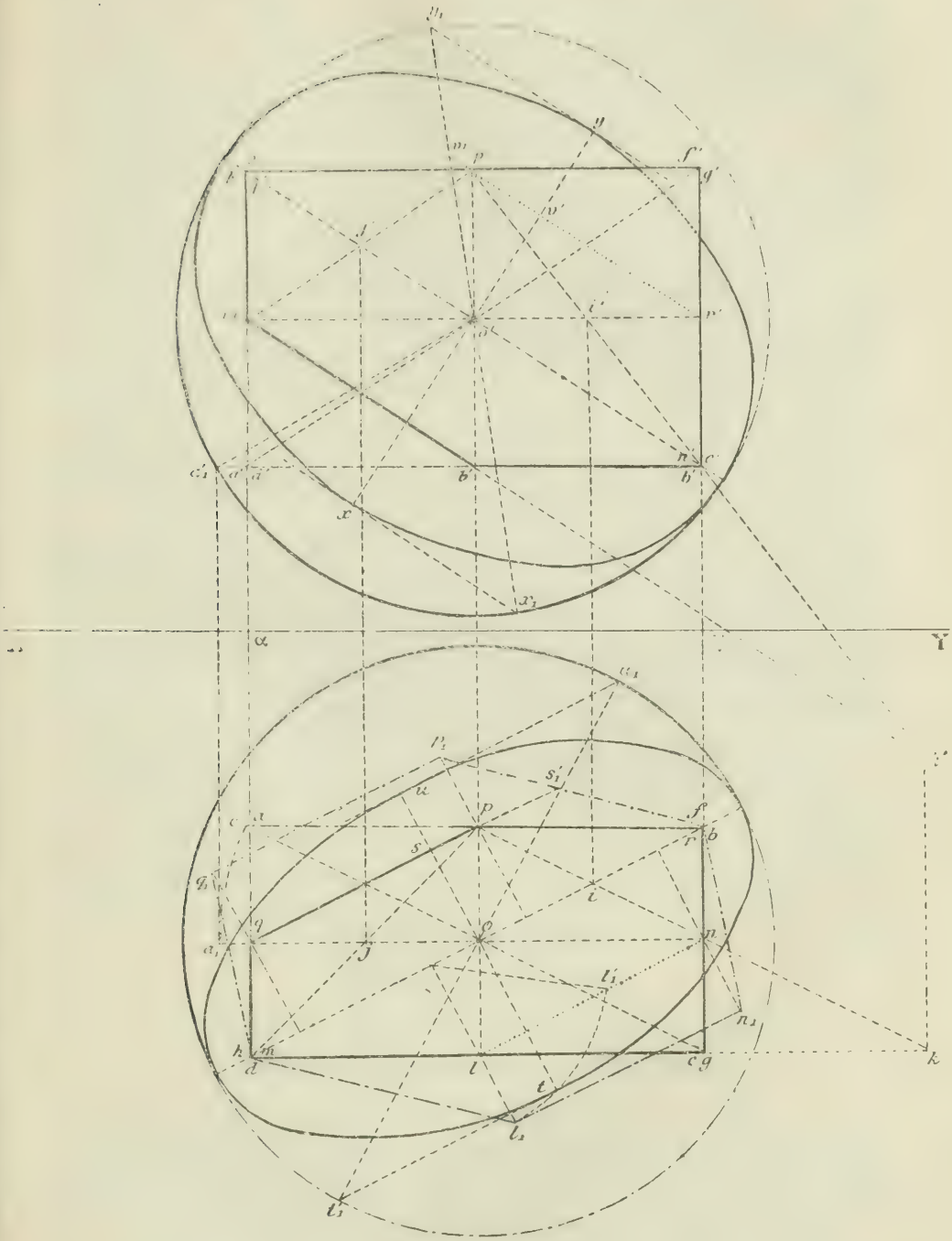


Fig 2

projection q au milieu de ad (*). On a de même le sommet r, r' de la section au milieu de bf, $b'f'$. Son sommet l, l. sur cd, $c'd'$ est obtenu en appliquant la méthode du plan projetant horizontalement l'arête; l'intersection auxiliaire $m'k'$ coupe $c'd'$ en l'. Comme ck égale $p'f'$, $c'k'$ égale $c'p'$; d'où $c'k'$ égale les deux tiers de $i'k'$; donc $c'l'$ égale les deux tiers de $i'm'$ ou égale $o'm'$, et par suite l, l' est au milieu de cd, $c'd'$. Les côtés opposés de la section sont égaux et parallèles.

Le plan MNP coupe la sphère selon un grand cercle. Les grands axes des ellipses projections de la section sont les diamètres projetés sur mi et $n'j'$. Leurs petits axes sont tu et xy. On obtient ainsi tu : le diamètre projeté sur ou coupe pq, $p'q'$ en un point S, projeté en s; le rabattement de S, autour de l'horizontale projetée en os, est s'_1; ss'_1 égale $o'p'$; le diamètre OS coupe la sphère aux points rabattus en t'_1 et u'_1; d'où l'on déduit les extrémités t et u de l'axe tu.

La section de la sphère par le plan MNP, étant un grand cercle, est égale à l'un de ses contours apparents.

La section de π par le plan MNP est rabattue en $ml_1n_1rp_1q_1$ sur le plan horizontal autour de l'horizontale om, $o'm'$; la construction connue pour obtenir le rabattement l_1 d'un point ll' de cette section, est indiquée; ll'_1 égale $l'o'$.

La représentation est faite d'après les indications de l'énoncé.

ERNEST LEBON.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. JOHN S. MACKAY, *professeur à l'Académie d'Édimbourg.*

... A propos de la construction d'une moyenne proportionnelle donnée (*Journal*, année courante, p. 75) permettez-moi de vous signaler une source plus ancienne. Dans *Johannis*

(*) Par conséquent, le plan mené par les milieux de trois côtés non consécutifs de l'hexagone gauche formé par six arêtes consécutives d'un parallélépipède rectangle, passe par le centre de ce dernier et coupe les trois autres côtés en leurs milieux.

Wallis opera Mathematica, t. I (1693), p. 299-301, on trouve la traduction latine d'une lettre de Thomas Strode, datée nov. 3, 1684, dans laquelle se rencontre le passage suivant :

Invenire mediam proportionalem inter duas rectas; absque perpendicularis erectione.

Sunto $r = 8$, et $s = 2$, rectæ datæ.

Fiat $A\varepsilon = r = 8$, $\varepsilon C = r - s = 6$. Centris A et C, distantia $AB = r = 8$, ducantur arcus duo se mutuo intersecantes in B. Jungatur εB. Est $ea = \sqrt{rs}$ quæsita.

La lettre de Thomas Strode a été publiée en anglais antérieurement, dans le traité d'algèbre du docteur Wallis (*a Treatise of Algebra both historical and pratical*; London, 1685)...

Nota. — En publiant la construction que nous avait indiquée M. Bordage, nous pensions bien (nous l'avons dit p. 75 et rappelé p. 120) que cette construction devait être, connue, et depuis fort longtemps, comme le prouve l'obligeante communication de M. Mackay. Je dois encore ajouter que j'aurais pu m'assurer moi-même de ce fait, en consultant l'excellent traité de géométrie plane intitulé : *The Elements of Euclid; books* I *to* VI, by John S. Mackay; W. and R. Chambers London and Edinburgh, 1884, p. 353.

Nous avons tenu à respecter les notations mêmes employées dans la lettre de Thomas Strode; en lisant la communication précédente sur la figure de la page 75 il faut remplacer B par ε et E par B. G. L.

ÉCOLE NAVALE

Concours des 2 et 3 juin 1885.

Arithmétique.

I. — Calculer le rayon du cercle dont la surface vaut un hectare. — On n'emploiera que les deux premières décimales du nombre π et on ne conservera au résultat que les chiffres exacts.

II. — Démontrer que trois nombres impairs quelconques, A, B, C, ont le même plus grand commun diviseur que leurs demi-sommes deux à deux :

$$\frac{A+B}{2}, \quad \frac{A+C}{2}, \quad \frac{B+C}{2}$$

Algèbre.

On donne un triangle équilatéral ABC dont O est le centre de figure.

On joint AO, BO, CO, et on prolonge ces trois lignes d'une même longueur $OA' = OB' = OC' = x$.

On joint les trois points A', B', C' entre eux et aux sommets A, B, C, du triangle donné. — Désignant par R le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et par V le volume du tétraèdre qui aurait pour base le triangle équilatéral A'B'C et pour faces latérales les trois triangles isoscèles AB'C', BC'A', CA'B', on demande :

1° Les valeurs de x pour lesquelles V est équivalent aux $\frac{3}{8}$ du cube construit sur x : $V = \frac{3}{8}x^3$. Interpréter la valeur négative.

2° Les valeurs de x qui rendent V maximum ou minimum.

3° L'étude des variations de V, quand x varie de $-\infty$ à $+$ R.

Trigonométrie.

Dans un triangle rectiligne obliquangle ABC on donne :

$$A = 134^\circ\ 42'\ 48''$$
$$a = 144^m,\ 756$$
$$b = 98^m,\ 642$$

Calculer B, C, c.

Comme vérification, on calculera C par la formule

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

Géométrie.

1° Énoncer les théorèmes qui conduisent à la mesure du volume engendré par un polygone plan, tournant autour d'un axe situé dans son plan ;

2° Comment passe-t-on de la mesure du volume engendré par un secteur polygonal régulier à la mesure du volume d'un secteur sphérique?

3° Étant données deux circonférences O et O' et une direction fixe MN, par le centre de similitude S' de ces deux circonférences, on mène une sécante quelconque S'A'A et par les deux points homologues A et A' les deux cordes AB et A'B' parallèles à MN, on joint AB' et BA' qui se coupent en C.

1° Démontrer que si par le point C on mène une parallèle DE à MN, le lieu des points D et E est une circonférence. — En déduire que le lieu du point C est le diamètre de cette circonférence perpendiculaire à MN ;

2° Démontrer plus généralement que si par le point P qui divise AA dans un rapport donné $\frac{m}{n}$, on mène une parallèle PQRS à MN, le lieu des points P et S est une circonférence. — En déduire que le lieu des points Q et R est une ellipse dont le grand axe est le diamètre de cette circonférence perpendiculaire à MN.

Épure.

On donne une sphère dont le centre se trouve dans le premier dièdre à égale distance du plan horizontal et du plan vertical $\omega O = \omega O' = 50$ m/m et dont le rayon R = 25 m/m.

On demande de construire les projections d'un tronc de pyramide triangulaire ABC, A'B'C', satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les plans de base ABC, A'B'C', sont tangents à la sphère, parallèles à la ligne de terre et font un angle de 45° avec la partie postérieure du plan horizontal.

Les arêtes latérales AA', BB', CC', prolongées, passent par le point ω; elles sont tangentes à la sphère et font entre elles des angles égaux.

On placera l'arête AA' dans le plan de profil $O'\omega O$ et de manière à faire avec le plan horizontal le plus grand angle possible.

On indiquera les intersections de la sphère avec les faces du tronc de pyramide.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

FACULTÉ DE CAEN (*)

Composition du 4 avril 1885

Mathématiques.

1° Exposer la théorie de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier plus grand que 100, à moins d'une unité; en admettant comme préalablement démontrée la formule qui exprime la composition du carré d'une somme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

2° Calculer $\sin \frac{a}{2}$ et $\cos \frac{a}{2}$ sachant que $\sin a = -\frac{24}{25}$ et que l'arc a est compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.

Compositions du 16 avril 1885

Mathématiques.

1° Composition de deux forces parallèles et de sens contraire.

2° Résoudre les équations :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \qquad x + y = b.$$

Application :

$$a = 1^m177, \qquad b = 45°.$$

FACULTÉ DE GRENOBLE

Première série. — 1° Démontrer que :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

2° Connaissant les deux côtés parallèles et les deux diagonales d'un trapèze, calculer la surface, la hauteur, les côtés non parallèles.

Qu'arrive-t-il si les deux diagonales sont égales?

(*) Nous prions ceux de nos lecteurs qui sont en mesure de le faire, de vouloir bien nous adresser les différents sujets de composition proposés dans les examens : Baccalauréat, Licence, Concours divers.

Deuxième série. — On donne un cercle O, on mène deux tangentes diamétralement opposées AD, BC et une troisième tangente CD :

1° Démontrer que $AD \times BC = R^2$.

2° Mener CD de telle façon que le volume engendré par le trapèze ABCD, en tournant autour de AB, soit dans un rapport donné m avec le volume de la sphère engendrée par le cercle. Minimum de m.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

Compositions de la session d'août et d'octobre 1884.

PREMIÈRE SESSION D'AOUT

Physique.

Galvanomètre.

Chimie.

Lois de Berthelot.

Mathématiques.

I. — Étant donné un cercle O de rayon R et deux diamètres rectangulaires AB et CD, on suppose qu'on ait tracé quatre autres cercles dont chacun est tangent intérieurement au cercle O et tangent aux deux diamètres AB et CD. On demande d'évaluer ce qui reste de la surface du cercle O lorsqu'on en a enlevé les surfaces des quatre autres cercles. Appliquer la formule trouvée au cas ou R = 1 dm et calculer le résultat à un centimètre carré près.

II. — Sur la gorge d'une poulie fixe O passe une corde dont un brin supporte un poids de 150 kilog. et dont l'autre brin est tiré par une force F qui fait avec la verticale AN un angle de 60°. On demande de calculer la pression que supporte le point fixe O lorsque la machine est en équilibre.

SECONDE SESSION D'AOUT

Mathématiques.

I. — Étant donné un rectangle de base a et de hauteur b, déterminer une parallèle EF à AB et une parallèle GH à BC, situées à égale distance de AB et de BC et telles que l'aire du rectangle EHHD soit égale à celle d'un carré donné m^2.

II. — Un plan étant donné par ses deux traces αP et αQ, construire les projections d'une sphère de rayon donné tangente à ce plan et au plan horizontal de projection et dont le centre est situé à une distance donnée du plan vertical.

Physique.

Microscopes.

Histoire naturelle.

Aliments.

SESSION UNIQUE D'OCTOBRE

Compositions des 24 et 25 octobre.

Mathématiques.

I. — Un bassin a la forme d'un prisme droit dont la base est un octogone régulier. Le côté de cet octogone est de 8 mètres et l'eau s'élève à $0^m,70$ au-

dessus du fond. Evaluer en tonnes le poids de l'eau contenue dans ce bassin.

II. — Composition de deux forces parallèles et de même sens, de deux forces parallèles et de sens contraire. (24 octobre, matin.)

Physique.

I. — Dissolution des gaz dans les liquides.

II. — L'œil. Idée générale du mécanisme de la vision.

(24 octobre, soir.)

BREVET DE CAPACITÉ SCIENTIFIQUE

Mathématiques.

I. — Construire la projection d'une hélice; le cylindre sur lequel elle est tracée ayant son axe dans le plan vertical et perpendiculaire à la ligne de terre. Déterminer les projections de la tangente en un point quelconque.

II. — Les six éléments d'un triangle a, b, c, A, B, C sont liés, comme on sait par le système d'équations :

$$(1)\quad \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B \\ b = c \cos A + a \cos C \\ c = a \cos B + b \cos A \end{cases}$$

puis, par un autre système :

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

On demande de démontrer que les systèmes (1) et (2) sont équivalents, c'est-à-dire que des relations (1) on peut déduire les relations (2) et réciproquement.

Physique.

Passage de la lumière simple à travers un prisme. — Conditions d'émergence. — Décomposition de la lumière.

Chimie.

Carbonates de soude. — Fabrication de la soude artificielle.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES (AVRIL 1885)

FACULTÉ DE CLERMONT

Mathématiques.

1e Session. — I. Démontrer que les trois médianes d'un triangle quelconque se coupent en un même point. Même question pour les hauteurs.

II. Calculer tg $4a$ en fonction de tg a, sin $4a$ en fonction de sin a.

2e Session. — I. Somme des termes d'une progression géométrique.

II. Entre quelles limites varie la fraction $\dfrac{3x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 3x + 5}$

3e Session. — I. Étant donné un cercle, on mène deux sécantes rectangulaires AB, CD dont l'une CD est un diamètre; on divise la demi-corde EA en n parties égales. On demande de calculer la portion OM de la sécante CD, sachant que DM représente m divisions. On appellera a le rayon du cercle et l la longueur de la corde AB.

II. Calculer la somme des carrés de MF quand M varie de zéro à n, MF étant perpendiculaire à OM.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET (*)

FACULTÉ DE PARIS

(DEUX SÉRIES)

Compositions du 27 avril.

Mathématiques. I. — On donne le volume compris entre deux sphères concentriques $= \frac{4}{3}\pi a^3$. Connaissant la différence des rayons des deux sphères trouver le rayon de la plus grande.

II. — Démontrer qu'on peut toujours réduire à deux les forces en nombre quelconque appliquées à un corps solide.

Compositions du 28 avril.

Mathématiques. I. — Calculer, sans avoir recours aux tables de logarithmes, les valeurs des arcs x et y qui vérifient les deux équations :

$$x + y = a,$$
$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a.$$

dans lesquelles a est connu.

II. — La latitude de Paris étant de 48°50′, on considère une étoile dont la déclinaison est de + 80°; on demande de calculer les distances zénithales de cette étoile à son passage supérieur et à son passage inférieur au méridien de Paris.

Compositions du 29 avril.

Mathématiques. I. — Calculer les rayons des deux bases d'un tronc de cône, connaissant son volume, sa hauteur et la somme des rayons des bases.

II. — Inégalité des jours et des nuits.

Compositions du 30 avril.

Mathématiques. I. — On donne les longueurs a, b, c des trois côtés d'un triangle. On demande de déterminer sur le côté AC un point M de manière que le volume engendré par le triangle AMB tournant autour de AB soit équivalent au volume engendré par le triangle BMC tournant autour de BC. On calculera AM $= x$ en fonction de a, b, c.

---

*) Ces énoncés sont empruntés au recueil publié chez Croville-Morant, rue de la Sorbonne.

II. — On considère deux planètes et on représente par $2a$, $2a'$ les longueurs des grands axes des orbites qu'elles décrivent autour du Soleil; par T, T' les durées de leur révolution sidérale. Sachant que $\frac{a}{a'} = 3$, on demande de calculer, à 0,001 près, le rapport $\frac{T'}{T}$.

Compositions du 1er mai.

Mathématiques. I. — Déterminer les rayons des bases de deux cylindres droits de hauteurs respectives a et b, connaissant la somme S de leurs surfaces latérales et la somme V de leurs volumes.

II. — Angle de deux plans dont les traces horizontales sont parallèles.

Compositions du 2 mai.

Mathématiques.

I. — On considère le triangle BAC, rectangle en A et, les médianes BB' et CC' issues des sommets B et C; on demande d'exprimer le rapport $z = \frac{BB'}{CC'}$ en fonction de la tangente trigonométrique de l'angle ABC. On représentera cette tangente par K. Maximum et minimum de z quand on fait varier K.

II. — Extraire la racine carrée d'une fraction à $\frac{1}{n}$ près. Énoncer la règle et la démontrer.

Compositions du 4 mai.

Mathématiques.

I. — Couper une sphère donnée par un plan de telle manière que le segment déterminé par ce plan ait un volume égal à m fois celui du cône qui a pour sommet le centre de la sphère et pour base la section faite par le plan. (On prendra pour inconnue la hauteur du segment.)

I. — Composition de deux forces parallèles.

Compositions du 5 mai.

Mathématiques.

I. — Calculer les dimensions d'un cylindre droit de surface totale donnée $2\pi a^2$ inscrit dans une sphère de rayon R.

II. — Phases de la lune.

Compositions du 6 mai.

Mathématiques.

I. — Démontrer que dans la parabole la sous-normale est constante.

II. — Déterminer les angles B et C d'un triangle connaissant l'angle A et le rapport $\frac{BB'}{CC'} = K$ des hauteurs issues des sommets B et C. Calculer $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$

Compositions du 7 mai.

Mathématiques.

I. — Inscrire dans une demi-circonférence de rayon R un trapèze ABCD de périmètre donné $2p$. On prendra pour inconnues la longueur d'un des côtés non parallèles $AB = x$ et la demi-longueur de la petite base $BC = y$.

II. — Quelle est la valeur de la tangente de l'angle de 30°? En déduire la valeur de celle de 15°.

Compositions du 8 mai.

Mathématiques.

I. — Trouver le nombre entier qui diffère de moins de $\frac{1}{2}$ unité de la racine carrée de 3,975.

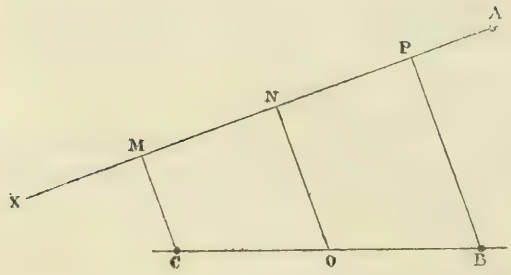
II. — Etant donné un cercle de rayon R, calculer les deux bases d'un trapèze isoscèle circonscrit au cercle, connaissant la surface a^2 du trapèze.

QUESTION 139

Solution par M. J. Delpirou (Collège Chaptal).

Mener par un point donné A *une droite dont les distances à deux points donnés* B,C, *aient une somme donnée* 2l. *Discuter en faisant varier la position du point* A *dans le plan.* (L. Levy.)

Supposons le problème résolu, et soit Ax la droite cherchée. On doit avoir : $BP + CM = l$. Soit O le milieu de CB. La droite ON perpendiculaire à AX est égale à l. Ainsi le cercle Δ décrit de O comme centre avec l pour rayon sera tangent à AX. D'où la construction suivante :



Par le milieu de la droite joignant les deux points donnés on décrit un cercle de rayon égal à l, puis par le point A on lui mène des tangentes.

On voit aussi qu'il y a deux solutions, qui sont réelles ou imaginaires suivant que le point A est extérieur ou intérieur au cercle Δ. Elles sont coïncidentes dans le cas particulier où A est situé justement sur Δ.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Louis Leboisne, élève

au lycée du Mans; Voignier, élève au lycée de Nancy; Émile Vigarié, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Vintejoux); J.-B. Perrin, maître répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand; Jules Huré, au collège de Montargis.

QUESTIONS PROPOSÉES

184. — On donne une circonférence O et deux points fixes I et I′ sur un même diamètre; on imagine, en outre, un diamètre mobile dont les extrémités sont A et A′. Cela posé, on considère la circonférence IAO et la circonférence I′A′O; ces circonférences se coupent en un autre point M dont on demande le lieu. 1° Discuter ce lieu lorsque I et I′ prennent différentes positions; en particulier, chercher ce qui arrive lorsque I et I′ sont symétriques par rapport à O et indiquer dans quelles conditions ce lieu est tout entier à l'intérieur, ou tout entier à l'extérieur, du cercle O;

2° Ce lieu est un certain cercle ω; calculer son rayon et sa distance au point O;

3° Cela fait, on demande de démontrer que les circonférences qui sont tangentes à ω, au cercle O, et qui passent par O, passent aussi forcément par un des points I et I′; étudier ces conditions de possibilité et faire voir que les cercles possibles demandés sont en nombre : zéro, deux ou quatre;

3° Si, par un point M du lieu on mène une circonférence tangente en O à II′, le lieu géométrique du point μ d'intersection avec le diamètre mobile AA′ correspondant au point M est un cercle de centre O;

4° On fait varier le rayon du cercle sans changer le centre, ni la position des points I,I′; étudier le déplacement du centre ω pour les différentes valeurs du rayon variable et démontrer que la polaire de O par rapport aux diverses circonférences du lieu est une droite invariable;

5° Généraliser le problème par projection conique, à l'aide de deux sections circulaires antiparallèles.

(Eug. Vigneron.)

185. — On donne un demi-cercle Δ décrit sur le dia-

mètre BC et l'on considère le triangle rectangle isoscèle BAC inscrit dans ce demi-cercle Soit M le milieu du côté AC; la droite BM rencontre Δ en B'. On propose de démontrer que B' est trois fois plus éloigné de AB que de AC. *(G. L.)*

186. — On sait que les droites qui joignent les sommets d'un triangle aux points de contact des cercles ex-inscrits se coupent en un même point. Démontrer que ce point est le centre du cercle inscrit au triangle obtenu en menant par les sommets du triangle les parallèles aux côtés.

(G. Boubals.)

Nota. — On rapprochera cet exercice de la question 94 résolue précédemment (p. 92). *(G. L.)*

187. — Étant donné un triangle ABC, on mène la médiane antiparallèle $A\alpha$ et l'on prend sur cette droite à partir du point α et dans le sens $A\alpha$ un point A'' a une distance de BC égale à $\frac{a}{2}$ tg A. Par ce point, on mène une parallèle à la tangente en A à la circonférence ABC, cette parallèle coupe AB, AC en C', B'; les droites BB', CC' se coupent en A_1. Soient B_1, C_1 les points analogues de A_1.

1° On a : $A''C = A''C' = A''B = A''B'$;

2° La droite AA_1 est une hauteur du triangle A'B'C';

3° Les circonférences ABC, CB'C'B sont orthogonales;

4° Lieu de l'orthocentre du triangle AB'C' quand, BC étant fixe, A parcourt la circonférence ABC;

5° Les triangles ABC, $A_1B_1C_1$ sont égaux et les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent au centre du cercle circonscrit à ABC.

(E. Vigarié.)

Nota. — Une solution de la question 127 a paru dans le précédent numéro; une autre solution de la même question avait été déjà publiée (1884 : p. 255).

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15836-5.

ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Ferrent.**

Suite, voir page 145.)

68. — La mise en nombre des formules (159) n'étant pas toujours très facile surtout dans les cas particuliers, nous allons passer en revue et résoudre directement ces divers cas.

L'équation générale peut se réduire à l'une des suivantes :

$$1^\circ \quad ay^2 + bxy + cx^2 + g = 0. \qquad (170)$$

$$2^\circ \quad ay^2 + dy + fx + g = 0 \qquad (171)$$

$$3^\circ \quad ay^2 = bx + c \qquad (172)$$

$$4^\circ \quad ay^2 = bx \qquad (173)$$

La première de ces équations devient, à cause des relations $b = 2b'$ et $b'^2 - ac = 0$:

$$a^2y^2 + 2ab'xy + b'^2x^2 + ag = 0$$

ou

$$(ay + b'x)^2 + ag = 0 \qquad (174)$$

y', x' étant une première solution, on a

$$(ay' + b'x')^2 + ag = 0,$$

d'où :

$$(ay + b'x)^2 - (ay' + b'x')^2 = 0$$

ou

$$[a(y + y') + b'(x + x'][a(y - y') + b'(x - x')] = 0,$$

d'où

$$a(y + y') + b'(x + x') = 0$$

ou

$$a(y - y') + b'(x - x') = 0,$$

ρ étant le plus grand commun diviseur de a et b,

$$y = -y' + \frac{b'}{\rho}\omega$$

$$x = -x' - \frac{a}{\rho}\omega$$

et

$$y = y' + \frac{b'}{\rho}\omega$$

$$x = x' - \frac{a}{\rho}\omega.$$

Les solutions sont donc toutes comprises dans les expressions

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm y' + \frac{b'}{\rho}\omega \\ x &= \pm x' - \frac{a}{\rho}\omega \end{aligned}\right\}, \qquad (175)$$

dans lesquelles les doubles signes sont en concordance.

On peut dire encore, sans supposer comme une première solution de la proposée :

Lorsque l'équation (174) peut être résolue, $-ag$ doit être égal au carré d'un entier; soit donc

$$ag = -m^2.$$

Cette équation devient

$$(ay + b'x)^2 - m^2 = 0,$$

d'où

$$(ay + b'x - m)(ay + b'x + m) = 0.$$

Si y', x' annule l'un ou l'autre de ces facteurs, y', x' sera aussi une solution de la proposée, et on retrouvera ainsi les solutions précédentes. Il suffit donc, de cette manière, de chercher une première solution d'une équation du premier degré.

N.-B. — Nous suspendons ici notre travail sur l'analyse indéterminée du second degré, quoiqu'il nous reste encore d'importants résultats à publier, parmi lesquels nous citerons :

1° Des propriétés nouvelles des fractions continues provenant de la réduction, en fraction continue, de $\sqrt{M}$, M étant entier ou fractionnaire;

2° La théorie des solutions conjuguées de l'équation du second degré (hyperbole), qui donne, pour résoudre cette équation, une méthode beaucoup plus simple que celle de Gauss et de Lagrange ;

3° Une méthode directe pour résoudre les équations $y^2 = ax + b$ et $y^2 - Mx^2 = N$, méthode qui ne suppose pas connue une première solution.

Ces spéculations mathématiques offrent un grand intérêt; mais elles ont le tort de ne pas faire partie des programmes d'examens, et nous craignons d'abuser de l'hospitalité de cette publication en les développant ici avec les détails qu'elles comportent.

Nous pensons pourtant, soit ici, soit ailleurs, revenir un jour sur ce travail que nous laissons inachevé, pour les raisons que nous venons de donner.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié**, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

(*Suite* voir p. 126.)

---

20. Théorème. — *Si trois droites issues des trois sommets d'un triangle* ABC *coupent les côtés opposés en trois points* A_1, B_1, C_1, *en ligne droite, les inverses de ces droites coupent les côtés en trois autres points* A'_1, B'_1, C'_1, *en ligne droite* (*).

Les trois points A , B_1, C_1, étant en ligne droite on a

$$\frac{CA_1 \,.\, AB_1 \,.\, BC_1}{BA \,.\, CB_1 \,.\, AC} = 1.$$

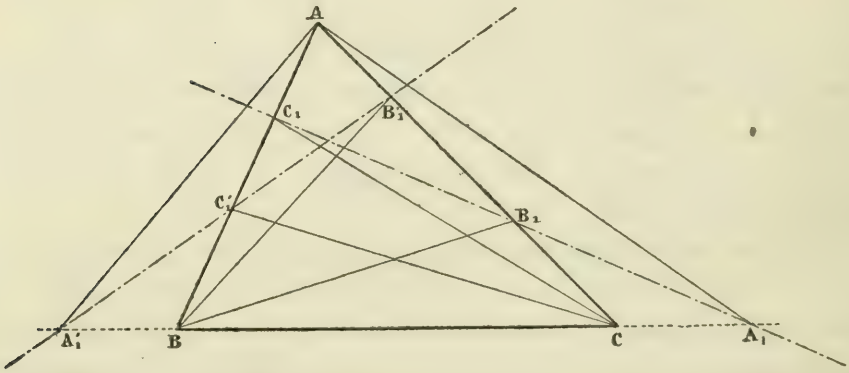
Les droites AA_1, AA'_1; BB_1, BB'_1; CC'_1, CC_1 étant des droites inverses on a

$$\frac{BA'_1 \,.\, BA_1}{CA'_1 \,.\, CA_1} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{BA'_1}{CA'_1} = \frac{\overline{AB}^2 \,.\, CA_1}{\overline{AC}^2 \,.\, BA_1}$$

(*) M. le colonel Mathieu. *Loc. cit.* p. 400.

$$\frac{CB_1 \,.\, CB'_1}{AB_1 \,.\, AB'_1} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{CB'_1}{AB'_1} = \frac{\overline{CB}^2 \,.\, AB_1}{\overline{AB}^2 \,.\, CB_1}$$

$$\frac{AC_1 \,.\, AC'_1}{BC'_1 \,.\, BC_1} = \frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{AC'_1}{BC_1} = \frac{\overline{AC}^2 \,.\, BC_1}{\overline{BC}^2 \,.\, AC_1}$$



Faisons le produit et nous avons :

$$\frac{BA'_1 \,.\, CB'_1 \,.\, AC'_1}{CA'_1 \,.\, AB'_1 \,.\, BC'_1} = \frac{\overline{AB}^2 \,.\, \overline{CB}^2 \,.\, \overline{AC}^2}{\overline{AC}^2 \,.\, \overline{AB}^2 \,.\, \overline{BC}^2} \times \frac{CA_1 \,.\, AB_1 \,.\, BC_1}{BA_1 \,.\, CB_1 \,.\, AC_1} = 1.$$

21. Théorème. — *Les points* B′ *et* C′ *étant les pieds des perpendiculaires abaissées des points* B *et* C *du triangle* ABC *sur la bissectrice* AE, *on mène par le point* B′ *une parallèle à* AB *et par le point* C′ *une parallèle à* AC. *Ces droites se coupent en un point* I *qui se trouve sur la médiane antiparallèle* Aα (*). *Les points* B′, C′, *le pied* M_a *de la médiane* AM_a *et le pied de la hauteur* AH_a *sont quatre points d'une même circonférence.*

1° De B′ et C′ j'abaisse $B'B'_c$, $C'C'_b$ perpendiculaires sur AB, AC et de I les deux perpendiculaires II_c, II_b sur AB, AC on a

$$II_c = B'B'_c \qquad II_b = C'C'_b.$$

Prolongeons BB′ jusqu'à sa rencontre en B_1 avec AC, le triangle BAB_1 étant isoscèle on a

$$BB' = B'B_1 \quad B'B'_c = B'B'_b.$$

(*) M. d'Ocagne. *Loc. cit.* 1883, p. 464.

Les triangles semblables $AB'B'_b$, $AC'C'_b$; $AB'B_1$, $AC'C$ donnent

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{B'B'_b}{C'C'_b} \quad \frac{AB'}{AC'} = \frac{AB_1}{AC} = \frac{AB}{AC}$$

Donc

$$\frac{B'B'_b}{C'C'_b} = \frac{II_c}{II_b} = \frac{AB}{AC}.$$

Ce qui montre que I est sur la médiane antiparallèle $A\alpha$.

2° Menons $B'M_a$; cette droite, joignant les milieux de BC, BB_1, est parallèle à AC et l'on a

$$\frac{EB'}{EM_a} = \frac{EA}{EC}.$$

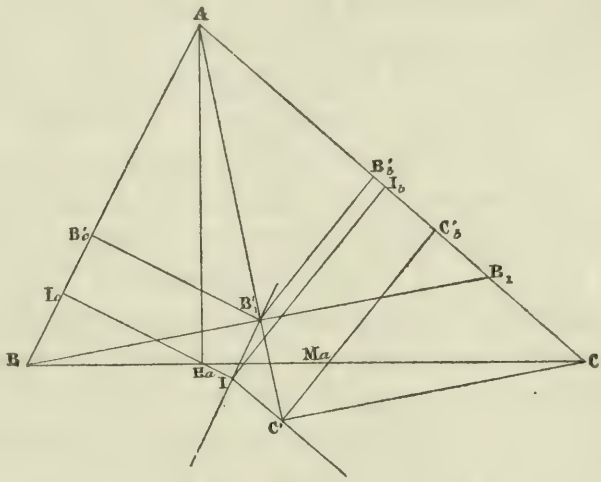
Les triangles rectangles semblables $EC'C$, EAH_a donnent

$$\frac{EA}{EC} = \frac{AH_a}{EC'}.$$

D'où

$$\frac{AH_a}{EC'} = \frac{EB'}{EM_a}$$

ou



$$AH_a \,.\, EM_a = EC' \,.\, EB'.$$

Ce qui prouve que le quadrilatère $B'H_aC'M_a$ est inscriptible.

(A suivre.)

MONOGRAPHIE DE LA SYMÉDIANE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

La théorie du triangle s'est, en ces derniers temps, accrue d'un chapitre intéressant grâce aux travaux de MM. Brocard, Lemoine, Neuberg, Tucker, Taylor, etc. Ces géomètres ont étudié en détail les propriétés de certains points et de certains cercles remarquables du plan d'un triangle, qui sont désignés aujourd'hui par les noms de plusieurs d'entre eux, et dont nous n'avons pas besoin de rappeler ici la définition.

Par une coïncidence assez singulière, mais dont les exemples pourtant ne sont pas aussi rares qu'on pourrait le croire, nous nous engagions à notre tour dans la même voie de recherches, sans avoir la moindre connaissance des travaux antérieurs, et nous retrouvions, ce qui est bien naturel, un certain nombre de résultats précédemment acquis.

Notre premier essai, très sommaire, a été publié en 1880 dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (t. IV, p. 539); le second, beaucoup plus développé, a paru en 1883 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3e série, t. II, p. 450); un troisième a également figuré dans ce recueil (3e série, t. III, p. 25) (*). C'est dans le second article que nous avons proposé le terme de *symédiane* pour désigner la droite qui constituait l'objet principal de nos études, droite que M. Lemoine appelait auparavant *médiane antiparallèle*. Nous ajouterons que, depuis lors, presque tous les auteurs qui se sont occupés de ce sujet (**), y compris M. Lemoine (***), ont adopté le terme de *symédiane*; nous croyons donc pouvoir le considérer comme définitivement consacré par l'usage et continuer de nous en servir d'une manière courante.

Les trois symédianes d'un triangle concourent en un même point qui a reçu le nom de *point de Lemoine*. Ce point de Lemoine est lui-même lié, comme on sait, aux divers autres éléments (points et cercle de Brocard, cercles de Tucker, cercle de Taylor,...) auxquels nous faisions allusion en commençant. On voit ainsi le rapport qui existe entre la symédiane et ces éléments. Mais ce lien n'est pas si étroit qu'on ne puisse séparer l'étude desdits éléments de celle de la symédiane. Les points et cercles de Lemoine, Brocard, etc. peuvent recevoir une définition indépendante de celle de la symédiane, être étudiés sans son intervention, ainsi que l'a fait voir M. Lemoine.

(*) Un quatrième article sur la symédiane, que nous avons rédigé en mai 1884, doit paraître dans le numéro d'août des *Nouvelles Annales*.

(**) Qu'il nous soit permis de citer à ce propos les noms de MM. Neuberg, Tucker, Casey.... Ce dernier a même introduit le terme de *symédiane* dans la dernière édition de son excellente « *Sequel to Euclid* », ouvrage classique, et à juste titre, en Angleterre.

(***) Voir *Mathésis*, t. V, p. 103.

De son côté, la symédiane peut donner lieu, abstraction faite des élégantes théories dont nous venons de parler, à des développements intéressants et à des applications importantes. C'est là le point que, pour notre part, nous nous sommes spécialement attaché à mettre en lumière. Ce n'est qu'incidemment que nous avons rencontré quelques propriétés du point de Lemoine; notre but était d'étudier la symédiane en elle-même. Outre les propriétés que nous en avons données, nous avons fait voir le rôle important qu'elle joue dans la théorie de diverses courbes et particulièrement des coniques.

Notre conclusion ne sera pas que la notion de la symédiane doive être séparée des autres notions dont nous avons parlé. Cette relation, tout au contraire, est propre à lui donner une bien plus grande importance, mais nous pensons qu'il y a lieu, aujourd'hui que ces diverses théories particulières ont, pour ainsi dire, acquis droit de cité dans la théorie générale du triangle, de traiter, à part, et en commençant, de la symédiane, d'étudier ses propriétés intrinsèques, d'en faire voir les applications, puis, une fois seulement cette étude achevée, de passer à l'étude du point de Lemoine, et aux autres théories qui s'y rattachent. Le travail que nous présentons ici a pour but de fixer, au moins dans ses grandes lignes, la monographie de la symédiane.

Tous les théorèmes que nous donnons plus loin sont extraits de nos diverses notes citées plus haut. Quelques-uns d'entre eux avaient déjà été remarqués.

Nous avons supprimé les démonstrations, qui allongeraient démesurément ce travail, et lui enlèveraient son caractère de résumé. On les trouvera en se reportant à nos précédentes Notes, ou à l'excellent travail(*) de M. Vigarié, élève au lycée Saint-Louis, qui a donné des démonstrations nouvelles d'un grand nombre de nos théorèmes sur la symédiane.

(A suivre.)

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1885.

LES CARRÉS MAGIQUES DE FERMAT

RESTAURÉS ET PUBLIÉS SUR DES DOCUMENTS ORIGINAUX ET INÉDITS

Par M. **Édouard Lucas.**

(*Suite*, voir p. 148.)

Formules d'arithmétique.

Reprenons le carré fondamental; considérons ap, bq, ..., comme des produits ; faisons la somme des nombres de chaque ligne en donnant le signe — aux nombres de la première diagonale, et faisons le carré des sommes obtenues; nous avons

$$\begin{aligned} &[-ap+cs+dq+br]^2 \\ +&[+dr-bq+as+cp]^2 \\ +&[+bs+dp-cr+aq]^2 \\ +&[+cq+ar+bp-ds]^2 \end{aligned}$$

En faisant la somme, les doubles produits disparaissent à cause des égalités à deux boules; il ne reste que des carrés dont la somme représente le produit des deux sommes de quatre carrés

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2).$$

Le procédé que nous venons d'exposer est plus simple que tous ceux qui ont été donnés jusqu'ici pour obtenir cette formule. Si, sans changer a, b, c, d, on permute de toutes les manières possibles les nombres p, q, r, s, on obtient ainsi vingt-quatre formules, et d'ailleurs on ne peut en obtenir davantage avec un seul terme négatif dans chaque parenthèse. Si l'on change ensuite le signe des termes contenant p dans ces formules, on en obtient vingt-quatre autres dans lesquelles chaque somme contient deux signes — ou n'en contient aucun.

Ainsi, la question de la décomposition du produit des sommes de quatre carrés en quatre carrés est inséparable de la théorie des carrés magiques à quartiers égaux.

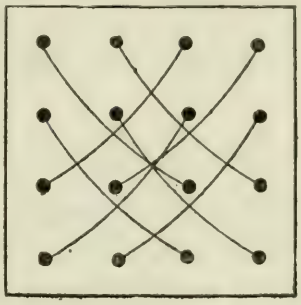
Les neuf types des carrés à quartiers.

Nous appellerons *conjugués* les nombres d'une table d'addition symétriquement placés par rapport au centre de la table; ainsi dans la table de la *fig. 25*, *ap* et *ds* sont conjugués, ainsi que *aq* et *dr*. Dans le carré fondamental, les nombres conjugués sont encore placés deux par deux, symétriquement par rapport au centre du carré. Si l'on joint ces nombres par des lignes, on obtient la figure que nous appellerons le type A ou *carré conjugué par rapport au centre*. Par

Fig. 28.

ap	*cs*	*br*	*dq*
dr	*bq*	*cp*	*as*
cq	*ar*	*ds*	*bp*
bs	*dp*	*aq*	*cr*

Fig. 29 (Type B).



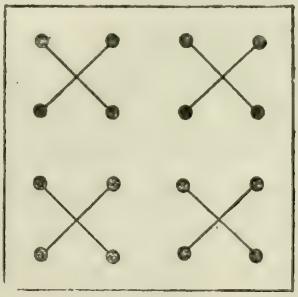
des échanges successifs, qui s'appliquent à tous les carrés à quartiers égaux, nous allons en obtenir d'autres; et les divers traits réunissant les nombres conjugués proviennent des huit égalités des groupes de deux boules opposées de la table d'addition.

Par l'échange des deux dernières lignes, puis des deux dernières colonnes, nous obtenons le type B que nous appellerons *conjugué par diagonales des carrés de trois*.

Fig. 30.

ap	*br*	*cs*	*dq*
cq	*ds*	*ar*	*bp*
dr	*cp*	*bq*	*as*
bs	*aq*	*dp*	*cr*

Fig. 31 (Type C).



L'échange des quartiers opposés conserve les types A et B; l'échange des rangées intérieures conserve le type A, mais

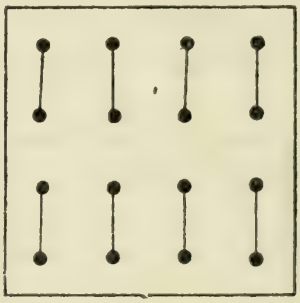
transforme le type B dans le type C que nous appellerons *conjugué par diagonales de quartiers.*

Échangeons dans chacun des quartiers du carré C les nombres des secondes lignes; puis, échangeons sans les tourner les quartiers inférieurs; nous obtenons le type D ou *carré conjugué par lignes voisines (fig. 32 et 33).*

Fig. 32.

ap	*br*	*cs*	*dq*
ds	*cq*	*bp*	*ar*
bq	*as*	*dr*	*cp*
cr	*dp*	*aq*	*bs*

Fig. 33 (Type D).

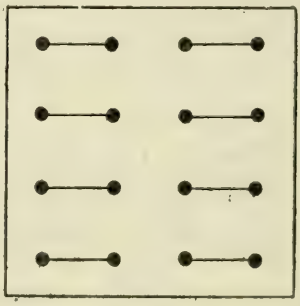


En opérant par colonnes sur le type C, comme nous avons opéré par lignes, c'est-à-dire en échangeant dans chacun des quartiers du carré C, les nombres des secondes colonnes; puis,

Fig. 34 (Type D').

ap	*ds*	*bq*	*cr*
cq	*br*	*dp*	*as*
dr	*aq*	*cs*	*bp*
bs	*cp*	*ar*	*dq*

Fig. 35.



sans les tourner, les deux quartiers de droite, nous obtenons le type D' ou *carré conjugué par colonnes voisines (fig. 34 et 35).* Bien que les figures des types D et D' soient symétriques l'une de l'autre par rapport à la première diagonale, les carrés obtenus sont bien distincts, car si la première ligne de D' est identique à la première colonne de D il n'en est plus de même pour les secondes rangées.

Si, dans le type D, on fait l'échange des rangées intérieures, on obtient le type E ou carré *conjugué par lignes*

alternées (fig. 36 et 37); de même du type D′ on déduit le type E′ ou *carré conjugué par colonnes alternées (fig. 38 et 39)*.

Fig. 36.

ap	*cs*	*br*	*dq*
bq	*dr*	*as*	*cp*
ds	*bp*	*cq*	*ar*
cr	*aq*	*dp*	*bs*

Fig. 37 (Type E).

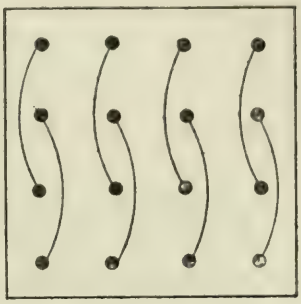
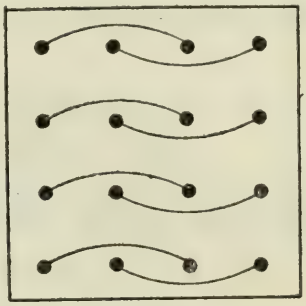


Fig. 38.

ap	*bq*	*ds*	*cr*
dr	*cs*	*aq*	*bp*
cq	*dp*	*br*	*as*
bs	*ar*	*cp*	*dq*

Fig. 39 (Type E′).



Enfin, si dans les types E et E′ on échange les deux dernières lignes, puis les deux dernières colonnes, on obtient le type F *(fig. 40 et 41)* ou *carré conjugué par lignes opposées*, et le type F′ *conjugué par colonnes opposées (fig. 42 et 43)*.

Fig. 40.

ap	*dq*	*cs*	*br*
er	*bs*	*aq*	*dp*
bq	*cp*	*dr*	*as*
ds	*ar*	*bp*	*cq*

Fig. 41 (Type F).

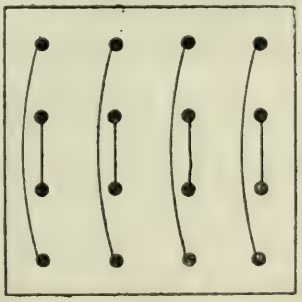
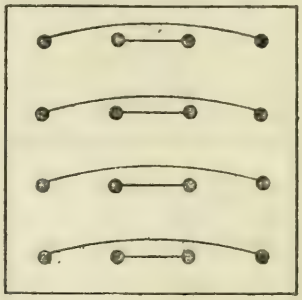


Fig. 42.

ap	*cr*	*bq*	*ds*
bs	*dq*	*ar*	*cp*
dr	*bp*	*cs*	*aq*
cq	*as*	*dp*	*br*

Fig. 43.



En se reportant à la table d'addition et à toutes ses transformations, on obtient ce théorème : *Les carrés à quartiers égaux se partagent également en neuf types distincts; en imposant à un élément quelconque une case déterminée, le nombre des solutions pour chaque type est égal à* 128. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 137.)

CHAPITRE VI

LE TRACÉ DES CONIQUES (EXAMEN DE QUELQUES CAS PARTICULIERS)

55. Considérations générales. — Nous nous proposons maintenant d'examiner plusieurs cas particuliers intéressants qui se rencontrent assez souvent, soit dans les problèmes de la géométrie ordinaire, soit aussi dans les épures de la géométrie descriptive. Pour ce motif, ces problèmes divers méritent de fixer notre attention; mais, à ce propos, il est peut-être utile d'expliquer ici comment les solutions des problèmes de la géométrie descriptive peuvent, dans certains

cas, se trouver en contact avec les questions de géométrie pratique que nous développons dans ce livre.

Pour mieux fixer les idées par un exemple simple, admettons qu'en cherchant la section plane d'une Quadrique, des raisons de symétrie, ressortant immédiatement et naturellement de la nature de la question traitée, nous aient permis de déterminer sans effort deux sommets A et B de la projection. Pour fixer d'autres points de la courbe, et, ainsi, préciser son tracé, nous pourrons opérer de deux façons très différentes.

Ou bien, serrant de plus près la solution indiquée par la géométrie descriptive, nous déterminerons successivement différents points de la courbe, ce qui constitue la méthode naturelle dans le tracé d'une épure; ou bien, de la connaissance des sommets A et B et de celle d'un troisième point quelconque C, nous déduirons la construction de la conique, point par point; par exemple, par le procédé que nous avons indiqué précédemment (§ 48).

Si l'on ne veut pas admettre, en théorie du moins, l'introduction de constructions semblables dans les épures de la géométrie descriptive, on accordera pourtant que, dans la pratique, et grâce à leur extrême simplicité, elles peuvent servir de vérification utile aux résultats qui ont été obtenus par des tracés ordinairement plus compliqués.

Quoi qu'il en soit, voici quelques problèmes relatifs au tracé des coniques et qui ressortent de la géométrie de la règle et de l'équerre.

56. Problème I. — *Construire une parabole connaissant l'axe* Δ *et deux points* A *et* B.

Nous allons ramener ce problème à l'un de ceux que nous avons déjà traités (§ 51) en déterminant la position du sommet de la parabole en question.

Supposons le problème résolu; le sommet S, les points A et B, leurs symétriques A′, B′ par rapport à Δ, et enfin le point qui est à l'infini dans la direction de Δ peuvent être considérés comme constituant un hexagone inscrit dans la parabole considérée. En appliquant à cet hexagone, comme

l'indique la figure, la construction de Pascal, on détermine d'abord le point T, puis la droite TC qui est perpendiculaire

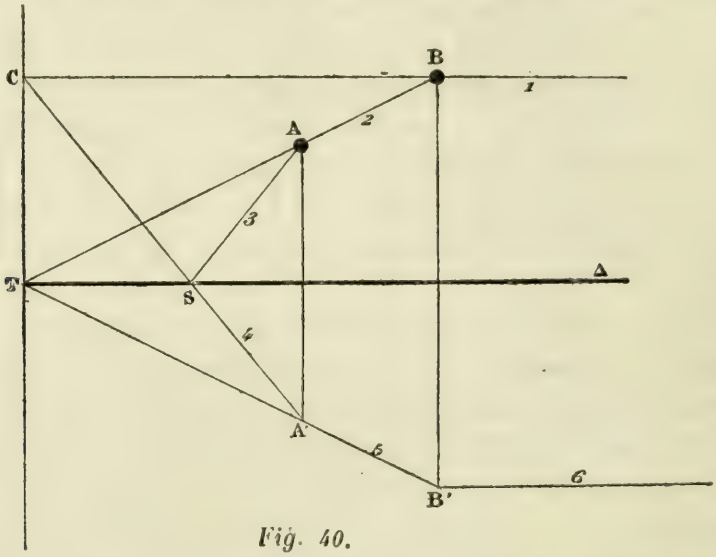


Fig. 40.

à Δ. Le point C une fois connu, on joint A'C et cette droite coupe Δ au point cherché S.

Autrement. — On peut encore déterminer le point S, par des considérations plus élémentaires, comme nous allons le montrer.

Des points A et B abaissons des perpendiculaires AP, BQ sur l'axe donné ; les droites AQ, BP se coupent en R, et nous allons démontrer que la parallèle à l'axe, menée par R, rencontre la tangente au sommet, au même point que AB.

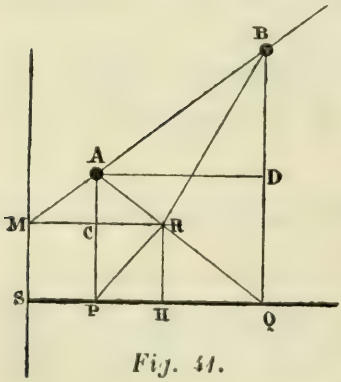


Fig. 41.

La propriété fondamentale, entre l'ordonnée et l'abscisse d'un point de la parabole, donne

$$\frac{\overline{AP}^2}{SP} = \frac{\overline{BQ}^2}{SQ} = \frac{(BQ - AP)(BQ + AP)}{PQ}$$

ou

$$\frac{AP^2}{SP} = \frac{BD}{AD}(BQ + AP). \qquad (1)$$

D'autre part, les triangles semblables ACM, BDA prouvent que

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AC}{CM} = \frac{AP - SM}{SP}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent, par comparaison,

$$\overline{AP}^2 = (AP - SM)(AP + BQ),$$

ou

$$AP \,.\, BQ = SM(AP + BQ),$$

ou enfin

$$\frac{1}{SM} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{BQ}.$$

D'ailleurs, une propréte comme (§ 14), appliquée au trapèze ABPQ, donne encore

$$\frac{1}{RH} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{BQ}.$$

On a donc

$$SM = RH,$$

et l'on peut ainsi, très simplement, déterminer : 1° le point M, 2° le sommet S de la parabole, avec la règle et l'équerre.

57. Remarque. — Nous voulons encore faire observer que le paramètre de la parabole peut se trouver très simplement, comme nous allons l'indiquer.

Soit I le milieu de AB ; projetons ce point, en U, sur l'axe donné; puis, en I, élevons une perpendiculaire à AB; cette dernière droite rencontre l'axe en V; UV représente le paramètre p de la courbe.

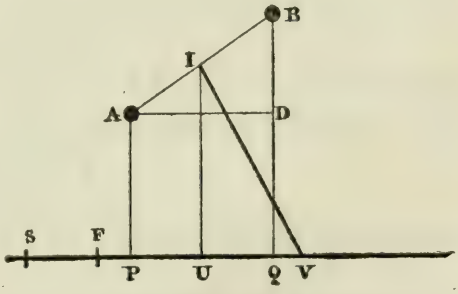


Fig. 42.

Cette propriété se voit rapidement par la considération des diamètres et en s'appuyant sur le théorème analogue à celui qui est relatif à la sous-normale. Mais la démonstration suivante est peut-être plus directe et plus élémentaire.

Soit S le sommet de la parabole, on a d'abord

$$\overline{AP}^2 = 2pSP \quad \text{et} \quad \overline{BQ}^2 = 2pSQ,$$

d'où l'on déduit

$$(BQ - AP)(BQ + AP) = 2p \,.\, PQ.$$

Ayant mené AD parallèlement à l'axe, cette égalité peut s'écrire

$$BD \,.\, IU = p \,.\, AD. \qquad (1)$$

Mais les triangles semblables ABD, IUV donnent

$$\frac{AD}{IU} = \frac{DB}{UV}. \qquad (2)$$

La comparaison des égalités (1) et (2) prouve que

$$IU = p.$$

Il est remarquable que, dans les conditions données (deux points et l'axe), on puisse déterminer, avec la règle et l'équerre, le sommet et le foyer de la courbe. En effet, la connaissance du point S et celle du paramètre dont la longueur est égale à UV, permettent de fixer la position du point F, SF étant la moitié de UV. *(A suivre.)*

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(3 heures.)

I. — On donne un angle droit XOY, un point A dont la distance à OY est a, et la distance OX b. Mener par ce point une sécante NAM telle que l'on ait $\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = K^2$. Discuter.

II. — Quelles valeurs faut-il donner à x pour que la fonction

$$\frac{4x^4 - 20x^2 + 18}{x^4 - 5x^2 + 4}$$

ait une valeur inférieure à 3.

III. — Calculer les angles d'un triangle dont on donne les trois côtés.

$$a = 3645{,}43$$
$$b = 4156{,}28$$
$$c = 5047{,}56$$

EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE

(CONCOURS DE 1885)

Démontrer le théorème qui donne l'expression de la somme des carrés de deux côtés d'un triangle en fonction du troisième côté et de la médiane correspondante.

En conclure une expression de la somme $\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2$ où M est un point quelconque pris dans le plan du triangle ABC ; et faire voir que

dans ce plan, le lieu des points pour lesquels cette somme est égale à une constante donnée est un cercle k : condition de possibilité.

Si l'on fait tourner le triangle ABC autour d'une parallèle DE au côté BC, telle que la distance BD soit égale à d, le volume engendré par le triangle est égal à sa surface multipliée par la circonférence décrite par le centre du cercle k.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

(1885)

Mathématiques.

On donne trois points O, A, B, non en ligne droite. On porte sur les droites AO, BO, à partir des points A et B, et du même côté de AB, les longueurs AC, BD égales à h. On porte aussi sur les mêmes droites, mais de part et d'autre de AB, des longueurs AC′, BD′ égales à h'.

1° Démontrer que la perpendiculaire à CD en son milieu passe par un point fixe ω, quand h varie. Démontrer de même que la perpendiculaire à C′D′ en son milieu passe par un point fixe ω', quand h' varie.

2° Construire la droite CD, connaissant sa longueur. — Même question pour la droite C′D′.

3° Démontrer qu'à une droite CD correspond une droite C′D′, et une seule, parallèle à CD. Déterminer le système de ces deux droites parallèles de façon qu'elles soient égales entre elles.

4° On donne $OA = a$, $OB = b$, et l'on demande de calculer la valeur qu'il faut donner à l'angle AOB, pour que la distance des points ω et ω', tels qu'ils ont été définis ci-dessus, soit égale à une longueur donnée l. Discuter le problème.

BACCALAURÉAT

ACADÉMIE DE TOULOUSE

Composition du 13 avril 1885

(Composition unique).

— Déterminer les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

— Jour sidéral ; jour solaire vrai ; jour solaire moyen.

— Énoncer les lois de la réfraction. Indice de réfraction. Angle limite.

— Quel est le poids de la vapeur d'eau, contenue dans 1^{mc} d'air dont l'éta hygrométrique est $\frac{1}{3}$, la température étant 20°. On sait que la tension maxima de la vapeur d'eau à $20° = 17^{m}/^{m}$ et que la densité de la vapeur d'eau $= 0,622$.

Juillet 1885.

— A quelle hauteur parvient un corps lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale V. Quelle vitesse aura-t-il en revenant au point de départ?

— Circonscrire, à un cercle donné de rayon R, un losange qui ait une surface donnée S. On calculera le côté, les diagonales et les angles du losange. Minimum de la surface.

Application numérique R = 10^m S = 1 hect. Calculer à $0^m,1$ près le côté et les diagonales.

— Énoncer les lois de la réfraction de la lumière.

— Définir et calculer l'angle limite.

— Mesure de la pression d'un gaz. Si la pression d'un gaz est de $2,700^m/^m$ de mercure, quelle est sa valeur en kilogrammes par centimètre carré.

LILLE

SESSION D'AVRIL 1885.

1e série. I. — Trouver : 1° le volume du tétraèdre régulier ayant 1^m de côté; 2° la position du centre de gravité; 3° l'angle que font entre elles les droites qui joignent ce point à deux sommets consécutifs.

II. — On laisse tomber un corps pesant du haut d'une tour. Dans la dernière seconde, le corps parcourt la moitié de la hauteur. On demande cette hauteur et la durée de la chute.

2e série. I. — Un tas de sable a pour bases inférieure et supérieure deux rectangles horizontaux et ses quatre faces sont inclinées de 30° sur l'horizon; on demande son volume, sachant que la base supérieure a 2^m de longueur et 1^m de largeur. (On exprimera le volume en fonction de la hauteur.)

II. — Un corps disposé sur un plan horizontal est heurté par un autre qui lui communique une vitesse de 5 mètres par seconde. Quel chemin parcourra-t-il avant de s'arrêter, sachant qu'il pèse 3 kilog. et que le frottement du plan contre lui est de 1 kilog. — On prendra $g = 9,809$.

3e série. I. — Sachant que la résultante de deux forces appliquées en un point est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces, démontrer que son intensité est représentée par cette même force. Établir les rapports qui existent entre la résultante et les composantes.

II. — Résoudre le système des deux équations :

$$x \sin y = 0,92646$$
$$x \cos y = 3,2801,$$

x étant un nombre positif et y un angle que l'on veut calculer à une seconde près.

CAEN

SESSION DE JUILLET 1885

On considère une fraction de la forme :

$$\frac{x - a}{x^2 - 2x - 3}$$

dans laquelle a désigne une quantité constante et x une variable. Déterminer a de façon que la fraction ait une valeur minimum pour $x = 2$.

Démontrer que pour que les deux côtés d'un angle droit se projettent suivant deux droites perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un des côtés de l'angle considéré soit parallèle au plan de projection.

AGRÉGATION

Mathématiques élémentaires.

Soit un triangle ABC, et soient B_1 et C_1 les points de rencontre des côtés AC et AB avec les bissectrices des angles B et C du triangle; soient de même B_2 et C_2 les points de rencontre des mêmes côtés avec les bissectrices des angles extérieurs au triangle, qui ont B et C pour sommets.

1° Calculer les angles B et C, connaissant le côté a, l'angle opposé A, et le produit ma^2 des longueurs BB_1, CC_1 des bissectrices intérieures.

2° Résoudre la même question en supposant que ma^2 est le produit des longueurs BB_2, CC_2 des bissectrices extérieures.

Discuter les deux problèmes, et, pour le second, indiquer, dans les différents cas qui peuvent se présenter, les positions des points B_2 et C_2 par rapport au côté BC.

ÉCOLE MUNICIPALE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE

CONCOURS D'ADMISSION 1885.

Composition de Mathématiques.

1° Propriétés des proportions.

2° Trouver les valeurs de x, de y et de z qui satisfont aux équations

$$3x + 17y = 9z + 14{,}8.$$
$$7x + 9y = 5z + 15{,}2.$$
$$11x = 5z^2 - 34{,}7.$$

3° On donne le côté a_1 d'un triangle équilatéral. On demande de calculer le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r_1 du cercle inscrit.

Dans le cercle inscrit on inscrit un triangle équilatéral. Calculer le côté a_2 de ce triangle.

Dans ce triangle on inscrit un cercle. Calculer le rayon r_2 de ce cercle. Dans ce cercle on inscrit un nouveau triangle équilatéral dont le côté est a_3.

On demande de calculer :

1° La somme $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n$ des rayons des cercles inscrits.

2° La somme $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ des côtés des triangles équilatéraux.

3° La somme des surfaces des cercles.

4° La somme des surfaces des triangles.

5° On fait tourner chaque triangle autour d'une de ses hauteurs. Trouver la somme des volumes engendrés.

BIBLIOGRAPHIE

Premiers élements d'algèbre, contenant environ 600 problèmes et exercices, par L. Launay, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques élémentaires au Lycée Charlemagne. (Paris, librairie Hachette, 1885). — Ce livre est destiné aux élèves de troisième année de l'enseignement spécial; il est rédigé conformément au programme du 28 juillet 1882. Nous avons plaisir à recommander ici ce petit ouvrage qui, bien que destiné à l'enseignement spécial, peut aussi être lu avec grand profit par les élèves de mathématiques élémentaires. Ils trouveront, à la fin des chapitres divers, de nombreux et très intéressants exercices avec l'indication du résultat auquel ils doivent arriver. G. L.

QUESTION 26

Solution par M. E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

Un quadrilatère étant donné, on propose de construire un second quadrilatère dont les côtés soient respectivement parallèles aux côtés du premier, également distants de ceux-ci, et tels que l'aire comprise entre les périmètres des deux polygones soit équivalente à un carré donné.

Soit ABCD le quadrilatère donné, A'B'C'D' le quadrilatère cherché et x la distance des côtés correspondants. Nous distinguerons deux cas.

1° Le quadrilatère A'B'C'D' est plus grand que le quadrilatère ABCD. Menons AA', BB', CC', DD'. Ces droites qui sont les bissectrices des angles dont elles joignent les sommets se coupent deux à deux en G, H, I, K. Des points A' et B' abaissons A'E, B'F perpendiculaires sur AB. La surface donnée m^2, différence des deux quadrilatères, est égale à la somme des aires des quatre trapèzes BCC'B', ABB'A', CDC'D', DAA'D'. Or, on a

$$\text{surf. ABB'A'} = \frac{\text{AB} + \text{A'B'}}{2}\, x = \text{AB} \,.\, x + (\text{AE} + \text{BF})\frac{x}{2}.$$

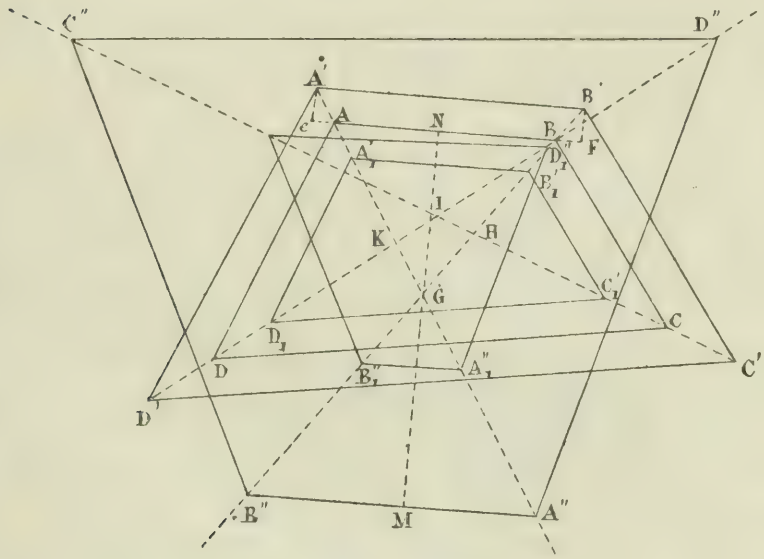
Mais :

$$AE = x \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

$$BF = x \operatorname{cotg} \frac{B}{2},$$

Donc :

$$\text{surf. } ABB'A' = AB \,.\, x + \left(\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2}\right) \frac{x^2}{2}.$$



On aurait, de même,

$$\text{surf. } BCC'B' = BC \,.\, x + \left(\operatorname{cotg} \frac{C}{2} + \operatorname{cotg} \frac{B}{2}\right) \frac{x^2}{2},$$

$$\text{surf. } CDD'C' = CD \,.\, x + \left(\operatorname{cotg} \frac{C}{2} + \operatorname{cotg} \frac{D}{2}\right) \frac{x^2}{2},$$

$$\text{surf. } DAA'D' = DA \,.\, x + \left(\operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{cotg} \frac{D}{2}\right) \frac{x^2}{2}.$$

D'où, en faisant la somme, en désignant par $2p$ le périmètre de ABCD et par Σ la somme des cotangentes des demi-angles on a :

$$m^2 = 2px + \Sigma x^2,$$

ou

$$\Sigma x^2 + 2px - m^2 = 0.$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut que l'on ait :

$$p^2 + m^2 \Sigma \geq 0.$$

Or Σ est la somme de cotangentes positives, par conséquent la condition de réalité est toujours vérifiée. La somme et le produit des racines sont négatifs, par suite les deux racines sont de signes contraires et la négative est la plus grande en valeur absolue. Si nous convenons de considérer comme positives les longueurs comptées à partir du périmètre de ABCD et extérieurement, et comme négatives les longueurs portées en sens contraire, la solution positive donnera le quadrilatère A'B'C'D' et la solution négative le quadrilatère A''B''D''C''.

Si les deux quadrilatères ABCD, A''B''C''D'' se coupaient, ce ne serait plus l'aire comprise entre leurs périmètres qui serait égale à m^2 mais l'aire des quatre trapèzes que nous avons considérés. Or ces trapèzes sont concaves, par suite, pour qu'on puisse leur appliquer les formules des trapèzes convexes, il faudra faire une nouvelle convention : ou bien considérer une base dirigée dans un sens comme positive et celle qui sera dirigée en sens contraire comme négative, ou bien en considérant les hauteurs, supposer que les hauteurs telles que GM sont le sens positif, tandis que celles telles que GN sont le sens négatif. Chacun des trapèzes sera donc formé d'une partie positive et d'une partie négative. Nous allons montrer qu'à l'aide de ces conventions, la somme des aires des quatre trapèzes est toujours égale à la différence des aires des deux quadrilatères. On a en effet :

$$ABB''A'' = A''B''G - ABG$$
$$BCB''C'' = B''C''H - BCH$$
$$CDD''C'' = C''D''I - CDI$$
$$DAA''D'' = A''D''K - ADK$$

En faisant la somme il vient :

$$ABB''A'' + BCB''C'' + CDD''C'' + DAA''D'' = (A''B''C''D'' + GHIK) - (ABCD + GHIK) = A''B''C''D'' - ABCD = m^2.$$

2° Le quadrilatère A'B'C'D' est plus petit que le quadrilatère ABCD. La mise en équation dans ce second cas ne différera de la précédente qu'en ce que

$$A'_1B'_1 = AB - (AE + BF)$$

au lieu de

$$A'B' = AB + (AE + BF).$$

Il suffira donc de changer Σ en $-\Sigma$; l'équation sera donc :

$$-\Sigma x^2 + 2px - m^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$p^2 - m^2\Sigma \geq 0$$

ou

$$m^2 \leq \frac{p^2}{\Sigma}.$$

La somme et le produit des racines étant positifs, les racines sont toutes deux positives. La première solution est évidente, c'est le quadrilatère $A'_1B'_1C'_1D'_1$. La secsnde solution est le quadrilatère $A''_1B''_1C''_1D''_1$ obtenu en faisant des conventions inverses de celles du premier cas. Les trapèzes considérés seront encore formés d'une partie positive et d'une partie négative; ainsi, dans le trapèze $ABB''_1A''_1$, la partie ABG est positive tandis que la partie $A''_1B''_1G$ est négative, car GN est positive et GM négative.

En résumé, on voit que le problème admet, en général, quatre solutions fournies par les racines de l'équation :

$$\pm \Sigma x^2 + 2px - m^2 = 0.$$

On construira facilement ces racines.

Nota. — La même question a été traitée par MM. Camille Maillard, élève au collège de Beauvais; Giat, au lycée de Moulins.

Ce problème a été résolu par Newton dans un cas particulier. Voici comment la question est énoncée dans l'*Arithmétique universelle:*

On donne un réservoir, on veut le border d'un trottoir ayant partout la même largeur et dont la surface totale est donnée.

Newton a traité et discuté le cas où le réservoir a la forme d'un trapèze.

QUESTIONS PROPOSÉES

188. — Démontrer que le point réciproque de l'orthocentre d'un triangle est le point de Lemoine du triangle formé en menant par les sommets des parallèles aux côtés opposés. *(E. Vigarié.)*

189. — Soient a, b, a', b' quatre points en ligne droite; trouver un point I sachant que les angles aIb, $a'Ib'$ sont égaux. *(Examens oraux de Saint-Cyr, 1884.)*

190. — Calculer le sinus de 333°.
(Examens oraux de l'École polytechnique, 1885.)

191. — On considère un carré ABCD et une droite quelconque Δ, dans son plan; des points ABCD on abaisse des perpendiculaires AA′, BB′, CC′, DD′ sur Δ.

En désignant par A et C deux sommets opposés, démontrer que

$$\overline{BB'}^2 + \overline{DD'}^2 - 2AA' \,.\, BB',$$

est une quantité constante, quelle que soit la position de Δ.

Déduire de cette remarque une application relative à l'enveloppe des droites qui jouissent de la propriété que la somme des carrés des distances de l'une d'elles à deux points fixes, soit constante. *(Ed. Bordage.)*

192. — Un segment de droite AB contenu dans l'angle XOY est tel que la parallèle OZ menée par le point O à la droite AB est située dans l'angle XOY. Soient a, a_1 et α les projections orthogonales de A respectivement sur OX, OY et OZ; b, b_1 et β les projections orthogonales de B sur les mêmes axes. Si l'on désigne par S la surface de celui des trapèzes AabB et Aa_1b_1B qui est coupé par la droite OZ, par S′ la surface de l'autre trapèze, et par σ la surface du rectangle $A\alpha\beta$B, démontrer que l'on a $S = S' + \sigma$.
(D'Ocagne.)

193. — Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre. Démontrer que les cercles des neuf points des trois triangles AOH, BHO, CHO se coupent aux deux mêmes points. *(G. Boubals.)*

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17760-5.

MONOGRAPHIE DE LA SYMÉDIANE

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

(*Suite*, voir p. 173.)

Nous divisons cette monographie en trois sections :

Propriétés fondamentales. — Propriétés diverses. — Application à l'étude de quelques courbes.

I. — *Propriétés fondamentales* (*).

Définition. — La symédiane est la droite symétrique de la médiane d'un triangle par rapport à la bissectrice issue du même sommet.

Conventions. — Dans tout ce qui suit, et pour éviter les longueurs de langage, nous convenons de raisonner sur un triangle ABC, et de considérer toujours la symédiane issue du sommet A; lorsque nous dirons, sans rien ajouter, les sommets, les côtés, le cercle circonscrit, etc., il s'agira de ces éléments pris dans le triangle ABC; de même, la hauteur, la médiane, la bissectrice, etc., désigneront ces éléments en tant que relatifs au sommet A.

Propriété 1. — Si l'on porte sur le côté AB la longueur AC′ égale à AC, et sur le côté AC la longueur AB′ égale à AB, la symédiane passe par le milieu de B′C′.

2. — Les distances d'un point de la symédiane aux côtés adjacents sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

3. — Les trois symédianes concourent en un même point dont les distances aux trois côtés sont proportionnelles aux longueurs de ces côtés.

Ce point est le *point de Lemoine*.

4. — Les segments déterminés par une symédiane sur le

(*) Les propriétés 1, 2, 3, 4, 5 ont été rencontrées dans des recherches diverses par plusieurs géomètres.

côté opposé sont proportionnels aux carrés des côtés adjacents.

5. — Dans le triangle rectangle, la symédiane issue du sommet de l'angle droit se confond avec la hauteur.

6. — La perpendiculaire élevée à la base BC par le pied S de la symédiane AS, rencontrant aux points B′ et C′ les perpendiculaires élevées à AB et à AC par les points B et C, on a $\frac{BB'}{CC'} = \frac{\overline{AB}^3}{\overline{AC}^3}$.

7. — La symédiane est conjuguée harmonique de la tangente au cercle circonscrit menée par le sommet, par rapport aux deux côtés adjacents.

II. — *Propriétés diverses.*

8. — Les antiparallèles, issues de A, de la symédiane par rapport aux angles ABC et ACB coupant le côté BC aux points I et K, on a BI = CK.

On peut remarquer en outre que $\widehat{IAK} = \pi - \widehat{BAC}$.

9. — On prolonge le côté AB d'une longueur égale AB′; en B′ et en C on élève respectivement à AB et AC des perpendiculaires qui se coupent en I; AI est perpendiculaire à la symédiane.

10. — Les trois symédianes passent respectivement par les trois sommets du triangle formé par les côtés extérieurs des carrés construits sur les côtés du triangle donné.

11. — Du milieu M de BC on abaisse les perpendiculaires MP et MQ sur AB et AC. La droite PQ qui joint les pieds de ces perpendiculaires est perpendiculaire sur la symédiane.

12. — AM étant médiane du triangle ABC, on prend un point P tel que $\widehat{PBA} = \widehat{MAB}$ et $\widehat{PCA} = \widehat{MAC}$. Le point P est sur la symédiane.

13. — Les trois symédianes passent respectivement par les points de rencontre des tangentes au cercle circonscrit menées par les sommets.

14. — Les points H et K étant les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets B et C sur la bissectrice, la parallèle à AB menée par le point H et la parallèle à AC menée par le point K se coupent sur la symédiane.

15. — Les parallèles menées par A respectivement aux tangentes au cercle circonscrit en B et C coupent BC en H et en I. La parallèle menée par H à AB et la parallèle menée par I à BC se coupent sur la symédiane.

16. — AH, BH_1, CH_2 étant les trois hauteurs, on abaisse du point H les perpendiculaires HP et HQ sur les côtés AB et AC, et des points H_1 et H_2 les perpendiculaires H_1S et H_2R sur BC. Les droites PR et QS se coupent sur la symédiane.

17. — Par les sommets A et B on élève des perpendiculaires au côté AB, par les sommets A et C des perpendiculaires au côté AC. Ces quatre droites forment un parallélogramme dont une diagonale passe par le point A. L'autre diagonale : 1° est perpendiculaire à la symédiane, 2° coupe le côté BC au même point que la tangente au cercle circonscrit menée par le point A.

18. — Le cercle qui passe par les sommets A et B et dont la tangente en B est parallèle à la symédiane, et le cercle qui passe par les sommets A et C et dont la tangente en C est parallèle à la symédiane, se coupent sur la médiane.

19. — Le cercle qui passe par le sommet B et qui est tangent en A à AC, et le cercle qui passe par le sommet C et qui est tangent en A à AB, se coupent sur la symédiane et ce point de rencontre est le milieu du segment de la symédiane compris entre le sommet et le point de rencontre V avec le cercle circonscrit.

20. — Ce dernier point de rencontre V est le centre harmonique des sommets B et C par rapport au sommet A. Les tangentes au cercle circonscrit en A et en V se coupent sur BC.

III. — *Application à l'étude de quelques courbes.*

21. — La droite qui joint le point de concours de deux tangentes à une parabole au foyer de cette parabole est symédiane du triangle formé par les deux tangentes et la corde de contact.

De là on déduit diverses propriétés de la parabole. Ainsi, par application des théorèmes 2 et 4, on a :

Si d'un point A on mène les tangentes AB et AC à une parabole de foyer F, B et C étant les points de contact de ces tangentes : 1° les distances du point F aux tangentes AB et AC sont proportionnelles aux longueurs de ces tangentes; 2° les distances du point F aux points B et C sont proportionnelles aux carrés des longueurs des tangentes correspondantes.

Par application des théorèmes 7, 17 et 21, on arrive aussi à la propriété suivante :

Si par le point A, d'où sont issues les tangentes AB et AC, on mène des parallèles aux normales à la parabole en B et C, ces droites forment avec ces normales un parallélogramme dont une diagonale ne passe pas par le point A. La projection du point A sur cette diagonale coïncide avec le foyer de la parabole (*).

22. — Si une corde AB variable dans une conique est telle que les tangentes AT et BT à ses extrémités fassent entre elles un angle constant, le point où cette corde touche son enveloppe est à sa rencontre avec la symédiane issue de T dans le triangle ATB.

Ce théorème rapproché du théorème 21 montre que : Les droites qui joignent les points d'une hyperbole H isoptique (**) d'une parabole P, aux points correspondants de la polaire réciproque de H par rapport à P, passent toutes par le foyer de P.

Cette propriété est un cas très particulier d'un théorème

(*) Nous avons utilisé ce théorème dans *Mathésis*, t. V, p. 26.

(**) Les Géomètres anglais appellent *courbe isoptique* d'une courbe C, le lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à C.

que nous avons communiqué à la Société mathématique (Séance du 17 juin 1885).

23. — Si une corde AB, variable dans une conique, est vue du centre O de cette conique sous un angle constant, le point où cette corde touche son enveloppe est à sa rencontre avec la symédiane issue de O dans le triangle OAB.

Ce théorème est une conséquence d'un théorème général que nous avons donné dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. II, p. 256) et rappelé dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (9e année, p. 15). On en déduit, lorsque l'angle AOB est droit, et en s'appuyant sur le théorème 5, que l'enveloppe est alors un cercle, résultat connu.

24. — La droite qui joint le centre d'une conique au pôle d'une droite par rapport à cette conique est symédiane du triangle formé par cette droite avec les diamètres conjugués égaux de la conique.

25. — Si les tangentes à une conique en A et en B se coupent en T, et que a et b soient les projections sur AB des centres de courbure relatifs aux points A et B, la parallèle à AT menée par a et la parallèle à BT menée par b se coupent sur la symédiane issue de T dans le triangle ATB.

26. — La normale à la lemniscate est symédiane du triangle formé par les rayons vecteurs et l'axe polaire.

Ce théorème rapproché du théorème 5 montre que : Les points de la lemniscate où la tangente est parallèle à l'axe polaire sont sur la circonférence décrite sur la ligne des pôles comme diamètre.

27. — Dans la spirale d'Archimède, si, par le point d'intersection du rayon vecteur et de la parallèle à la tangente, menée par l'extrémité de la sous-normale, on tire la symédiane du triangle formé par ces droites avec la normale, on obtient, par la rencontre avec cette normale, le centre de courbure correspondant.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 125.)

XLVIII

Construire un triangle ABC *connaissant la somme* $b + c = m$ *des deux côtés* AB *et* AC, *la différence des angles* ABC — ACB $= \lambda$ *et le côté* BC $= a$.

Supposons le problème résolu : soit ABC le triangle cherché; par le milieu de CB je mène une perpendiculaire à CB qui coupe CA en I et je joins BI.

Construisons dans le triangle AIB le cercle ex-inscrit qui est tangent à IA et au prolongement des deux autres côtés; soit K le point de contact de ce cercle avec AB prolongé; soit O le centre de ce cercle.

BK est égal au demi-périmètre du triangle IAB. Ainsi

$$BK = \frac{AB + AI + IB}{2},$$

mais IB = IC, donc

$$BK = \frac{AB + AC}{2} = \frac{m}{2}.$$

O est sur la perpendiculaire menée à BC par son milieu, puisque cette perpendiculaire est la bissectrice de l'angle BIC, donc on a OB = OC.

De la résulte la construction suivante :

Je fais un angle KBI $= \lambda$; je prends sur un côté $BK = \frac{m}{2}$; la bissectrice de l'angle KBI coupe en O la perpendiculaire à KB menée en K; de O comme centre avec OB pour rayon je décris un cercle qui coupe en deux points C et C_1 le cercle décrit de B comme centre avec $BC = a$ pour rayon. Je joins B et C, la perpendiculaire menée au milieu de BC coupe BI en I, je joins CI qui coupe BK en A. On ferait

avec C_1 une construction analogue qui donnerait un triangle A_1BC_1; il y a donc deux solutions si les cercles se coupent; une, s'ils sont tangents; point, s'ils ne se coupent pas.

La condition de possibilité du problème peut s'écrire :

$$a < \frac{m}{\cos\frac{\lambda}{2}}.$$

Les deux solutions ABC, A_1BC, correspondent à deux triangles égaux; seulement, l'angle B_1 égale l'angle C et l'angle C_1 égale l'angle B.

XLIX

Construire un triangle connaissant un angle CAB, *la somme des deux côtés* $AC + AB = b + c = m$ *qui comprennent cet angle et la hauteur* $AI = h$ *abaissée de* A *sur* BC.

Supposons le problème résolu; soit ABC le triangle cherché; soit C′ un point pris sur BA au delà de A dans le sens BA; soit D l'intersection de la bissectrice de l'angle C′AC avec la perpendiculaire à AC menée en C; soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur BC.

Les deux triangles AIC, CHD sont semblables, ils donnent:

$$\frac{CH}{AI} = \frac{CD}{CA},$$

d'où,

$$CH = \frac{CD}{AC} \cdot AI;$$

or le rapport $\frac{CD}{AC}$ est connu, car dans le triangle ACD rectangle en C on connaît aussi l'angle $DAC = \frac{180 - A}{2}$, donc CH est connu. Cela posé, décrivons de D comme centre avec DC pour rayon une circonférence, elle est tangente à BA en C′ et coupe BC en un second point T; on a

$$\overline{BC'}^2 = BC \cdot BT,$$

ou

$$\overline{BC'}^2 = BC\,(BC + CT);$$

mais

$$BC' = AB + AC' = AB + AC = m,$$

donc

$$m^2 = BC \,.\, (BC + CT),$$

mais $CT = 2CH$ est connu.

On connaît donc le produit m^2 des deux lignes BC et BT et leur différence CT, elles peuvent se construire et le problème s'achève sans difficulté.

Pour traiter la question par le calcul nous aurions à résoudre par rapport à a, b, c les trois équations :

$$b + c = m$$
$$ah = bc \sin A$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

leur résolution et la discussion des valeurs trouvées est un bon exercice que nous proposons aux élèves avec les questions suivantes :

Construire un triangle ABC *et calculer ses éléments connaissant un angle* A, *la bissectrice de cet angle et la somme des deux autres côtés.*

Construire un triangle ABC *et calculer ses éléments connaissant la base* BC, *la médiane et la bissectrice partant de* A.

Construire un triangle ABC *et calculer ses éléments connaissant un angle* CAB, *la différence* AC — AB *des deux côtés qui comprennent cet angle et la hauteur abaissée de* A *sur* BC.

La solution de ce dernier problème est tout à fait analogue à celle que nous venons de développer lorsque la somme AC + AB est donnée, le point D est alors sur la bisectrice de l'angle intérieur BAC au lieu d'être sur celle de l'angle extérieur.

Étant donné un cercle et une corde fixe AB, *prenons un point* C *mobile sur ce cercle, appelons* x, y, z, *les hauteurs abaissées respectivement de* A, B, C *sur les trois côtés et* x′, y′, z′ *les médianes partant de* A, B, C.

Déterminer C *de façon que l'une des quantités*

xy, yz, $x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2$, $y'^2 + z'^2$, $z'^2 + y'^2 \pm x'^2$,

soit maximum

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 180.)

58. Problème II. — Proposons-nous maintenant de construire, point par point, une parabole circonscrite à un trapèze donné. Le problème qui consiste à faire passer une

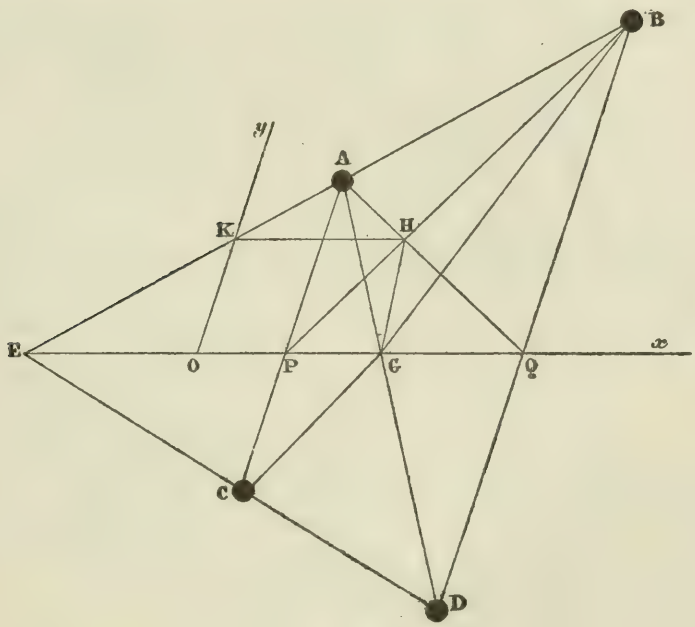


Fig. 43.

parabole par quatre points est, en général, un problème du second degré; il comporte deux solutions et, par ce fait même, ressort de la géométrie du compas. Mais on peut observer qu'il s'abaisse au premier degré dans le cas particulier qui va nous occuper; la cause en est que les bases

du trapèze proposé constituent une parabole singulière passant par les points donnés; il n'y a donc plus qu'une seule parabole circonscrite à ce trapèze, et nous allons montrer comment on peut la construire, point par point, en faisant usage uniquement d'une règle et d'une équerre.

La propriété que nous avons établie plus haut (§ 56) ne s'applique pas seulement à l'axe et à la tangente au sommet de la parabole; elle est encore vérifiée pour un diamètre quelconque et pour la tangente à l'extrémité de ce diamètre; la démonstration même que nous avons donnée prouve le fait que nous avançons, puisqu'elle n'exige, en aucune façon, que les triangles considérés soient rectangles, mais seulement semblables. D'après cela, soit ABCD le trapèze proposé; les points E, G déterminent le diamètre ox conjugué des cordes AC et BD. D'autre part, des points connus P et Q, on déduit H. En menant par H une parallèle à ox jusqu'à sa rencontre en K avec AB, le point K, d'après la propriété rappelée, appartient à la tangente à l'extrémité du diamètre EG. Finalement, on a donc cette tangente en traçant, par K, une parallèle aux bases du trapèze.

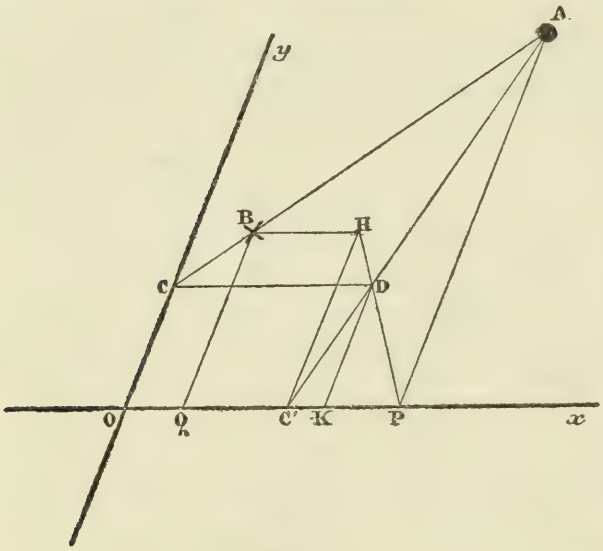


Fig. 44.

Il nous reste à montrer comment on peut, dans ces conditions, tracer la parabole point par point (*).

Les données que nous nous accordons sont : 1° un diamètre ox; 2° la tangente oy à l'extrémité de ce diamètre;

(*) Pour éviter des répétitions continuelles, il sera toujours sous-entendu que le tracé visé doit être effectué avec la règle et l'équerre.

3° enfin, un point A. Par A, traçons deux transversales arbitraires, qui rencontrent : l'une oy, au point C ; l'autre ox, au point C'. Menons ensuite CD parallèlement à ox, jusqu'à sa rencontre avec AC', au point D ; enfin complétons la construction, comme l'indique la figure ; le point B, ainsi obtenu, représente le second point d'intersection de la transversale AC avec la parabole.

En effet, nous avons (§ 14)

$$\frac{1}{DK} = \frac{1}{HC'} + \frac{1}{AP},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{OC} = \frac{1}{BQ} + \frac{1}{AP}.$$

Ainsi, B est bien le second point d'intersection de AB avec la parabole qui correspond aux données énoncées plus haut.

59. Remarque. — Si l'on donne le sommet S, l'axe Δ et un point A d'une parabole P, le foyer de cette courbe peut s'obtenir par la construction que nous allons indiquer.

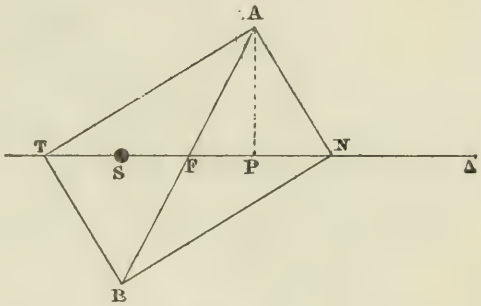


Fig. 45.

Abaissons AP perpendiculaire sur Δ et prenons ST = PS ; AT est la tangente en A à P. Sur AT construisons un rectangle ATBN, la diagonale AB coupe Δ en un point F qui foyer de la courbe.

En effet, nous avons

$$SF + TS = FP + PN,$$

et

$$FP = SP - SF.$$

Si nous ajoutons ces deux égalités, puis si nous observons que TS = SP, et que la sous-normale PN est égale à p, nous obtenons l'égalité

$$2SF = p,$$

laquelle prouve bien que F est le foyer de P.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. D'OCAGNE, *ingénieur.*

... J'ai appris dernièrement, par M. Laisant, que vous avez publié une note d'un de vos correspondants qui résout un problème dont j'ai moi-même, il y a quelques années, donné une solution dans les *Nouvelles Annales.*

Il s'agit de mener par le sommet d'un triangle une droite qui divise le côté opposé proportionnellement aux puissances n^{es} des côtés adjacents.

Or, le hasard me fait découvrir dans les *Nouvelles Annales* (1re série, t. XV, 1856, p. 218) une élégante construction de M. Poudra qui résout le problème. Je m'empresse de vous communiquer cette solution essentiellement différente de la mienne.

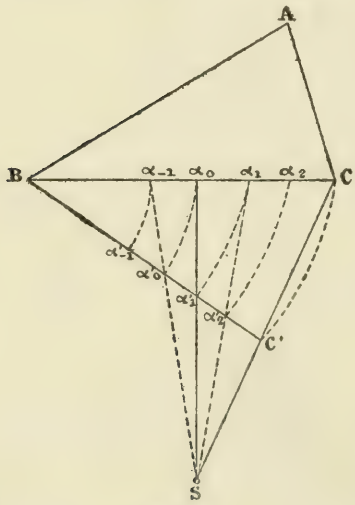


Fig. 1.

Désignons d'une manière générale par α_n le point BC tel que

$$\frac{\alpha_n B}{\alpha_n C} = \frac{\overline{AB}^n}{\overline{AC}^n}.$$

De cette façon, α_0 sera le milieu de BC, α_1 le pied de la bissectrice, α_2 le pied de la symédiane, etc.

Supposons qu'on fasse tourner la droite BC d'un angle quelconque autour du point B. C viendra en C', α_0 en α_0, α_1 en α'_1, α_2 en α'_2,..... α_{-1} en α'_{-1}.....

Les droites CC', $\alpha_0\alpha'_1$, $\alpha_1\alpha'_2$, $\alpha_2\alpha'_3$,..... $\alpha_{n-1}\alpha_n$, ainsi que $\alpha_{-1}\alpha'_0$, $\alpha_{-2}\alpha'_1$,..... concourent en un même point S. Ce curieux théorème est facile à démontrer. Il donne la construction cherchée. En effet, on sait construire α_0 et α_1, et, par suite α'_1. On prend le point de rencontre S de $\alpha_0\alpha'_1$ avec CC'; ce point

permet de construire de proche en proche toute la série des points considérés.

Mais en cherchant à démontrer le théorème de M. Poudra je me suis aperçu que ce n'était là qu'un cas particulier d'un théorème général dont un autre cas particulier me semble plus remarquable. Vous allez en juger.

Théorème général. — *Soit, d'une manière générale* α_n *le point qui divise* BC *proportionnellement aux puissances* n^es^ *des côtés adjacents, c'est-à-dire tel que*

$$\frac{B\alpha_n}{\alpha_n C} = \frac{AB^n}{AC^n} \text{ ou } \frac{c^n}{b^n}.$$

Par le sommet B *menons une droite quelconque* BC′ *et par tous les points* α_n *des parallèles* $\alpha_n\,\alpha_n'$ *à* CC′, *le point* α_n' *étant sur* BC′. *Toutes les droites telles que* $\alpha_n\alpha_{n+1}'$ *coupent* CC′ *au même point* S.

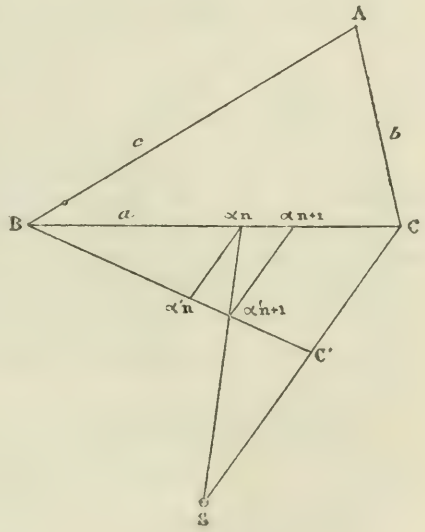


Fig. 2.

En effet, le théorème des transversales appliqué au triangle BCC′ donne

$$1 = \frac{\alpha_n B \,.\, \alpha_{n+1}' C' \,.\, SC}{\alpha_n C \,.\, \alpha_{n+1}' B \,.\, SC'}$$

$$= \left(-\frac{c^n}{b^n}\right)\left(-\frac{b^{n+1}}{c^{n+1}}\right)\frac{SC}{SC'},$$

d'où

$$\frac{SC}{SC'} = \frac{c}{b},$$

ce qui démontre le théorème.

On voit qu'on pourrait encore généraliser en prenant les droites telles que $\alpha_n\alpha_{n+1}'$, parce qu'alors on aurait

$$\frac{SC}{SC'} = \frac{c^i}{b^i},$$

et le point S serait encore fixe; mais au point de vue de la construction cherchée cela serait sans intérêt.

Nous pouvons maintenant supposer que la droite BC′

coïncide avec BA. Alors nous obtenons sur AC le point S tel que

$$\frac{SC}{SA} = \frac{c}{b}.$$

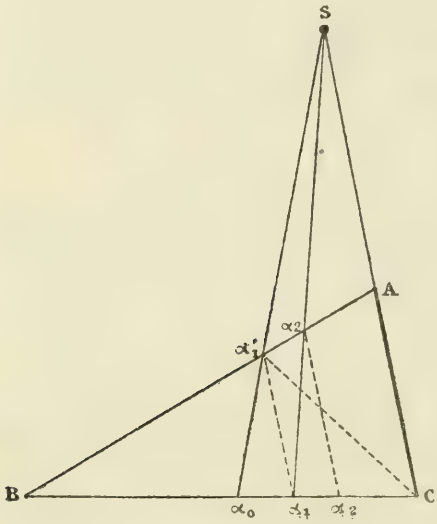


Fig. 3.

D'après la définition même du point S, on voit qu'on le construira en menant par le pied α_1 de la bissectrice issue de A une parallèle $\alpha_1\alpha_1'$ à AC et joignant le point α_1' au milieu α_0 de BC.

Tirant $S\alpha_1$ qui coupe AB en α_2' et menant $\alpha_2'\alpha_2$ parallèle à AC, on obtient le pied α_2 de la symédiane, etc., etc. Cette construction est peut-être plus frappante que celle de M. Poudra.

Nota. — La solution que M. Boubals a donnée dans ce journal (année courante, p. 31) peut être considérée comme une conséquence particulière du principe général observé ci-dessus par M. d'Ocagne. La disposition adoptée par M. Boubals place le point fixe S au sommet même du triangle, au point A.

Au point de vue pratique, les arcs de cercle de la *fig. 1* devraient être évidemment supprimés et remplacés par des parallèles à CC'. G. L.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1885.

Section des sciences mathématiques.

Compositions des 24, 25 et 27 juillet.

Algèbre et Trigonométrie. — Dans un triangle AOB, on donne les deux côtés de l'angle droit, $OA = a$, $OB = b$, ainsi qu'un point H situé sur le côté OB ou sur son prolongement. Trouver sur la droite indéfinie OA un point C tel que le triangle ACD, obtenu en joignant les points C et H, ait une surface égale à la moitié de celle du triangle AOB.

Résoudre le triangle ACO dans le cas où les segments OH et OB étant de même sens, le premier est triple du second. Effectuer numériquement cette résolution en supposant :

$$a = 3^m, \qquad b = 4^m.$$

Géométrie descriptive. — Une hélice est tracée sur un cylindre circulaire droit, à axe vertical.

Construire l'ombre portée obliquement par cette courbe sur le plan horizontal (rayons parallèles).

On fera l'épure, à main levée, dans le cas le plus simple.

Mécanique. — Un corps solide homogène, de densité 1.5, a la forme d'un cylindre droit, dont le rayon est R et la hauteur $0^m,45$ On fixe les deux extrémités d'une arête, et en faisant exécuter au solide de petites oscillations autour de cette droite, l'écart initial étant 6°, et la vitesse initiale nulle.

1° Calculer le moment d'inertie relatif à l'axe de suspension;

2° Déterminer le rayon R de manière que le solide exécute deux oscillations par seconde;

3° Quelle est, dans ces conditions, la force vive du solide au moment où il passe par sa position d'équilibre?

4° Trouver les axes de suspension, parallèles au précédent, qui donneraient la même durée pour l'oscillation.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(CERTIFICAT D'ÉTUDES)

CHARENTE-INFÉRIEURE

Session unique (juillet 1885).

Mathématiques. — Un cône droit, $2^m,31$ de rayon, et de hauteur son sommet au-dessous de sa base; on laisse tomber dans ce cône une phère de $1^m,50$ de rayon. On demande :

1° De calculer le rayon de la circonférence de tangence;

2° De calculer le volume du petit cône qui se trouve au-dessous de la sphère;

3° De démontrer que si, à partir de la sphère en question et au-dessous, on inscrit dans le cône des sphères tangentes entre elles, les rayons de toutes ces sphères sont en progression géométrique.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

(BACCALAURÉAT)

POITIERS

Session de juillet 1885.

PREMIÈRE SÉRIE.

Mathématiques. — 1° Droite et plans perpendiculaires.

2° Application des logarithmes aux annuités.

DEUXIÈME SÉRIE.

Mathématiques. — 1° Décomposer le trinôme $x^2 + px + q$ en deux facteurs du premier degré.

2° Déterminer la surface engendrée par une ligne polygonale régulière tournant autour d'une ligne droite située dans son plan, et passant par son centre.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

Examens de juillet 1885.

RENNES

1° Trouver une formule à l'aide de laquelle on puisse calculer avec une approximation déterminée le rayon d'une circonférence de longueur donnée.

2° Étant donnée une circonférence de rayon R et un diamètre fixe XX′ on fait, de part et d'autre de ce diamètre, un angle α et à la suite un autre angle x. — En joignant les extrémités des rayons extrêmes de ces angles on forme un trapèze isocèle inscrit.

On demande :

1° De calculer sous forme logarithmique la surface de ce trapèze en fonction de R, α et x;

2° En attribuant à α la valeur 45°, trouver la valeur de x pour laquelle la surface du trapèze est maximum;

3° Dans ce dernier cas que devient le trapèze?

LILLE

17 juillet 1885.

I. — Les projections d'une droite perpendiculaire sur un plan sont perpendiculaires sur les traces de même nom du plan. Que peut-on conclure de la réciproque?

II. — Par le centre O d'une ellipse donnée on mène le rayon OM qui fait avec le grand axe l'angle α. Trouver la longueur de ce rayon OM, les longueurs des rayons vecteurs du point M.

21 juillet 1885.

I. — La parallaxe du soleil étant supposée égale à 8″813, calculer en rayons terrestres la distance moyenne du soleil à la terre; calculer aussi les distances maxima et minima de l'astre, sachant que l'excentricité de l'ellipse est égale à 0,1677.

II. — Les rayons des bases d'un tronc de cône à bases parallèles étant R et r et la hauteur h, trouver à quelle distance de la base inférieure il faut mener une section parallèle à cette base pour que l'aire de cette section soit moyenne proportionnelle entre les aires des deux bases. — De laquelle des deux bases cette section est-elle le plus rapprochée?

23 juillet 1885.

I. — Connaissant la durée A = 365 jours 256 de l'année sidérale, et la durée S = 29 jours 530 de la révolution synodique de la lune, calculer la révolution sidérale de celle-ci.

II. — Sur une ellipse donnée, on considère un point M dont r est l'un des rayons vecteurs : déterminer l'angle que font entre eux les deux rayons vecteurs du point M. Dans quel cas cet angle est-il maximum?

QUESTION 129

Solution par E. Vigarié, élève au Lycée de Toulouse.

Deux cercles égaux O′ *et* O″ *sont tangents au même point à un cercle* O. *On mène la tangente commune* AA′ *aux deux cercles* O *et* O′ *et l'on décrit les deux cercles* C *et* C′ *tangents à la fois aux deux cercles* O, O′ *et à la tangente* AA′. *Puis, sur la ligne* OO″ *comme diamètre on décrit une circonférence* S. *Si* γ *est le cercle tangent à la fois aux trois cercles* O, O″ *et* S, *le diamètre du cercle* γ *est moyen proportionnel entre les rayons des cercles* C *et* C′. (Perrin.)

Soient R, R′, r, r', r'' les rayons des circonférences O′, O, C, C′, et γ. La circonférence C′ étant tangente à la fois aux deux circonférences O et O′ et à leur tangente commune AA′, on a (Voir Journal, t. I, 1877, p. 60-61) la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{r'}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R'}}.$$

D'où

$$\sqrt{r'} = \frac{\sqrt{RR'}}{\sqrt{R} + \sqrt{R'}}.$$

De même, la circonférence O occupant par rapport aux circonférences O′ et C la position de la circonférence C′ par rapport aux circonférences O et O′, on a

$$\frac{1}{\sqrt{R'}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

D'où

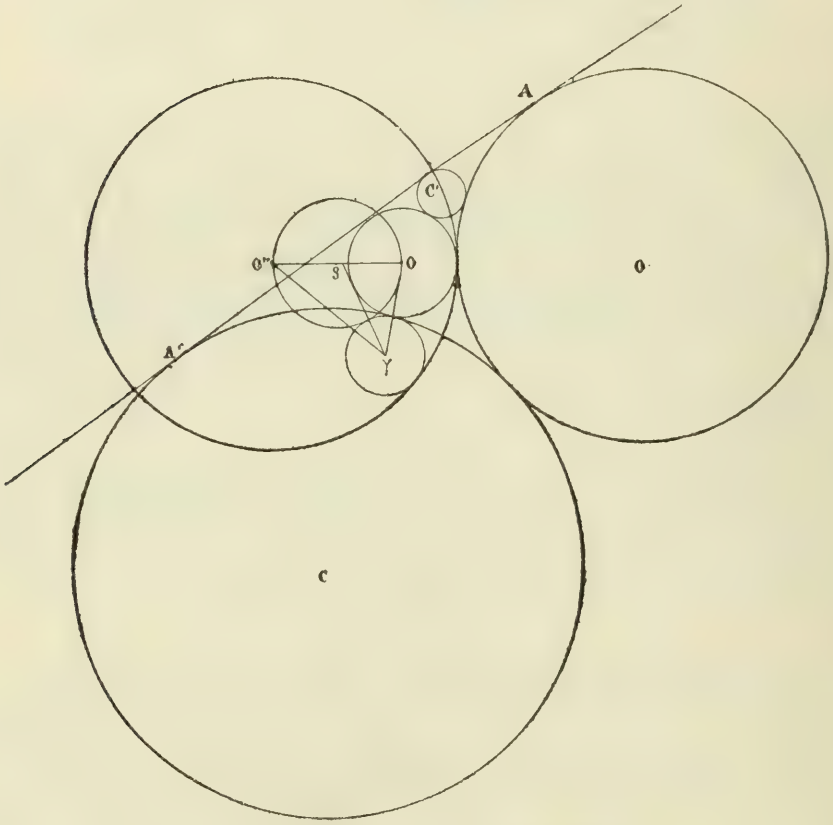
$$\sqrt{r} = \frac{\sqrt{RR'}}{\sqrt{R} - \sqrt{R'}},$$

par suite

$$rr' = \left(\frac{RR'}{R - R'}\right).$$

Joignons le point γ aux points O, O″ et S. Le rayon OS de la circonférence S est évidemment

$$\frac{R - R'}{2},$$



Le théorème relatif à la médiane donne

$$\overline{O\gamma}^2 + \overline{O''\gamma}^2 = 2\,\overline{S\gamma}^2 + 2\,\overline{SO}^2$$

ou bien

$$\left(R' + r''\right)^2 + \left(R - r''\right)^2$$

$$= 2\left(\frac{R - R'}{2} + r''\right)^2 + 2\left(\frac{R - R'}{2}\right)^2.$$

En développant et en simplifiant, δ étant le diamètre du cercle γ, on a

$$2r'' = \frac{RR'}{R - R'} = \delta,$$

ou

$$\delta^2 = \left(\frac{RR'}{R - R'}\right)^2,$$

et, par suite,

$$\delta^2 = rr'.$$

NOTA. — Solution analogue par M. Chapron, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube.

QUESTION 130

Solution par M. EMILE VIGARIÉ, élève au Lycée Saint-Louis.

Le volume compris entre deux sphères tangentes extérieurement et le cône circonscrit à ces sphères est équivalent à la moitié du volume compris entre ce cône et la sphère passant par les deux cercles de contact du cône avec les deux sphères données.

(Perrin.)

Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Si d'un point B, pris hors d'un cercle O, on mène deux tangentes BA, BC, et que l'on projette le point A en D sur OC, le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC tournant autour de OC est équivalent au volume engendré par le triangle rectangle BCD tournant autour du même axe.

Le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est égal à la différence des volumes engendrés par le trapèze ABCD et le triangle mixtiligne ACD, on a donc :

$$V = \frac{\pi DC}{3}(\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + AD.BC) - \left(\frac{\pi\overline{AD}^2.DC}{2} + \frac{\pi\overline{DC}^3}{6}\right)$$

ou

$$V = \frac{\pi DC}{6}(2\overline{BC}^2 + 2AD.BC - \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2);$$

or

$$\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 = 2AD.BC.$$

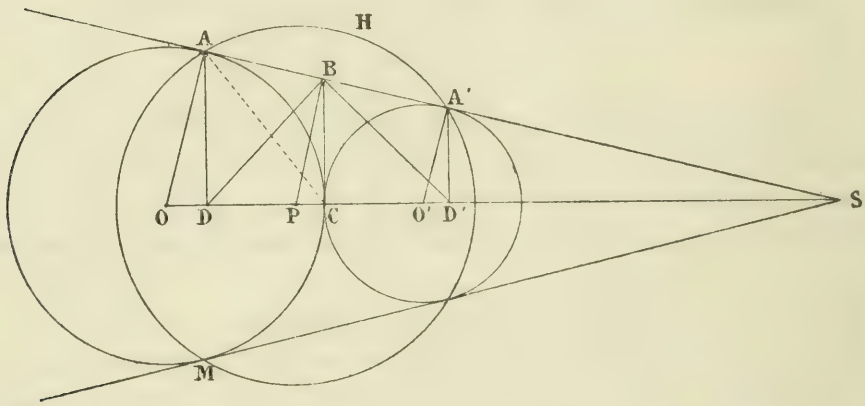
Par suite

$$V = \frac{\pi \overline{BC}^2 . DC}{3},$$

volume qui est bien égal au volume du cône de sommet D engendré par le triangle ADC tournant autour de OC.

Revenons au problème.

Soient O et O′ les deux sphères tangentes en C et ASM le cône circonscrit tangent en A et en A′ aux sphères données. Menons la tangente intérieure CB limitée en B sur AA′. D'après le lemme précédent les volumes engendrés par les triangles mixtilignes ABC, A′BC sont respectivement égaux aux volumes engendrés par les triangles BCD, BCD′; par



suite, le volume V compris entre les deux sphères est égal à la somme des volumes des deux cônes; on a donc

$$V = \frac{\pi \overline{BC}^2 . DD'}{3}.$$

Calculons maintenant le volume V′ compris entre le cône et la sphère passant par les cercles de contact du cône et des sphères données. Si par le milieu B de AA′ on élève une perpendiculaire à cette droite, elle rencontrera OO′ en un point P qui est le centre de la sphère cherchée. En décrivant de ce point comme centre, avec PA = PA′ pour rayon, une circonférence, le volume engendré par le segment AHA′ tournant

autour de OO′ sera le volume compris entre la sphère et le cône. Or ce volume est

$$V' = \frac{\pi \overline{AA'}^2 . DD'}{6},$$

ou, en remarquant que $AA' = 2BC$,

$$V' = \frac{2\pi \overline{BC}^2 . DD'}{3};$$

on a donc bien

$$V = \frac{V'}{2}.$$

D'ailleurs en appelant R et r les rayons des sphères données, on trouve pour expression des volumes V et V′ :

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{R^2 r^2}{R + r} \quad ; \quad V' = \frac{8}{3}\pi \frac{R^2 r^2}{R + r}.$$

Remarque. — On peut rapprocher de cet exercice le théorème suivant, dû, croyons-nous, à M. G. Dostor :

D'un point A, *extérieur à un cercle* O, *on mène un diamètre* ACC′ *et une droite* AB *tangente au cercle en* B. *Si l'on fait tourner la figure autour de* AO *comme axe, les volumes engendrés par les triangles mixtilignes* ABC, ABC′ *sont équivalents aux deux cônes ayant pour rayon de base respectifs les droites* AC, AC′ *et pour hauteur commune la projection du rayon de contact* OB *sur l'axe* AO.

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Chapellier, élève au lycée de Nancy; Louis Géry, élève au pensionnat Saint-Joseph à Toulouse; J. Chapron, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube; Paul Bourgarel à Antibes.

QUESTION 135

Solution par M. Edmond Bordage, professeur au Collège de Nantua.

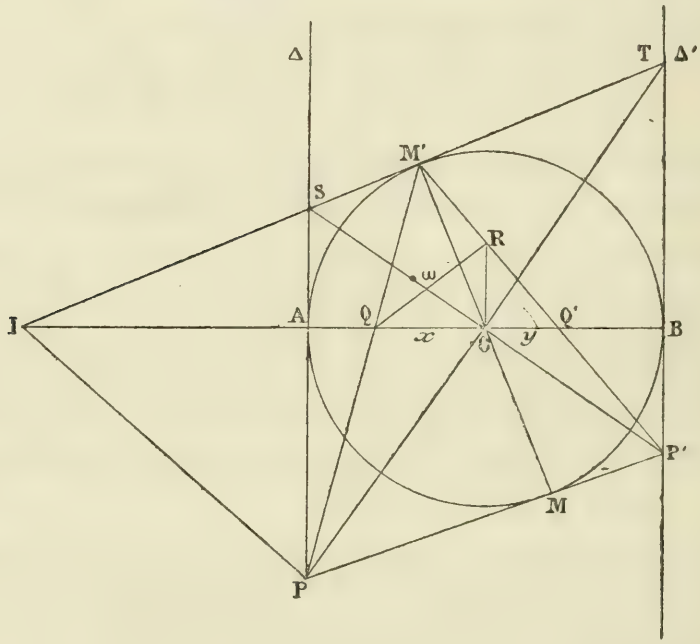
On considère un cercle de centre O *et un diamètre* AB; *aux points* A *et* B *on mène les tangentes* Δ, Δ′, *soit* M *un point pris sur la circonférence, la tangente en ce point rencontre* Δ *et* Δ′ *en* P *et* P′. *Soit* M′ *le point diamétralement opposé à* M. *Les droites* M′P, M′P′ *rencontrent* AB *en* Q *et* Q′; *ayant posé* OQ = x,

OQ′ = y, *démontrer la relation* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{R}$ (R *étant le rayon de la circonférence donnée). En déduire que si l'on porte* OQ′ *de* O *en* R *sur le diamètre perpendiculaire à* AB, *la droite* RQ *passe par un point fixe.* (G. L.)

Par le point M′ je mène la tangente ST qui coupe AB en I. Je tire les droites TP, SP′ qui passent par le centre O. J'ai

$$\frac{IS}{IT} = \frac{SA}{TB} = \frac{M'S}{M'T}.$$

Ceci nous montre que la division ISM′T est *harmonique.*



Par suite, les faisceaux P (SIM′T) et P′ (ISM′T) sont *harmoniques* et déterminent respectivement sur AB les divisions harmoniques IAQO et IOQ′B. En appliquant alors une propriété des divisions harmoniques nous avons

$$\frac{1}{OQ} + \frac{1}{OI} = \frac{2}{OA},$$

$$\frac{1}{OQ'} - \frac{1}{OI} = \frac{2}{OB}.$$

Ajoutons membre à membre et remplaçons OB par OA, il vient

$$\frac{1}{OQ} + \frac{1}{OQ'} = \frac{4}{OA}.$$

Si enfin nous remplaçons OQ par x, OQ′ par y et OA par R, nous avons en définitive

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{R}.$$

La seconde partie est une conséquence immédiate de la relation précédente. En général, si sur deux droites Ox, Oy on prend deux points A, B mobiles, tels que $OA = p$, $OB = q$ avec la relation

$$\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} = 1, \qquad (\alpha, \beta \text{ constants})$$

la droite AB passe par un point fixe, point qui a pour coordonnées α, β par rapport au système Ox, Oy.

Dans le cas présent, le point fixe est le point ω situé sur la bissectrice de ROQ à la distance $\frac{R}{4}\sqrt{2}$ du point O.

Nota. — Autres solutions par MM. Chapron, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube; Vigarié, élève au lycée Saint-Louis.

QUESTION 138

Solution par M. Th. Caronnet, élève de mathématiques spéciales au Collège Chaptal.

Soit yOx *un angle,* A *un point pris sur* Ox; *par le point* A *on mène une droite* AB, *et par le point* O *une droite* OP, *telle que l'angle* POy *soit égal à l'angle* BAx.

Trouver le lieu géométrique du point d'intersection de AB *et de* OP. (L. Lévy.)

Remarquons que les droites AB et OP sont des antiparallèles par rapport à l'angle OBA.

Donc le lieu cherché est un cercle tangent à Oy au point O et passant par le point A.

Nota. — Solutions semblables par MM. Louis Simon et Delpiron, au collège Chaptal; Jules Huré, au collège de Montargis. D'autres solutions par MM. Voignier, au lycée de Nancy; Perrin, maître-répétiteur au lycée de Clermont-Ferrand; Mazeman, élève au lycée de Lille (classe de M. Lefebvre),

concluent à une hyperbole, pour le lieu géométrique proposé. C'est qu'en effet on pouvait considérer la droite Oy comme ayant tourné d'un angle égal à BAx, soit dans le sens direct, soit dans le sens inverse.

QUESTIONS PROPOSÉES

194. — On donne une droite Δ, un point A sur cette droite, et un point B hors de cette droite. Un mobile parcourt la droite Δ du point A à un point M avec une vitesse constante v, puis il va en ligne droite du point M au point B avec une vitesse constante v'.

Position du point M pour que le temps du parcours AMB soit minimum. Remarquer que cette position est indépendante de celle du point A sur Δ. Lieu de cette position lorsque les points A et B étant fixes, on fait pivoter la droite Δ autour du point A.

Ce dernier lieu est un cercle. *(D'Ocagne.)*

195. — Par les sommets d'un triangle ABC on mène les parallèles aux côtés; et par les sommets A_1, B_1, C_1 du triangle ainsi obtenu on mène encore les parallèles aux côtés du triangle ABC. Démontrer que si par le point de concours des bissectrices du troisième triangle A_2 B_2 C_2 on mène les parallèles aux côtés, ces droites déterminent sur les côtés du triangle ABC les points qui sont les sommets d'un hexagone circonscriptible à un cercle. *(G. Boubals.)*

196. — Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur plus petit multiple commun. *(Bordage.)*

NOTA. — L'abondance des matières nous oblige à remettre à un prochain numéro la suite de l'article de M. Ed. Lucas, sur les carrés magiques.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19448-5.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 198.)

L

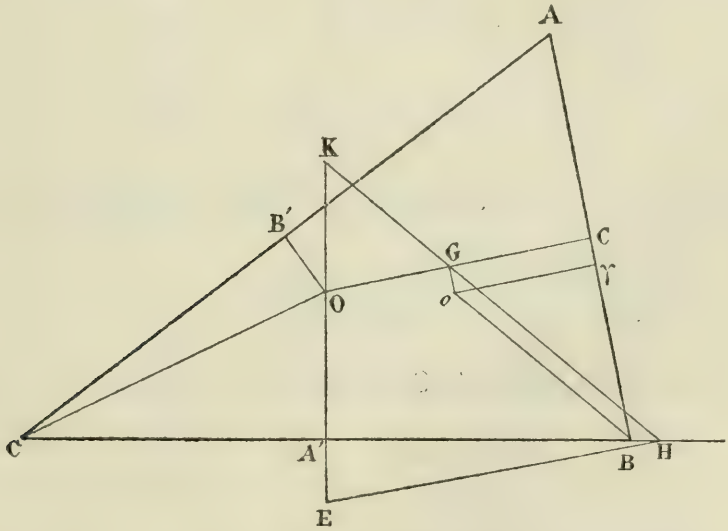
La somme des perpendiculaires abaissées du centre O *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *sur les trois côtés de ce triangle est égale à la somme des rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit.*

Ce théorème dû à Carnot (géométrie de position) est tout à fait classique ; mais la démonstration suivante, différente de celle qui se donne ordinairement, est très simple et n'emploie que les propositions contenues dans les deux premiers livres de la Géométrie de Legendre.

Soit o le centre du cercle inscrit à ABC,

Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés CB, AC, BA,

Soit γ le point de contact sur AB du cercle inscrit.



Par o centre du cercle inscrit je mène une parallèle à BA qui coupe OC′ en G.

Par G je mène une parallèle à oB bissectrice intérieure de l'angle B. Cette parallèle coupe OA′ en K et CB en H.

Je mène par H une perpendiculaire à AB, perpendiculaire qui coupe OA′ en E, et je joins OC.

On a

$$A'H = A'B + BH.$$

Or, GH étant parallèle à la bissectrice de ABC,

$$BH = OG = C'\gamma = C'B - \gamma B = \frac{AC - CB}{2};$$

donc

$$A'H = \frac{AC}{2}.$$

Comme HE est perpendiculaire à AB, l'angle EHA′ est complémentaire de ABC, c'est-à-dire égal à B′CO, les deux triangles rectangles HA′E, CB′O sont donc égaux et l'on a :

$A'E = OB'$,

$EH = OC$, rayon du cercle circonscrit.

Cela posé on a

$$O\widehat{G}K = E\widehat{H}K,$$

mais

$$E\widehat{H}K = E\widehat{H}A' + A'\widehat{H}K,$$

ou

$$90 - B + \frac{B}{2}$$

ou

$$90 - \frac{B}{2}.$$

Comme c'est aussi la valeur de $O\widehat{G}K$, les deux triangles KOG et KEH sont isocèles.

$OA' + OB' + OC'$ peut donc s'écrire :

$$OA' + A'E + OG + GC',$$

ou

$$OA' + A'E + OK + o\gamma,$$

ou

$$KE + o\gamma,$$

ou

$$R + r.$$

En appelant R et r le rayon du cercle circonscrit et celui du cercle inscrit au triangle ABC.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si r_a désigne le rayon du cercle ex-inscrit tangent au côté BC et au prolongement des deux autres, on démontrerait d'une façon tout à fait analogue que l'on a

$$OB' + OC' - OA' = r_a - R.$$

On déduit de là facilement:

Si dans un triangle le rayon d'un cercle ex-inscrit est égal au rayon du cercle circonscrit, l'une des trois distances du point de concours des hauteurs aux sommets est égale à la somme des deux autres, et réciproquement.

LI

Étant donné un triangle ABC :

1° *Trouver le lieu des points* M *tels que la somme des puissances du point* A *par rapport aux cercles décrits sur* MB *et sur* MC *comme diamètre soit égale à un carré donné* K^2 ;

2° *C'est la différence des puissances qui est donnée ;*

3° *Trouver le point* M *tel que si l'on décrit des circonférences sur* MA, *sur* MB *et sur* MC *comme diamètre, la somme des puissances d'un sommet, par rapport aux deux circonférences qui ne passent pas par lui, soit la même pour les trois sommets.*

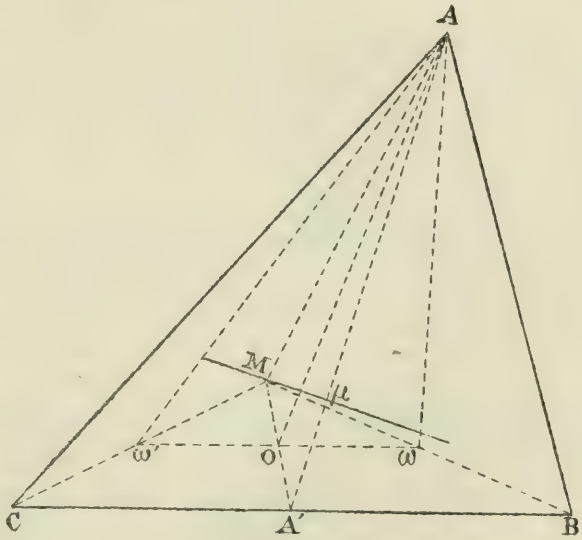


Fig. 1.

Cherchons le premier lieu:

Soit *(fig. 1)* ω, ω'A', O les milieux de MB, MC, BC, ωω', on voit évidemment que M, O, A' sont en ligne droite et que O est le milieu de MA'.

La condition du problème est

$$A\omega'^2 - M\omega'^2 + A\omega^2 - M\omega^2 = K^2;$$

mais comme on a

$$A\omega'^2 + A\omega^2 = 2AO^2 + 2\left(\frac{\omega\omega'}{2}\right)^2,$$

$$M\omega'^2 + M\omega^2 = 2MO^2 + 2\left(\frac{\omega\omega'}{2}\right)^2,$$

elle peut s'écrire

$$2AO^2 - 2MO^2 = K^2;$$

mais comme on a

$$2AO^2 + 2M\overline{O}^2 = MA^2 + AA'^2,$$

et que

$$4MO^2 = MA'^2,$$

on a

$$MA^2 + AA'^2 - MA'^2 = K^2. \qquad (1)$$

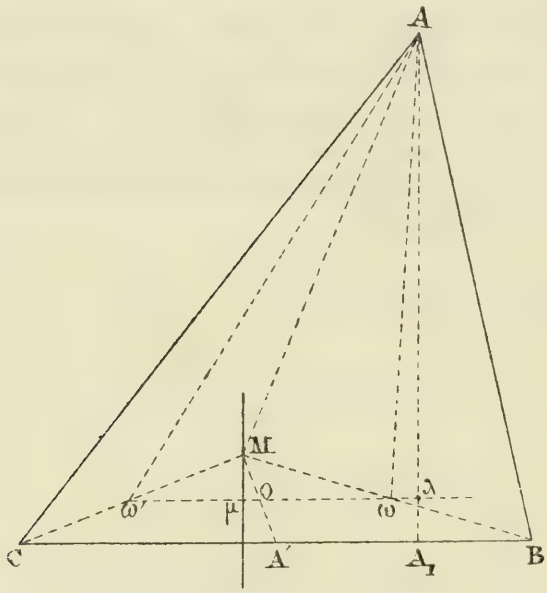


Fig. 2.

La différence $MA^2 - MA'^2$ des carrés des distances du point M aux points A et A' étant constante, le lieu est une perpendiculaire à la médiane AA', etc.

Cherchons le deuxième lieu *(fig. 2)*; nous adopterons les mêmes notations que dans le problème précédent et nous appellerons A, le pied de la hauteur AA_1 sur BC, λ le point où cette hauteur coupe $\omega\omega'$, μ la projection orthogonale de M sur $\omega\omega'$.

La condition donnée par l'énoncé est

$$A\omega'^2 - M\omega'^2 - (A\omega^2 - M\omega^2) = K^2,$$

ou

$$A\omega'^2 - A\omega^2 - (M\omega'^2 - M\omega^2) = K^2.$$

ou

$$\lambda\omega'^2 - \lambda\omega^2 - (\mu\omega'^2 - \mu\omega^2) = K^2,$$

ou

$$(\lambda\omega' + \lambda\omega)(\lambda\omega' - \lambda\omega) - (\mu\omega' + \mu\omega)(\mu\omega' - \mu\omega) = K^2,$$

ou, puisque $\omega\omega' = \frac{a}{2}$,

$$(\lambda O - \mu O)\, a = K^2,$$

$$\lambda\mu = \frac{K^2}{a};$$

le lieu est donc la parallèle à la hauteur menée par λ.

Occupons-nous de la troisième partie.

Soient A′, B′, α, β les milieux de BC, AC, A′B, B′A, soit μ la projection de M sur $\alpha\beta$ *(fig. 3)*.

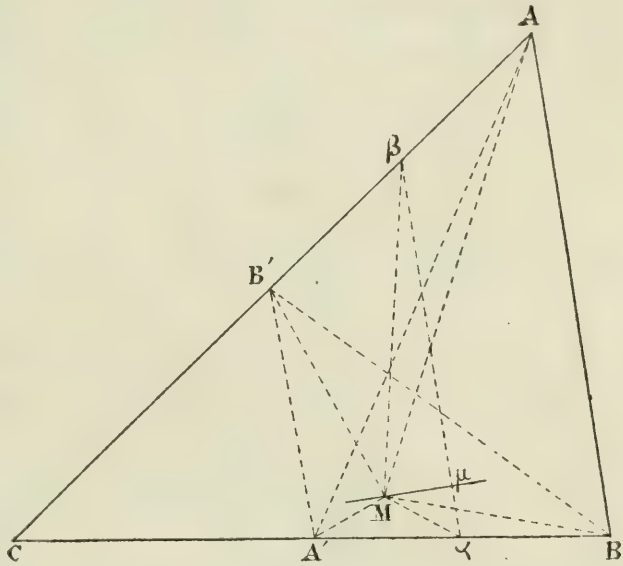


Fig. 3.

Puisque K doit avoir la même valeur pour chaque sommet, on doit avoir d'après l'équation (1) de la première partie

$$MA^2 - MA'^2 + AA'^2 = MB^2 - MB'^2 + BB'^2,$$

ou

$$MA^2 + MB'^2 - (MB^2 - MA'^2) = BB'^2 - AA'^2,$$

ou

$$2M\beta^2 + 2\left(\frac{B'A}{2}\right)^2 - \left(2M\alpha^2 + 2\left(\frac{A'B}{2}\right)^2\right)$$
$$= \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4};$$

ou, puisque

$$B'A = \frac{b}{2} \text{ et } A'B = \frac{a}{2},$$

$$M\beta^2 - M\alpha^2 = \frac{7}{16}(a^2 - b^2),$$

M est donc sur une perpendiculaire élevée à $\alpha\beta$ au point μ tel que

$$\mu\beta^2 - \mu\alpha^2 = \frac{7}{16}(a^2 - b^2);$$

on trouve facilement

$$\mu\alpha = \frac{9c^2 + 7b^2 - 7a^2}{24c},$$

$$\mu\beta = \frac{9c^2 + 7a^2 - 7b^2}{24c}.$$

On déterminerait de même une autre droite contenant le point M au moyen de l'égalité

$$MA^2 - MA'^2 + AA'^2 = MC^2 - MC'^2 + CC'^2,$$

et le problème est résolu.

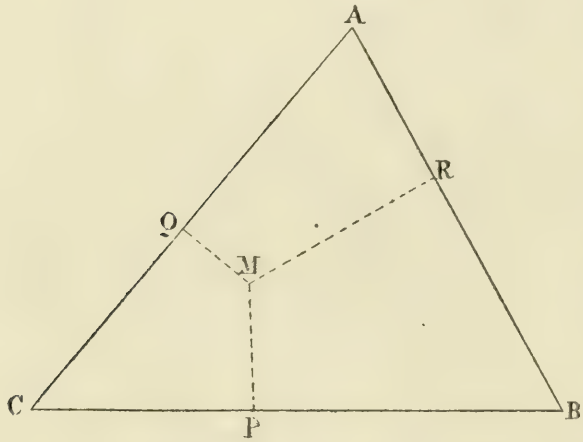


Fig. 4.

Voici une autre solution de cette troisième partie.

Les trois circonférences décrites sur MA, MB, MC comme diamètre se coupent deux à deux sur les côtés du triangle en P sur BC, en Q sur AC, en R sur AB.

Posons

$$CP = \xi,\ AQ = \eta,\ BR = \zeta.$$

On a évidemment d'après les conditions de l'énoncé

$$K^2 = CP \,.\, CB + CQ \,.\, CA = BP \,.\, BC + BR \,.\, BA$$
$$= AR \,.\, AB + AQ \,.\, AC,$$

d'où :

$$a\xi + b^2 - b\eta = K^2,$$
$$b\eta + c^2 - c\zeta = K^2,$$
$$c\zeta + a^2 - a\xi = K^2;$$

en ajoutant membre à membre on a

$$K^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3};$$

et la valeur de la constante est déterminée.

D'ailleurs, d'après une propriété connue, puisque les per-

pendiculaires à BC, AC, AB menées respectivement par P, Q, R se coupent en M, on a

$$CP^2 + BR^2 + AQ^2 = PB^2 + RA^2 + QC^2,$$

d'où

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = a\xi + b\eta + c\zeta.$$

Les trois équations deviennent ainsi

$$a\xi + b^2 - b\eta = \frac{2}{3}(a\xi + b\eta + c\zeta),$$

$$b\eta + c^2 - c\zeta = \frac{2}{3}(a\xi + b\eta + c\zeta),$$

$$c\zeta + a^2 - a\xi = \frac{2}{3}(a\xi + b\eta + c\zeta),$$

où, pour abréger, $a\xi$, $b\eta$, $c\zeta$ peuvent être prises pour inconnues. On tire de là :

$$\xi = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{6a},$$

$$\eta = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{6b},$$

$$\zeta = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c}.$$

Nous engageons les élèves à chercher les distances du point M aux côtés, ils trouveront :

$$MP = \frac{3a^2(b^2 + c^2 - a^2) - 8S^2}{12aS},$$

et pour les diamètres des cercles

$$\overline{MC}^2 = \frac{9a^2b^2c^2 - 4S^2(4a^2 + 4b^2 + c^2)}{36S^2};$$

c'est un excellent exercice de calcul.

En observant que le second membre peut s'écrire

$$\frac{4}{9}R^2(4\cos^2 A + 4\cos^2 B + \cos^2 C),$$

on a

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

(A suivre.)

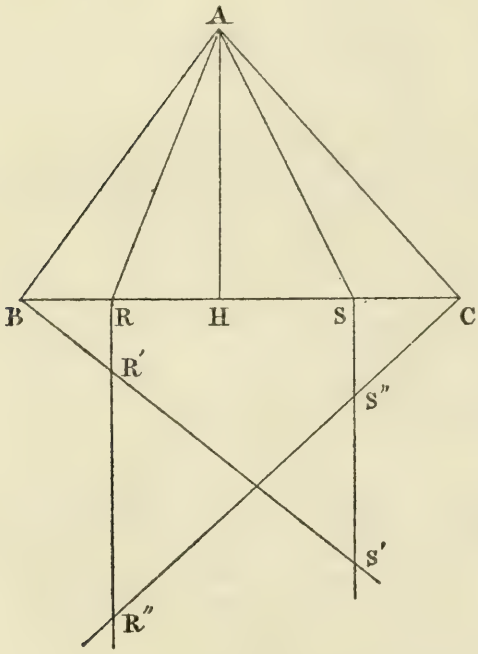
NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié,** élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

(*Suite*, voir p. 171.)

22. Théorème. — *Les perpendiculaires élevées à la base* BC *par les pieds* R, S *de deux droites inverses rencontrent les perpendiculaires élevées à* AB *et* AC *en* B *et* C *et des points* R′, S′, R″, S″, *tels que*

$$\frac{BR' \,.\, BS'}{CS'' \,.\, CR''} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4 \text{ (*)}.$$



Menons la hauteur AH_a. Les triangles BRR′, BSS′ sont semblables à ABH_a, de même CSS″, CRR″ sont semblables à AH_aC, on a donc

$$(3) \quad \frac{BR'}{BR} = \frac{AB}{AH_a},$$

$$\frac{BS'}{BS} = \frac{AB}{AH_a}, \quad (4)$$

$$(5) \quad \frac{CS''}{CS} = \frac{AC}{AH_a}, \quad \frac{CR''}{CR} = \frac{AC}{AH}; \quad (6)$$

par suite

$$\frac{BR' \,.\, BS'}{CS'' \,.\, CR''} \times \frac{CS \,.\, CR}{BS \,.\, BR} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2,$$

et

$$\frac{BR' \,.\, BS'}{CS'' \,.\, CR''} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4. \quad (7)$$

(*) Cette proposition m'a été communiquée par mon ami, M. Th. Valiech, élève au lycée de Toulouse, qui me fait en outre observer que la question suivante proposée au concours d'agrégation en 1874, contient plusieurs théorèmes démontrés précédemment. Voici l'énoncé :

Lorsque AS devient médiane du triangle ABC, AR devient médiane antiparallèle. Les égalités (4) et (5) donnent

$$\frac{CS''}{BS'} = \frac{AC}{AB}$$

et la formule (7) devient

$$\frac{BR'}{CR''} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3,$$

c'est-à-dire que *la perpendiculaire élevée à la base* BC *du triangle* ABC *par le pied* α *de la médiane antiparallèle rencontre les perpendiculaires élevées à* AB, AC *en* B, C *en des points* R′, R″ *tels que le rapport des distances* BR′, CR″ *est égal au rapport des cubes des côtés adjacents.*

23. — Les tangentes au cercle circonscrit menées par les trois sommets du triangle ABC, forment A″B″C″. Les sommets de ce triangle ont été appelés par M. J. Neuberg (*) les *Associés du point de Lemoine;* quelques-unes des propriétés du point de Lemoine s'appliquent à ces points avec de légères modifications,

1° Considérons une médiane antiparallèle Aα et les conjugués harmoniques BA″, CA″ des deux autres; ces trois droites sont concourantes;

2° Les distances d'un point de la conjuguée harmonique d'une médiane antiparallèle aux côtés adjacents étant, au signe près, proportionnelles à ces côtés, on en déduit que

---

On donne un triangle ABC. *Sur les côtés* BC, AC, AB, *on prend des points* A′, B′, C′, *tels que l'on ait :*

$$\frac{BA'}{CA'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}, \quad \frac{CB'}{AB'} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}, \quad \frac{AC'}{BC'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}.$$

1° Démontrer que les droites AA′, BB′, CC′ *se coupent en un même point* M. *(Théorème 6.)*

2° Du point M *on abaisse* MP, MQ, MR, *perpendiculaires sur les côtés. Démontrer que*

$$\frac{MP}{BC} = \frac{MQ}{AC} = \frac{MR}{AB} \qquad \textit{(Théorème 7.)}$$

3° Démontrer que le point M *est le centre de gravité du triangle* PQR. *(Théorème 11.)*

4° Trouver l'expression de la somme $\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2$ *et de l'aire du triangle* PQR *en fonction des côtés et de l'aire du triangle donné* ABC. *(Th. 13.*

(*) M. J. Neuberg, *Mathésis*, tome I, 1881.

les distances des associés du point de Lemoine aux trois côtés du triangle sont proportionnelles à ces côtés;

3° Les associés du point de Lemoine étant sur des médianes antiparallèles, les droites qui joignent leurs projections sur les côtés adjacents sont perpendiculaires aux médianes correspondantes ;

4° Joignons les projections A''_a, A''_b, A''_c, de A'' sur les trois côtés. Les deux triangles $A''A''_cA''_a$, $A''_aA''_bA''$ sont semblables à ABC et égaux entre eux ; donc la figure $A''\ A''_a\ A''_b\ A''_c$ est un parallélogramme. On peut dire que :

Les associés du point de Lemoine sont symétriques du pied de la perpendiculaire abaissée de ces points sur le côté opposé par rapport au milieu de la droite qui joint leurs projections sur les côtés adjacents ;

5° Par une méthode analogue à celle qui a été donnée pour le calcul de la surface du triangle $K_aK_bK_c$ *(Théorème 13)*, on trouve :

$$\text{surf } A''_a\ A''_b\ A''_c = \frac{4S^3}{(a^2 - b^2 - c^2)^2},$$

$$\text{surf } B''_a\ B''_b\ B''_c = \frac{4S^3}{(b^2 - c^2 - a^2)^2},$$

$$\text{surf } C''_a\ C''_b\ C''_c = \frac{4S^3}{(c^2 - a^2 - b^2)^2};$$

6° Les distances des points A'', B'', C'', aux côtés opposés sont :

$$\frac{a}{2}\ \text{tg A},\quad \frac{b}{2}\ \text{tg B},\quad \frac{c}{2}\ \text{tg C}.$$

7° Enfin on peut encore observer que si on construit des carrés intérieurement sur les côtés du triangle $A''B''C''$, les côtés intérieurs de ces carrés se coupent sur les médianes antiparallèles.

Nous verrons dans la suite de nouvelles propriétés.

(A suivre.)

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 201.)(*)

60. Problème III. — *Construire une hyperbole, point par point, connaissant les asymptotes* Δ, Δ′ *et un point* A *de la courbe.*

On sait que, dans l'hyperbole, pour une transversale quelconque, le milieu de la corde coïncide avec le milieu du segment intercepté sur la transversale considérée par les asymptotes Δ, Δ′. D'après cela, après avoir mené par le point A une sécante qui rencontre les asymptotes aux points B et C, on détermine le milieu O de BC; enfin, on prend le point A′ symétrique de A par rapport à O. Toutes ces constructions n'exigent que l'emploi de la règle et de l'équerre ; la figure ci-contre les indique suffisamment.

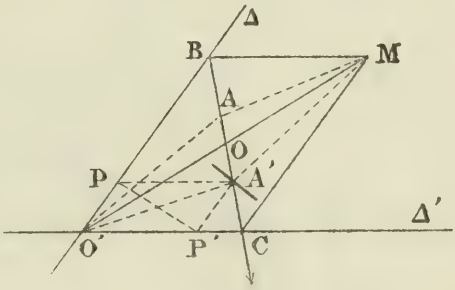


Fig. 46.

Quant à la tangente en A′, on sait qu'elle s'obtient en traçant par A′ une droite limitée aux asymptotes et partagée par le point A′ en deux parties égales. Cette tangente est donc parallèle à la droite PP′.

(*) Dans ce chapitre et dans les suivants, jusqu'à ce que j'aborde la deuxième partie de ce travail, il m'arrivera, au moins dans certains moments, de m'appuyer sur des propriétés qui ressortent du cours de mathématiques spéciales. Mais il était impossible de séparer ces chapitres de ceux qui les ont précédés et de ceux qui les suivront, pour les reporter au journal de mathématiques spéciales.

61. Problème IV. — *Construire une hyperbole, point par point, connaissant une asymptote* Δ *et trois points* A, B, C *de la courbe.*

Ce problème se ramène immédiatement au précédent en observant que la seconde asymptote Δ′ est la transversale réciproque de Δ par rapport au triangle ABC.

62. Problème V. — *Construire une hyperbole, point par point, connaissant, de position, les asymptotes* Δ, Δ′ *et une tangente* AA′.

Par les points A, A′ menons deux parallèles quelconques AB′, A′B ; les triangles semblables A′OB, AOB′ donnent la proportion

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{OB}{OA}.$$

Nous avons donc

$$OA' \,.\, OA = OB' \,.\, OB.$$

Cette égalité qui résulte aussi, si l'on veut, de l'équivalence évidente des deux triangles A′OA, B′OB, prouve que BB′ est une droite tangente à l'hyperbole considérée. Pour avoir le point de contact il suffit, par application d'une propriété connue, de déterminer le milieu ω de BB′ ; ce point s'obtient, comme l'indique la figure, au moyen du parallélogramme BOB′C.

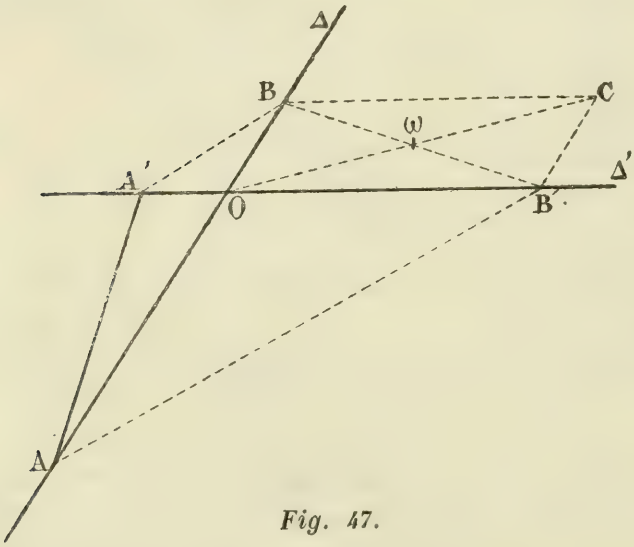


Fig. 47.

63. Problème VI. — *Construire une parabole connaissant deux tangentes* OA, OB, *et les points de contact* A *et* B.

Cherchons à déterminer la tangente parallèle à AB et son point de contact. La diagonale OC du parallélogramme OABC

est le diamètre conjugué des cordes parallèles à AB. La sous-tangente étant le double de l'abcisse, en construisant le parallélogramme DOMN, le point I représente l'extrémité du diamètre OC. Finalement, nous connaissons une tangente MN, le point de contact I, le diamètre IC et un autre point A, sur la parabole. Dans ces conditions, le problème peut être considéré comme résolu; nous avons indiqué plus haut (§ 58) comment on pouvait construire la courbe, point par point.

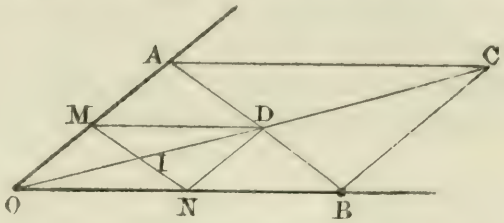


Fig. 48.

Autrement. — Mais, si l'on préfère, on peut construire la courbe tangente par tangente en appliquant la remarque suivante. Prenons sur OD, médiane du triangle AOB, deux points MM′ tels que OM = M′D, et par ces points menons des parallèles à AB; nous déterminons ainsi deux points P et Q. La construction indiquée donne

$$\frac{OP}{AP} = \frac{BQ}{OQ}.$$

Une propriété connue prouve que la droite PQ est tangente à la parabole. On obtiendra ainsi, en faisant varier les points M, M′, autant de tangentes que l'on voudra à la parabole proposée.

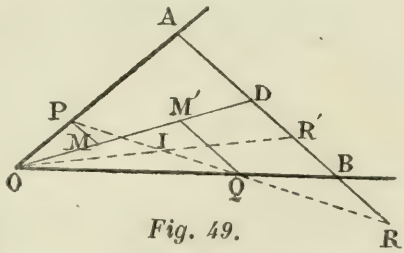


Fig. 49.

Si nous prolongeons PQ jusqu'à sa rencontre en R avec AB et si nous prenons le point R′ conjugué harmonique de R par rapport au segment AB, la droite OR′ étant la polaire de R coupe PQ en un point I qui est justement le point de contact. La parabole se trouve ainsi construite; non seulement tangente par tangente mais encore point par point.

64. Remarque. — Dans le problème qui vient de nous occuper on peut aussi déterminer immédiatement deux tangentes particulières de la parabole, droites qui, avec les deux

tangentes proposées, forment un système de quatre tangentes à la courbe que l'on veut construire. Cette remarque a son importance parce que son application ramène le problème présent au cas général visé plus loin.

Voici comment on obtient les deux tangentes dont nous voulons parler.

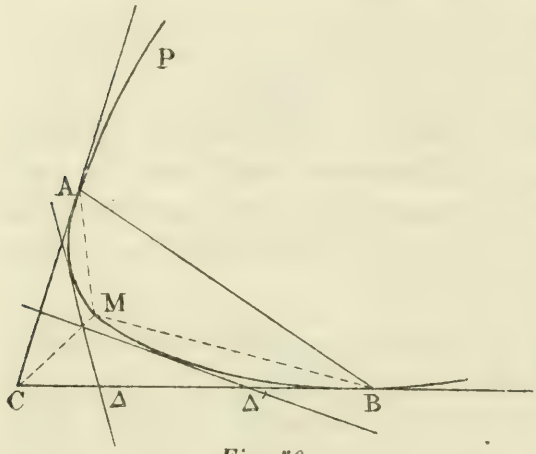


Fig. 50.

Considérons une parabole P inscrite dans l'angle ACB; si nous joignons un point quelconque de la courbe, le point M par exemple, aux sommets C, A, B, nous avons :

$\overline{MAB}^2 = 4MAC.MBC$ (*), ou, dans le système des coordonnées barycentriques,

$$\gamma^2 = 4\alpha\beta.$$

Si nous partageons CA et CB en trois parties égales, la droite A'B' a pour équation

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0;$$

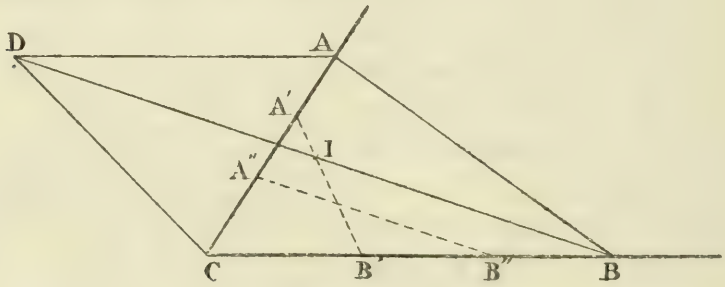


Fig. 51.

celle-ci doit être vérifiée : 1° par $\beta = 0$, et $2\gamma = \alpha$; 2° par $\alpha = 0$, et $2\beta = \gamma$; nous trouvons, d'après cela,

$$2m + p = 0, \quad \text{et} \quad n + 2p = 0.$$

Finalement, l'équation de A'B' est

$$\alpha + 4\beta - 2\gamma = 0.$$

(*) Cette relation très simple est connue, nous laissons au lecteur le soin de la vérifier.

Il est facile de vérifier que cette droite est tangente à la parabole considérée P; le contact a lieu sur la droite qui correspond à l'équation $4\gamma - \alpha = 0$; d'après cela, le point de contact I s'obtient, comme l'indique la figure, en traçant la diagonale AD du parallélogramme ABCD.

Un calcul tout semblable montrerait que A″B″ est, elle aussi, tangente à P. Ce dernier point, évident d'ailleurs, est encore vérifié en observant que la parabole jouit de la propriété intéressante que nous allons établir.

65. Théorème. — *Si l'on considère une parabole* P *inscrite dans l'angle* CAB, A *et* B *désignant les points de contact, une tangente* Δ *admet, par rapport au triangle* CAB, *une transversale réciproque* Δ'; *cette dernière droite est encore une tangente à* P.

En effet, si l'on cherche la condition que doivent vérifier les coefficients m, n, p de l'équation

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0,$$

pour que la droite Δ qui lui correspond soit tangente à P, un calcul immédiat donne

$$p^2 = mn. \qquad (1)$$

D'autre part, en se reportant à la définition des transversales réciproques (§ 9) on voit que l'équation de Δ' est

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} = 0.$$

D'après (1), la condition

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{mn}$$

étant vérifiée, Δ' est tangente à P.

La parabole P et les deux paraboles analogues sont, d'après cette observation, des *anallagmatiques* dans notre méthode de transformation par transversales réciproques, méthode à laquelle nous aurons occasion de faire, dans le chapitre suivant, d'autres emprunts. Par anallagmatiques, nous entendons, en généralisant l'expression que M. Moutard a introduite dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, des courbes qui, dans une méthode de transformation donnée, se correspondent à elles-mêmes.

Voici un autre problème où nous trouverons une application naturelle de la remarque précédente.

66. Problème VII. — *Construire une parabole* P, *connaissant trois tangentes* AB, AC, BC *et le point de contact* O, *sur l'une d'elles.*

Déterminons d'abord le point de contact O′ de P avec AC. Une propriété connue, déjà rappelée (§ 63), nous donne

$$\frac{OB}{AC} = \frac{OA}{O'A}.$$

D'après cela, si nous prenons AD = OB, la diagonale AP du parallélogramme ACDP représente la direction des diamètres de P. De cette remarque nous déduisons, comme l'indique la figure, et au moyen du parallélogramme AOQO′,

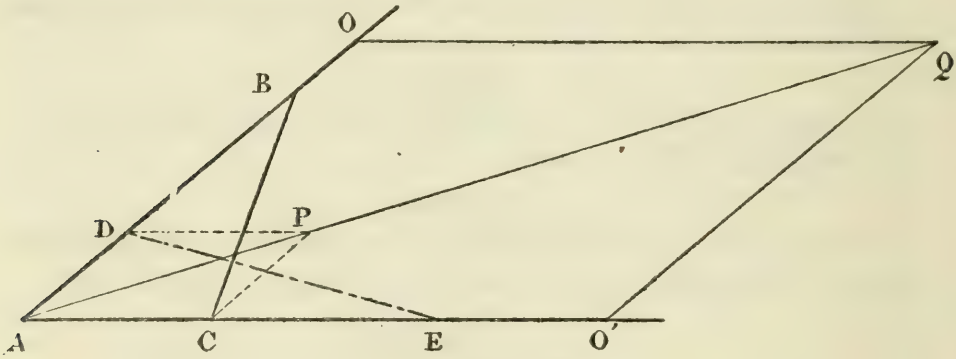


Fig. 52.

le point inconnu O′. Nous sommes ainsi ramené au cas précédent et, en prenant O′E = CA, la droite DE transversale réciproque de BC par rapport au triangle AOO′, est, comme nous venons de l'observer au paragraphe précédent, une quatrième tangente à la parabole considérée. Nous revenons ainsi au cas ordinaire, celui où l'on donne quatre tangentes distinctes.

Nous ne croyons pas utile d'étendre autrement l'examen de ces problèmes du premier degré. On peut les multiplier beaucoup, mais ils exigent tous qu'*il n'y ait qu'une seule conique vérifiant les conditions proposées.* Ces problèmes, pour cette raison, ressortent de la géométrie de la règle et de

l'équerre; ils constituent d'ailleurs des cas particuliers des problèmes généraux que nous allons étudier dans le chapitre suivant. Mais avant d'aborder ceux-ci, nous avons tenu à montrer les solutions simples que comportent certains problèmes spéciaux, qui justement se présentent le plus souvent dans les constructions. C'est qu'en effet il arrive fréquemment que certains points de la figure deviennent coïncidents sur des droites données ou, dans d'autres cas, soient rejetés à l'infini, dans des directions déterminées. Il est alors profitable, au lieu d'avoir recours aux tracés indiqués pour le cas général, d'utiliser des tracés plus simples, découlant des particularités mêmes de la figure proposée.

Nous n'avons examiné, comme on a pu le remarquer, dans les problèmes qui viennent de nous occuper, que les cas particuliers où les données sont des points ou des tangentes; mais il va sans dire qu'il existe d'autres problèmes ressortant de cette géométrie et dans lesquels les données sont différentes. Par exemple : Construire une parabole connaissant le foyer et la tangente au sommet; ou le foyer et la directrice; ou le foyer et deux tangentes; et beaucoup d'autres, sont des problèmes que l'on peut résoudre avec la règle et l'équerre.

Mais voici un dernier exemple que nous voulons traiter en terminant ce chapitre; il vise le cas très intéressant où l'on connaît uniquement les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

67. Problème. — *Construire une ellipse* Γ *connaissant, en grandeur et en situation, deux diamètres conjugués.*

Soient AA′ et BB′ les deux diamètres proposés. Prenons sur la courbe un point I; les droites qui joignent ce point aux extrémités des deux diamètres donnés forment un faisceau harmonique. On prouve, d'un mot, cette propriété en observant que dans un cercle le théorème est vérifié pour deux diamètres rectangulaires, les quatre branches du faisceau considéré étant alors inclinées mutuellement, et deux à deux, de 45°.

D'après cela, menons par le point A une droite arbi-

traire AP, puis déterminons avec la règle, comme l'indique la figure (1), le point Q conjugué harmonique de P; alors, la droite A'Q rencontre AP en un point I qui appartient à l'ellipse Γ.

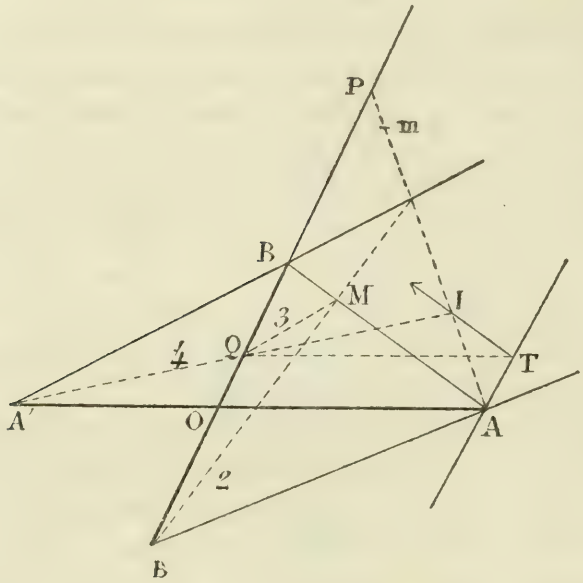


Fig. 53.

Pour obtenir la tangente en I, on peut observer que la polaire de P par rapport à Γ passe par le point Q, par le pôle de AI, et qu'elle est parallèle à AA'. Par conséquent en menant QT parallèlement à AA' jusqu'à sa rencontre avec la droite AT, cette dernière étant conduite, par A, parallèlement à BB', on détermine un point T de la tangente cherchée. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

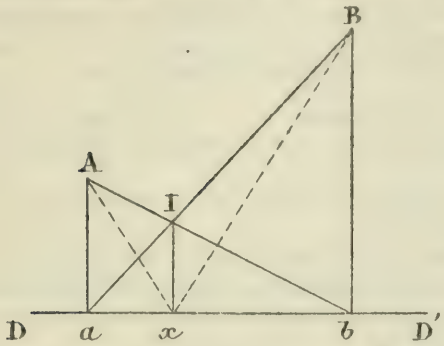
Extrait d'une lettre de M. E. Lemoine... Puisque vous vous occupez de la géométrie de l'équerre, je vous envoie une solution graphiquement très simple, et que je ne crois pas que l'on ait remarquée, pour le problème si connu dont voici l'énoncé.

Soient deux points A *et* B *et une droite* DD'.

Trouver sur la droite un point x *tel que l'angle* AxD = BxD'.

(1) Les chiffres 1, 2, 3, 4 placés sur cette figure indiquent l'ordre dans lequel la règle trace les droites auprès desquelles ils sont placés.

Je projette A et B en a et b sur DD′, je joins Ab et Ba qui se coupent en I; I se projette sur DD′ en x. Il n'y a pas à donner la démonstration, qui est de la plus extrême simplicité.



La construction s'applique que A et B soient ou non du même côté de DD′, et on la modifie très facilement pour le cas où DD′, A et B ne sont pas dans le même plan.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

FACULTÉ DE BORDEAUX

6 juillet 1885.

Mathématiques. — I. Deux mobiles partent au même instant des points A et B situés sur deux droites perpendiculaires AX et BY qui se coupent en O. Ils se dirigent tous les deux vers O (qu'ils peuvent dépasser) d'un mouvement uniforme dont la vitesse est m pour le premier, n pour le deuxième; $OA = a$, $OB = b$. On demande :

1° L'expression de la distance des deux mobiles au temps t;

2° Le temps auquel la distance est minimum;

3° Conditions pour que les mobiles se rencontrent en O;

4° Discussion du problème quand le mouvement du mobile est de sens quelconque.

II. Deux circonférences de rayons R et r sont tangentes en C. On mène AB tangente commune extérieure. On joint AC, BC. Calculer les trois côtés du triangle ABC, en fonction de R et r.

EXAMENS D'ADMISSION A L'ÉCOLE FORESTIÈRE

CONCOURS DE 1885 (*)

1° Effectuer la division $\frac{1}{(1-x)^3}$, trouver la loi du quotient et chercher, par les règles de la division, à quelle condition le quotient prolongé indéfiniment représente la fraction proposée.

2° Un particulier achète pour 70,000 francs d'obligations de chemin de fer rapportant 16 francs d'intérêts; l'année suivante, il en achète d'autres au même cours pour 19,600 francs. Au bout de 2 ans, il cède toutes ses obligations au

(*) Voyez l'énoncé de la première question (*Journal*, p. 184).

prix courant, joint à leur prix les intérêts simples qu'il en a retirés plus la somme de 1,280 francs, et achète avec le tout des obligations rapportant 15 francs de rente au cours de 250 francs. — Il se fait ainsi 6,000 francs de rente. On demande le nombre et le prix des premières obligations.

Trigonométrie et calcul logarithmique. — I. Résoudre un triangle connaissant le côté a, l'angle opposé A et la hauteur correspondante h.

Discuter le problème ; trouver la condition de possibilité et la vérifier en construisant le triangle géométriquement.

II. Étant donnés dans un triangle les côtés $a = 28.907^m,15$; $b = 23.125^m,72$; $c = 17.344^m,29$, calculer les angles A, B, C, la surface S, le rayon R du cercle circonscrit, le rayon r du cercle inscrit et les rayons r_1, r_2, r_3 des cercles ex-inscrits.

ÉCOLE NORMALE SECONDAIRE DE SÈVRES

JEUNES FILLES (1885)

Arithmétique et géométrie. — I. Trouver le premier terme et la raison d'une progression arithmétique sachant que la somme des n premiers termes est pour toutes les valeurs de n, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc., égale à $n(3n + 1)$.

II. Étant données deux droites qui se coupent AB et AC, trouver le lieu des points M tels que leurs distances Mp et Mn aux deux droites soient entre elles comme deux nombres donnés m et n.

III. Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et le rapport des deux côtés de l'angle droit.

ENSEIGNEMENT SPÉCIAL

(AOUT 1885)

ABCD étant une feuille de carton carrée, on trace sur elle un deuxième carré intérieur au premier EFGH, ayant même centre que lui, et dont les côtés sont dirigés suivant ses diagonales ; on découpe ensuite la feuille suivant AE et EB de manière à enlever le triangle AEB, puis on enlève pareillement BFC, CGD, DHA. Enfin on replie le triangle EBF au-dessus de la feuille en le faisant tourner autour de EF jusqu'à ce que le point B vienne se projeter en O ; on fait de même pour les triangles GDH, HAE, FCG, de manière à former ainsi une pyramide ayant pour base EFGH et pour sommet le point où sont venus se réunir les quatre sommets A, B, C, D. Cela posé on donne le côté a du carré ABCD et l'on demande de déterminer, puis de construire le côté EF de telle sorte que le volume de la pyramide ainsi formée soit le $\frac{1}{6}$ du cube qui aurait pour base le même carré EFGH.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

SESSIONS D'AVRIL ET DE JUILLET-AOUT 1885

LYON

20 juillet 1885.

Résoudre un triangle quelconque connaissant: 1° la base b, 2° la hauteur h et 3° la différence A — B des angles à la base.

22 juillet 1885.

Résoudre un triangle connaissant les angles et la somme $a^2 + b^2 + c^2$ des carrés des trois côtés.

RENNES

15 avril 1885.

Etablir avec toute leur généralité les relations distinctes qui existent entre les six lignes trigonométriques d'un même arc. — La sécante étant donnée, combien les autres peuvent-elles avoir de valeurs?

2° Déterminer q de façon que la fraction $\frac{3x^2 - 2}{x^2 + 2x + q}$ soit maximum ou minimum pour les valeurs 2 et 1/3 de x. Quelle est celle de ces valeurs qui correspond au maximum et celle qui correspond au minimum?

16 avril 1885.

1° Démontrer que si deux trièdres ont les mêmes faces le second est superposable au premier ou à son symétrique. — Proposition analogue en substituant les dièdres aux faces.

2° x et y étant deux nombres quelconques, on calcule deux autres nombres x' et y' par les formules :

$$x' = ax + by + c, \qquad y' = a'x + b'y + c'.$$

On emploie ces derniers pour en former deux nouveaux x'' y'' à l'aide des mêmes formules, et l'on demande de déterminer a' b' c' de manière que quels que soient les nombres x et y, le résultat de l'opération soit de les reproduire ou, qu'en d'autres termes, on ait toujours $x'' = x$, $y'' = y$. On vérifiera les valeurs obtenues.

17 avril 1885.

1° Démontrer que le terme de rang n d'une progression géométrique dont la raison est plus grande que l'unité croît au delà de toute limite quand n tend vers l'infini, et qu'il tend vers zéro quand la raison est moindre que 1. Quelle est la limite de $\sqrt[n]{a}$ lorsque n tend vers l'infini, a étant un nombre quelconque positif donné.

2° Etant données les deux équations simultanées :

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1, \qquad \sin x + \cos x = m ;$$

trouver : 1° les valeurs de m telles que ces deux équations soient vérifiées par la même valeur de x; 2° les valeurs de x correspondantes.

NANCY

13 avril 1885.

1° Démontrer les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme et de la différence de deux arcs en fonction des sinus et cosinus de ces arcs.

2° Un trapèze isocèle est circonscrit à un cercle de rayon inconnu; calculer ses côtés, sachant que la somme des deux bases $= 2a$ et que sa surface $= b^2$.

15 avril 1885.

1° Indiquer la marche à suivre pour résoudre les inégalités

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ et } \quad ax^2 + bx + c > 0.$$

Application : Pour quelles valeurs de x le trinôme $x^2 - 8x + 20$ est-il compris entre 5 et 8 ?

2° Une pyramide hexagonale régulière a pour surface totale m^2, sa hauteur $= h$. — Calculer le côté de l'hexagone de la base et le volume de la pyramide.

17 avril 1885.

1° Étant donnés la surface et les angles d'un triangle, déterminer ses trois côtés.

2° Donner la définition des polyèdres semblables. Énoncer les théorèmes qui les concernent.

POITIERS

13 avril 1885.

1° Calculer la surface de la sphère inscrite dans un cône dont la hauteur $= h$ et l'apothème a.

2° Prouver que la sous-normale à la parabole est constante.

15 avril 1885.

1° Retour d'un quotient décimal périodique mixte à la fraction génératrice. Montrer que la fraction génératrice réduite à sa plus simple expression doit contenir au dénominateur autant de facteurs 2 ou 5 qu'il y a de chiffres irréguliers au quotient.

Exemple : 0,347535353.

2° A quelle distance du centre d'une sphère faut-il mener un plan sécant AB pour que la surface latérale du cône SAB inscrit soit la $\frac{1}{n^e}$ partie de la zone sphérique de même hauteur. Limite de n.

17 avril 1885.

1° Volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre qui ne le coupe pas. — 2° Etudier les variations de l'expression $\frac{x-1}{x^2+2}$.

20 avril 1885.

1° Quelle est la somme produite au bout de n années par le placement à intérêts composés de a francs placés au commencement de chaque année? Taux r par franc. Exemple : $a = 2{,}000$ francs, $n = 18$, $r = 0{,}05$. — 2° Calculer par la géométrie élémentaire et la trigonométrie le côté du dodécagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R. Application $R = 0^m25$.

ACADÉMIE DE LYON

13 avril 1885.

Dans un triangle rectangle : l'hypoténuse, les deux côtés de l'angle droit et la hauteur opposée à l'hypoténuse sont quatre lignes qui sont en progression géométrique. On demande, d'après cela, de calculer la raison de cette progression et les angles de ce triangle.

15 avril 1885.

On donne le volume V d'un cône de révolution, ainsi que l'angle α de deux génératrices opposées. On demande de calculer la surface totale de ce cône.

Données numériques : $V = 450$ dc., $\alpha = 37^\circ 25' 50''$.

17 avril 1885.

Trouver le maximum de l'expression : $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$. On appliquera les formules au cas où $a = 5{,}33$ et $b = 2{,}17$, et on calculera avec deux chiffres décimaux exacts la valeur de x qui rend l'expression précédente maxima, et la valeur de cette expression lorsqu'elle est maxima.

Quelle relation doit exister entre a et b pour que la valeur de l'expression précédente soit égale à 1 ?

ACADÉMIE DE MARSEILLE

13 avril 1885.

1° Des sommets B et C d'un triangle ABC on mène des perpendiculaires BB', CC' sur les côtés opposés; ces perpendiculaires se coupent en un point H. Suivant HB et HC on applique des forces qui sollicitent le point H et qui sont égales respectivement au sinus de l'angle B et au sinus de l'angle C. On demande de démontrer que leur résultante est égale au sinus de A. — Trouver sa direction.

2° Un nombre N est divisible séparément par 3 nombres A, B, C qui sont premiers entre eux deux à deux. Démontrer que N est divisible par le produit ABC de A, B, C.

15 avril 1885.

Étant donnés deux sphères o et o' tangentes extérieurement et le cône qui leur est circonscrit, on demande :

1° D'évaluer la surface latérale du tronc de cône ABA'B' qui a pour base le cercle de contact; 2° d'indiquer dans quel cas cette surface est maxima lorsque, les rayons R et R' des sphères données étant variables, leur somme R + R' = constante.

— Trouver le centre de gravité d'un trapèze.

17 avril 1885.

Calculer $\sin \frac{x}{2}$ sachant que $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$. Expliquer pourquoi l'on trouve quatre valeurs pour $\sin \frac{x}{2}$ et pourquoi la somme des carrés de ces quatre valeurs égale 2.

— On donne un plan par ses traces et l'on demande de construire l'angle que fait la trace verticale avec la ligne de plus grande pente du plan.

ACADÉMIE DE MONTPELLIER

13 avril 1885.

Déterminer cinq nombres en progression géométrique connaissant leur somme et leur produit.

15 avril 1885.

Déterminer algébriquement les tangentes de deux arcs, connaissant la somme de ces tangentes et la somme des tangentes des moitiés des mêmes arcs.

17 avril 1885.

Construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné; — discussion.

QUESTIONS PROPOSÉES

196bis*. — Soit ABC un triangle rectangle et soit D le point de contact du cercle inscrit avec l'hypoténuse BC; démontrer que :

$$2\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AC}\right) = \frac{1}{BD} - \frac{1}{CD}.$$

(Laurens.)

197. — Les droites, qui joignent les sommets d'un triangle ABC aux points symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux points milieux des côtés, se coupent en un même point qui est le point de concours des médianes antiparallèles du triangle A'B'C' obtenu en menant, par les sommets du triangle donné, les parallèles aux côtés. *(G. Boubals.)*

NOTA. — En d'autres termes, le *point réciproque* de l'orthocentre de ABC est le *point inverse* du centre de gravité, c'est-à-dire le point de Lemoine de A'B'C'. (G. L.)

---

* La question 196, déjà proposée (*Journal*, 1877, p. 224; résolu, p. 351), est réitérée.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22670-5.

EXERCICES DIVERS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 217.)

LII

Si l'on désigne par m *la somme des trois quatrièmes proportionnelles* $\frac{yz}{x}, \frac{xz}{y}, \frac{xy}{z}$ *que l'on peut former avec les trois longueurs* x, y, z, *la relation*

$$4R^3 - 4R^2m + Rm^2 - 2xyz = 0,$$

sera vérifiée dans un triangle,

1° Si x, y, z *représentent les distances du point de concours des hauteurs aux trois côtés et* R *le* rayon *du cercle circonscrit.*

2° Si x, y, z *représentent les distances du centre du cercle inscrit aux sommets et* R *le* diamètre *du cercle circonscrit; la relation précédente se décompose en facteurs, si* $y = z$.

3° Construire dans le cas où $y = z$ *le triangle isocèle* ABC, *connaissant* x *et* y.

Occupons-nous de la première partie.

Soit ABC le triangle considéré, ω le point de concours des hauteurs, A′, B′, C′ les pieds des hauteurs

on a
$$\omega A' = x = 2R \cos B \cos C,$$
$$\omega B' = y = 2R \cos A \cos C,$$
$$\omega C' = z = 2R \cos A \cos B;$$

d'où
$$m = 2R(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C),$$

et
$$xyz = 8R^3 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C.$$

Mais, dans tout triangle, on a

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1;$$

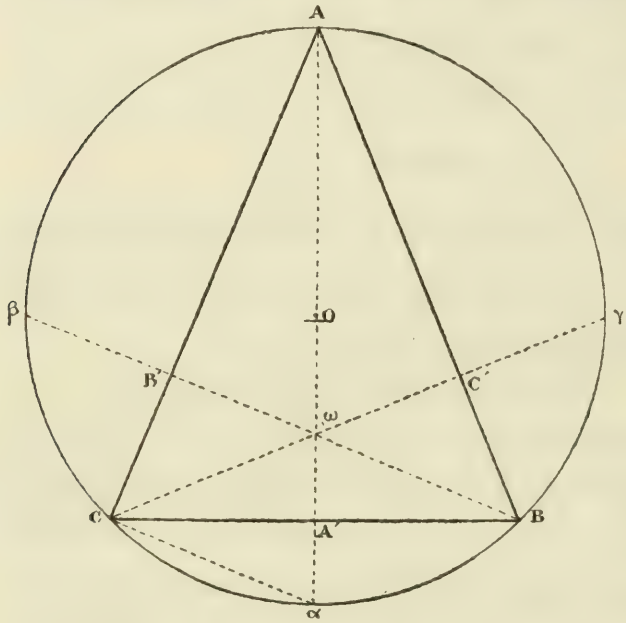
éliminant la somme des carrés des cosinus et le produit de ces cosinus il vient, après calcul,

$$4R^3 - 4mR^2 + m^2R - 2xyz = 0 \qquad (1)$$

ce qui était à établir.

Si l'on observe que dans le triangle A'B'C', ω est le centre du cercle inscrit et que le *diamètre* du cercle circonscrit est R, la première partie du n° 2 se trouve démontrée.

Appelons λ, μ, ν les trois quatrièmes proportionnelles



$$\frac{yz}{x}, \frac{xz}{y}, \frac{xy}{z}$$

on aura :

$$m = \lambda + \mu + \nu,$$
$$xyz = \lambda\mu\nu.$$

Si l'on a

$$y = z,$$

il vient

$$\mu = \nu,$$
$$m = \lambda + 2\mu$$
$$= \frac{y^2}{x} + 2x,$$
$$xyz = \lambda\mu^2.$$

La relation considérée devient alors

$$4R^3 - 4(\lambda + 2\mu)R^2 + (\lambda + 2\mu)^2 R - 2\lambda\mu^2 = 0,$$

ou

$$R\left(R - \frac{\lambda + 2\mu}{2}\right)^2 + \frac{\lambda\mu^2}{2} = 0.$$

Sous cette forme on voit facilement que le premier membre devient identiquement nul pour $R = \frac{\lambda}{2}$.

On peut alors mettre le facteur $R - \frac{\lambda}{2}$ en évidence et il vient

$$\left(R - \frac{\lambda}{2}\right)\left(R^2 - \frac{\lambda + 4\mu}{2} R + \mu^2\right) = 0,$$

ou

$$\left(2R - \frac{y^2}{x}\right)\left[2R^2 - \left(\frac{y^2}{x} + 4x\right) R + 2x^2\right] = 0. \quad (2)$$

L'équation (1) donne le rayon du cercle circonscrit connaissant x, y, z, dans le cas général ; mais elle ne permet pas de le construire avec la règle et le compas puisque R est déterminé par une équation du troisième degré.

La décomposition en facteurs effectuée dans l'équation (2) lorsque $y = z$, permet, dans ce cas, de construire R ; on a les trois valeurs

$$R' = \frac{y^2}{x},$$

$$R'' = \frac{y^2 + 4x^2 + y\sqrt{y^2 + 8x^2}}{4x},$$

$$R''' = \frac{y^2 + 4x^2 - y\sqrt{y^2 + 8x^2}}{4x}.$$

Si l'on se propose le problème de la troisième partie de l'énoncé, une discussion assez facile montre que : de ces trois valeurs pour R, R′ ne convient pas, R″ convient toujours et R‴ ne convient que si $x > y$.

Nous allons donner une solution directe de cette troisième partie.

Soient α, β, γ les points où les hauteurs AA′, BB′, CC′ coupent le cercle circonscrit au triangle ABC.

On a

$$x = \omega A' = A'\alpha$$

$$y = \omega B' = B'\beta = \omega C' = C'\gamma$$

$$\omega C \,.\, \omega\gamma = \omega\alpha \,.\, \omega A$$

$$\omega C \,.\, 2y = 2x\,(2R - x). \qquad (3)$$

Mais le triangle rectangle αCA donne

$C\alpha^2 = \alpha A' \,.\, \alpha A$ ou, puisque $C\alpha = C\omega$ $C\omega^2 = x \,.\, 2R$, d'où

$$2R = \frac{C\omega^2}{x}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), on a .

$$\omega C \,.\, 2y = 2x\left(\frac{C\omega^2}{x} - 2x\right),$$

d'où

$$C\omega\,(C\omega - y) = 2x^2.$$

Ce qui permet de construire $C\omega$, puis CA′, etc.

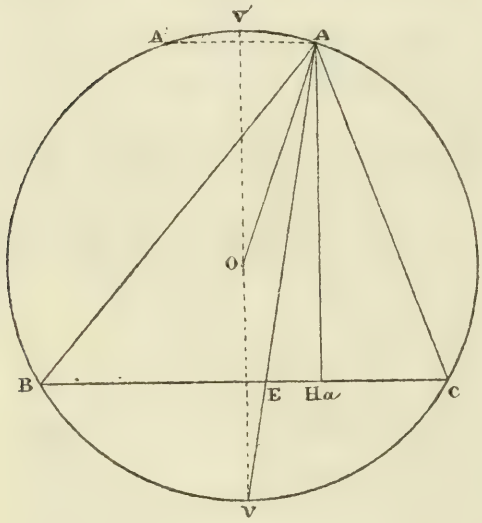
Les problèmes que nous venons de résoudre dans le n° LII sont les questions que nous avons posées aux lecteurs de ce journal sous les numéros 131 et 132.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié,** élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux.)

(*Suite*, voir p. 224.)

24. — Parmi les couples de points inverses, en nombre infini d'ailleurs, quelques-uns semblent particulièrement importants; ce sont :



1° Le centre de gravité et le point de Lemoine (*);

2° Les deux points de Brocard (**);

3° Les centres des cerles tangentes aux trois côtés du triangle sont à eux-mêmes leur propre inverse;

4° Le centre du cercle circonscrit et le point de concours des hauteurs, ou orthocentre (***).

(*) M. le colonel Mathieu (*loc. cit.*, p. 403) définit le point qu'on a nommé, depuis, point de Lemoine, comme étant le point de concours des droites qui joignent les sommets au point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit, menées par les deux autres sommets. — M. R. Tucker (*The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, vol. XX, n° 789) donne au point de Lemoine le nom de *Point symmédian.*

(**) Voir : M. Brocard (*Association française pour l'avancement des sciences congrès d'Alger.*) — M. A. Morel (*Journal de Mathématiques Élémentaires 1883.*) Les points de Brocard sont deux points ω, ω' pris à l'intérieur du triangle ABC et tels que

$$\omega AC = \omega CB = \omega BA = \omega' AB = \omega' CA = \omega' BC = \alpha,$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

Les points de Brocard étant ainsi définis, Mlle C. A. Scott a proposé (*Educational Times*, *Juillet 1883*) d'appeler ω' le *premier point de Brocard*, ω le *second point de Brocard* et α l'*angle de Brocard.*

(***) Dénomination due à James Booth (*A new treatise of some geometrical methods*, 1877).

Soit O le centre du cercle circonscrit, AH_a la hauteur. Prolongeons la bissectrice AE jusqu'à sa rencontre en V avec le cercle circonscrit et du point O abaissons la perpendiculaire à BC, elle passera par le point V. Le triangle AOV est donc isoscèle et l'on a

$$\widehat{OAV} = \widehat{OVA}$$

Les deux droites OV, AH*a* étant parallèles

$$\widehat{OAV} = VAH_a.$$

Ainsi OA, AH*a* sont deux droites inverses ; le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H sont donc deux points inverses.

25. — On peut trouver la position relative de deux points inverses. En effet, on voit immédiatement qu'ils sont toujours dans une des positions suivantes :

1° Tous deux à l'intérieur du triangle ;

2° L'un dans l'angle opposé par le sommet à l'un des angles du triangle, l'autre dans le segment du cercle circonscrit qui a pour corde le côté opposé ;

3° Tous deux extérieurs au cercle circonscrit et situés dans le même angle du triangle ;

4° Un point étant placé sur un côté du triangle, il a pour inverse le sommet opposé et réciproquement : Un sommet quelconque du triangle a pour inverse un point quelconque du côté opposé ;

5° Si un point est sur la circonférence circonscrite, son inverse est à l'infini ; réciproquement : trois droites parallèles, menées par les trois sommets d'un triangle, ont pour inverses trois droites qui se coupent sur la circonférence circonscrite au triangle.

En d'autres termes, dans la transformation par points inverses, imaginée par M. Mathieu, à la droite de l'infini correspond le cercle circonscrit au triangle fondamental de la transformation.

De la position de deux points inverses il résulte que :

La droite qui joint deux points et celle qui joint les deux

inverses sont vues d'un sommet du triangle sous des angles égaux ou supplémentaires (*).

26. — On peut calculer les distances de deux points inverses ω, ω' aux trois côtés du triangle par la méthode générale suivante (**).

Soient δ_a, δ_b, δ_c les distances du point ω aux trois côtés, f une fonction symétrique et K une constante, on aura

$$\frac{\delta_a}{f_a} = \frac{\delta_b}{f_b} = \frac{\delta_c}{f_c} = \mathrm{K}$$

$$2\mathrm{S} = a\delta_a + b\delta_b + c\delta_c = \mathrm{K}\,(af_a + bf_b + cf_c)$$

relations qui déterminent K, δ_a, δ_b, δ_c.

Les distances de deux points inverses aux côtés étant inversement proportionnelles entre elles, on aura pour le point ω' :

$$\delta_a' f_a = \delta_b' f_b = \delta_c' f_c = \mathrm{K}',$$

$$2\mathrm{S} = a\delta_a' + b\delta_b' + c\delta_c' = \mathrm{K}'\left(\frac{a}{f_a} + \frac{b}{f_b} + \frac{c}{f_c}\right),$$

relations qui déterminent K', δ_a', δ_b', δ_c'.

Appliquons cette méthode à la recherche des distances du point de Lemoine aux trois côtés. Soit un triangle ABC, Aα, Bβ, Cγ les trois médianes antiparallèles, K le point de Lemoine. Le triangle ABα coupé par la transversale Cγ donne

$$\frac{\mathrm{B}\gamma \times \alpha\mathrm{C} \times \mathrm{AK}}{\mathrm{A}\gamma \times \mathrm{BC} \times \alpha\mathrm{K}} = 1.$$

D'où

$$\frac{\mathrm{AK}}{\alpha\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{A}\gamma\,.\,\mathrm{BC}}{\mathrm{B}\gamma\,.\,\alpha\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{A}\gamma}{\mathrm{B}\gamma}\left(\frac{\mathrm{B}\alpha}{\mathrm{C}\alpha} + 1\right) = \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{c^2}{b^2} + 1\right) = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Donc :

$$\frac{\delta_a}{\mathrm{AH}_a} = \frac{\alpha\mathrm{K}}{\mathrm{AK} + \alpha\mathrm{K}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{a^2}{m^2}.$$

Par suite :

$$\delta_a = \frac{2a\mathrm{S}}{m^2}, \quad \delta_b = \frac{2b\mathrm{S}}{m^2}, \quad \delta_c = \frac{2c\mathrm{S}}{m^2};$$

S désignant la surface du triangle ABC.

(*) M. le colonel Mathieu, *loc. cit.*, p. 403.

(**) M. H. Brocard. Association française, Congrès de Rouen 1883.

Dans ce cas particulier, la constante K est égale à la surface du triangle et les fonctions symétriques sont :

$$f_a = \frac{a}{m^2}, \quad f_b = \frac{b}{m^2}, \quad f_c = \frac{c}{m^2};$$

on déduirait de là les distances du centre de gravité aux côtés.

M. Brocard qui a fait ces calculs est arrivé aux résultats suivants que je donne en employant les notations abréviatives proposées par ce savant géomètre (*) :

1° *Centre de gravité.* — Ses distances sont inversement proportionnelles aux côtés :

$$\delta_a = \frac{2S}{3a}, \quad \delta_b = \frac{2S}{3b}, \quad \delta_c = \frac{2S}{3c}.$$

Point de Lemoine. — Ses distances sont proportionnelles aux côtés :

$$\delta_a = \frac{2aS}{m^2}, \quad \delta_b = \frac{2bS}{m^2}, \quad \delta_c = \frac{2cS}{m^2};$$

2° *Points de Brocard.* — Leurs distances sont proportionnelles aux rapports des côtés :

Point ω $\quad \delta_a = \frac{2Sabc}{n^4} \cdot \frac{b}{c}, \quad \delta_b = \frac{2Sabc}{n^4} \frac{c}{a}, \quad \delta_c = \frac{2Sabc}{n^4} \cdot \frac{a}{b},$

Point ω' $\quad \delta_a = \frac{2Sabc}{n^4} \cdot \frac{c}{b}, \quad \delta_b = \frac{2Sabc}{n^4} \cdot \frac{a}{c}, \quad \delta_c = \frac{2Sabc}{n^4} \cdot \frac{b}{a}.$

3° *Centre du cercle circonscrit.* — Distances proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

$$\delta_a = \frac{2S}{2n^4 - p^4} a\,(b^2 + c^2 - a^2), \text{ et ainsi de suite;}$$

ou, plus simplement,

$$\delta_a = \frac{a\,(m^2 - 2a^2)}{8S}, \quad \delta_b = \frac{b\,(m^2 - 2b^2)}{8S}, \quad \delta_c = \frac{c\,(m^2 - 2c^2)}{8S}.$$

(*) Ces notations sont les suivantes :

$$a + b + c = 2P \qquad a^2 + b^2 + c^2 = m^2$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = n^4 \qquad a^4 + b^4 + c^4 = p^4$$
$$p^4 + 2n^4 = m^4$$
$$S = \sqrt{P\,(P - a)\,(P - b)\,(P - c)}.$$

Orthocentre. — Distances inversement proportionnelles aux cosinus des angles opposés.

$\delta_a = \frac{2S}{2n^4 - p^4} \times \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{a}$ et ainsi de suite ou plus simplement :

$$\delta_a = \frac{(m^2 - 2b^2)(m^2 - 2c^2)}{8aS}, \quad \delta_b = \frac{(m^2 - 2a^2)(m^2 - 2c^2)}{8bS}.$$

$$\delta_c = \frac{(m^2 - 2a^2)(m^2 - 2b^2)}{8cS}.$$

Le mémoire d'où sont extraites ces formules (*) contient encore les distances aux trois côtés de points inverses particuliers que l'on rencontre dans l'étude des points et du cercle de Brocard.

(A suivre.)

MAXIMA ET MINIMA

DU RAPPORT DE DEUX TRINOMES DU SECOND DEGRÉ

Nous avons reçu de M. Vincent, professeur à Vesoul, une lettre dans laquelle se trouve une méthode élégante et *élémentaire* pour voir *à priori* les résultats auxquels conduit la méthode habituellement employée. Nous croyons utile de la faire connaître à nos lecteurs.

Soit

$$\lambda = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \qquad (1)$$

la fraction donnée ; désignons par

α, β les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

α', β' les racines de l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$.

Admettons que les deux équations n'aient pas de racine

(*) M. H. Brocard. — *Loc. cit.*, Rouen 1883.

commune; c'est-à-dire que l'on n'ait pas entre les coefficients la relation

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0$$

ou, ce qui est la même chose :

$$(bb' - 2ac' - 2ca')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = 0.$$

Cela posé, remarquons que si l'on effectue le produit :

$$(a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c)$$

en remplaçant $\alpha'\beta'$ par $\frac{c'}{a'}$, et $\alpha' + \beta'$ par $-\frac{b'}{a'}$, on trouve

$$(a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c) \qquad (2)$$
$$= \frac{(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb')}{a'^2}$$

Cette remarque de M. Vincent est la clef de sa discussion et l'on va voir qu'elle jette une vive lumière sur la méthode classique employée pour la recherche du maximum et du minimum du rapport de deux trinômes du second degré.

Résolvons l'équation (1) par rapport à x, il viendra la formule

$$x = \frac{-(b'\lambda - b) \pm \sqrt{P\lambda^2 - 2Q\lambda + R}}{2(a'\lambda - a)} \qquad (3)$$

dans laquelle

$$\left\{ \begin{array}{ll} P = b'^2 - 4a'c' & R = b^2 - 4ac \\ & Q = bb' - 2ac' - 2ca'. \end{array} \right. \qquad (4)$$

Nous distinguerons maintenant deux cas :

Premier Cas : $Q^2 - PR > 0$

Dans ce cas les racines du trinôme $P\lambda^2 - 2Q\lambda + R = 0$ sont réelles et inégales ; nommons-les λ', λ'', et rangeons-les par ordre de grandeur décroissante. On pourra mettre la valeur de x sous la forme

$$x = \frac{-(b'\lambda - b) \pm \sqrt{P(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')}}{2(a'\lambda - a)}.$$

On voit que x sera réel, suivant le signe de P, soit lorsque λ sera en dehors de l'intervalle des racines λ', λ'', soit lorsque λ sera dans cet intervalle même. λ aura, dans les deux cas, un maximum et un minimum, correspondant à une valeur de x facile à trouver.

Il est facile de voir les conditions que les trinômes doivent remplir, pour que l'on se trouve dans ce cas. — D'après la remarque de M. Vincent, on a

$$\frac{Q^2 - PR}{4a'^2} = (a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c).$$

Dire que $Q^2 - PR > 0$, c'est donc dire que

$$(a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c) > 0.$$

Or : 1° Si α', β' sont imaginaires, cette condition est remplie, quels que soient α et β ; car les deux parenthèses sont conjuguées et leur produit est une somme de carrés.

2° Si α' et β' sont réels et inégaux, le produit des deux parenthèses ne peut être positif que si les parenthèses sont de même signe. — Si elles sont de même signe, c'est ou bien parce que les racines α, β sont imaginaires, ou bien parce qu'étant réelles elles sont toutes deux dans l'intervalle des racines α', β' ou toutes deux en dehors de cet intervalle.

3° Si α', β' sont réels et égaux, la condition est aussi satisfaite. Dans ce cas, l'une des racines λ devient infinie, puisque $P = 0$. Donc le maximum sera $+\infty$, ou le minimum $-\infty$. Le cas où il n'y a qu'un maximum ou un minimum rentre donc dans le cas où il y a à la fois un maximum et un minimum.

SECOND CAS : $Q^2 - PR < 0$.

Dans cette hypothèse :

$$(a\alpha'^2 + b\alpha' + c)(a\beta'^2 + b\beta' + c)$$

est négatif, donc les deux nombres :

$$a\alpha'^2 + b\alpha' + c.$$
$$a\beta'^2 + b\beta' + c.$$

sont de signes contraires. Donc α' et β' sont nécessairement réels et il en est de même de α, β puisque le trinôme $ax^2 + bx + c$ peut changer de signe. De plus α' et β' donnant à ce trinôme des signes contraires, comprennent nécessairement un des nombres α, β et un seul.

Donc :

Le seul cas où le rapport de deux trinômes du second degré n'a ni maximum, ni minimum est celui où les racines des deux

termes sont réelles et inégales et où l'intervalle (α, β) *empiète sur l'intervalle* (α', β').

Dans tous les autres cas, il y a maximum et minimum.

J. B.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 227.)

CHAPITRE VII

TRACÉ DES CONIQUES (CAS GÉNÉRAUX)

Nous abordons maintenant, dans la géométrie des coniques, quelques problèmes plus généraux ; leur exposition complète le sujet que nous avons abordé dans les deux chapitres qui précèdent et nous nous proposons d'indiquer comment on peut effectuer le tracé des coniques, par points ou par tangentes, lorsque ces courbes sont bien déterminées ; les données de la question caractérisant un problème du premier degré. Cette partie de la géométrie est bien connue et pour ainsi dire classique. On sait notamment avec quelle simplicité les théorèmes de Pascal et de Brianchon s'appliquent aux constructions des coniques déterminées par cinq points ou par cinq tangentes. Mais, sans revenir sur ces solutions, nous voulons montrer ici comment ces mêmes problèmes peuvent être traités, en prenant pour base les propriétés des points et des transversales réciproques.

Nous devons entrer d'abord dans quelques développements analytiques, nécessaires à la démonstration des principes que nous appliquerons dans la suite.

68. Théorème. — *Lorsqu'un point* O *est mobile sur une droite* Δ, *le point réciproque* O′ *est mobile sur une conique* Γ *circonscrite au triangle.*

En effet, l'équation de Δ, dans le système de coordonnées que nous avons adopté, est

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0. \qquad (1)$$

Soient (α, β, γ) les coordonnées de O, $(\alpha', \beta', \gamma')$ celles de O′; nous avons (§ 11)

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'.$$

Par conséquent, nous obtiendrons le lieu décrit par un point O′, réciproque d'un point mobile O, en changeant α, β, γ respectivement $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ en dans l'équation du lieu décrit par O. D'après cette remarque, à la droite Δ correspond une courbe dont l'équation est

$$\frac{m}{\alpha} + \frac{n}{\beta} + \frac{p}{\gamma} = 0. \qquad (2)$$

C'est une conique Γ circonscrite au triangle de référence.

69. Remarque. — La tangente au point C à Γ rencontre AB en un certain point C′; les points A′, B′, C′ sont, comme on le sait, et comme le prouve l'équation (2), situés sur une droite Δ′ ayant pour équation

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} = 0;$$

on voit donc que Δ′ est une transversale réciproque de Δ.

70. Théorème. — *Lorsqu'une conique* Γ *est inscrite dans un triangle* ABC *: son centre, le centre de gravité du triangle et le point réciproque du point de Gergonne sont trois points en ligne droite; de plus, la distance des deux derniers points est le double de celle des deux premiers.*

L'équation d'une conique inscrite au triangle de référence, si l'on veut mettre en évidence les coordonnées $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ du point M_0 que l'on obtient en joignant les sommets du triangle aux points de contact des côtés opposés, peut s'écrire

$$f = \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} + \frac{\beta^2}{\beta_0^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2} - \frac{2\beta\gamma}{\beta_0\gamma_0} - \frac{2\alpha\gamma}{\alpha_0\gamma_0} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha_0\beta_0} = 0.$$

La droite de l'infini ayant pour équation

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

le pôle de cette droite, le centre de la conique en d'autres termes, a des coordonnées qui vérifient les équations

$$l''_\alpha = l'_\beta = l'_\gamma,$$

qui, explicitées, s'écrivent :

$$\frac{\dfrac{\alpha}{\alpha_0} - \dfrac{\beta}{\beta_0} - \dfrac{\gamma}{\gamma_0}}{\alpha_0} = \frac{\dfrac{\beta}{\beta_0} - \dfrac{\gamma}{\gamma_0} - \dfrac{\alpha}{\alpha_0}}{\gamma_0} = \frac{\dfrac{\gamma}{\gamma_0} - \dfrac{\alpha}{\alpha_0} - \dfrac{\beta}{\beta_0}}{\gamma_0}.$$

Ces égalités donnent les suivantes :

$$\frac{\alpha}{\dfrac{1}{\beta_0} + \dfrac{1}{\gamma}} = \frac{\beta}{\dfrac{1}{\gamma_0} + \dfrac{1}{\alpha_0}} = \frac{\gamma}{\dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{1}{\beta_0}},$$

et elles déterminent les coordonnées d'un point Ω, centre de Γ.

Le point M_0', réciproque du point de Gergonne, a pour coordonnées $\frac{1}{\alpha_0}, \frac{1}{\beta_0}, \frac{1}{\gamma_0}$; pour vérifier que M_0M_0' passe par le centre de gravité G de ABC, point dont les coordonnées sont égales au tiers de la surface de ABC, il suffit de reconnaître que l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1}{\alpha_0} & \dfrac{1}{\beta_0} & \dfrac{1}{\gamma_0} \\ \dfrac{1}{\beta_0} + \dfrac{1}{\gamma_0} & \dfrac{1}{\gamma_0} + \dfrac{1}{\alpha_0} & \dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{1}{\beta_0} \end{vmatrix} = 0,$$

identité que l'on rend manifeste en ajoutant les éléments de la troisième ligne à ceux de la deuxième.

Pour démontrer la seconde partie du théorème, il faut calculer d'abord les coordonnées des trois points Ω, M_0' et O; ces coordonnées sont :

$$\text{pour } \Omega, \ldots \alpha_1 = \frac{S}{2} \frac{\dfrac{1}{\beta_0} + \dfrac{1}{\gamma_0}}{\dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{1}{\beta_0} + \dfrac{1}{\gamma_0}}, \text{ etc } \ldots ;$$

$$\text{pour G}, \ldots \alpha_2 = \frac{S}{3}, \text{ etc } \ldots ;$$

$$\text{pour } M_0' \ldots \alpha_3 = \frac{S\dfrac{1}{\alpha_0}}{\dfrac{1}{\alpha_0} + \dfrac{1}{\beta_0} + \dfrac{1}{\gamma_0}}, \text{ etc } \ldots ;$$

égalités dans lesquelles S désigne, bien entendu, la surface du triangle ABC.

Ces formules donnent

$$2\alpha_1 + \alpha_3 = 3\alpha_2$$

Les trois points Ω, G, M'_0 étant en ligne droite, cette relation établit complètement le théorème énoncé (*).

71. Théorème. — *Lorsqu'une droite* Δ *est constamment tangente à une parabole* P *inscrite au triangle de référence, la transversale réciproque* Δ' *reste parallèle à une direction fixe; cette direction étant celle des diamètres de* P; ET RÉCIPROQUEMENT.

En exprimant que la conique qui correspond à l'équation

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_0^2} + \frac{\beta^2}{\beta_0^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2} - \frac{2\beta\gamma}{\beta_0\gamma_0} - \frac{2\alpha\gamma}{\alpha_0\gamma_0} - \frac{2\alpha\beta}{\alpha_0\beta_0} = 0,$$

est tangente à la droite de l'infini, droite représentée par l'égalité

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

on trouve

$$\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{\gamma_0} = 0. \qquad \text{(A)}$$

On peut aussi obtenir cette relation en exprimant que le centre de la conique est à l'infini et l'on vérifie, dans tous les cas, que les droites qui joignent le centre de la conique aux sommets du triangle de référence sont bien trois droites parallèles quand l'égalité (A) est accordée.

On trouve aussi, nous laissons ce point à vérifier, que l'équation générale des diamètres de P est

$$A\alpha\alpha_0 + B\beta\beta_0 + C\gamma\gamma_0 = 0, \qquad (1)$$

avec la condition

$$A + B + C = 0; \qquad (2)$$

et, enfin, que la droite Δ représentée par l'équation

(*) On trouvera une démonstration géométrique de cette propriété et de la suivante dans notre mémoire déjà cité.

$$m\frac{\alpha}{\alpha_0} + n\frac{\beta}{\beta_0} + p\frac{\gamma}{\gamma_0} = 0,$$

est tangente à P, si l'on a

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 0. \qquad (3)$$

72. Théorème. — *Lorsqu'une droite* Δ *tourne autour d'un point fixe* K_0 $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, *la transversale réciproque* Δ' *enveloppe une conique* Γ *inscrite au triangle de référence* ABC; *le point de Gergonne qui correspond à cette conique est le réciproque de* K_0; ET RÉCIPROQUEMENT.

Soit

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0,$$

l'équation de Δ; celle de Δ' est

$$\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{p} = 0,$$

et les paramètres m, n, p vérifient la relation

$$m\alpha_0 + n\beta_0 + p\gamma_0 = 0.$$

En cherchant, par le procédé ordinaire, l'enveloppe de Δ', le calcul donne immédiatement

$$\sqrt{\alpha\alpha_0} + \sqrt{\beta\beta_0} + \sqrt{\gamma\gamma_0} = 0.$$

Cette équation prouve l'exactitude du théorème énoncé.

La réciproque est évidemment vraie.

73. Remarque. — La conique Γ étant inscrite au triangle de référence ABC, on peut lui appliquer le théorème précédent.

On reconnaît ainsi que *le centre de* Γ *s'obtient en joignant le point* K_0 *au centre de gravité de* ABC, *et en prolongeant cette droite d'une longueur moitié moindre.*

En joignant K_0 aux sommets de ABC on a des droites qui ont pour réciproques les côtés du triangle ABC. La considération de ces transversales particulières prouve que *le point de contact de* Γ *avec* BC *s'obtient en joignant* K_0 *au sommet* A *et en prenant le symétrique, par rapport au milieu de* BC, *du point d'intersection de cette droite avec* K_0A.

Cela posé, la transversale Δ', réciproque de Δ, a pour équation :

$$\frac{\alpha\alpha_0}{m} + \frac{\beta\beta_0}{n} + \frac{\gamma\gamma_0}{p} = 0.$$

Les égalités (1), (2) et (3) prouvent que Δ' est un diamètre de P.

La réciproque est évidente.

Ces propriétés diverses étant établies, nous allons les appliquer à quelques constructions.

74. Problème I. — *Construire une parabole, tangente par tangente, connaissant quatre tangentes.*

Soient A,B,C,D les quatre droites proposées. Prenons D′ transversale réciproque de D par rapport au triangle ABC; puis traçons autant de droites que nous voudrons, parallèles à D′. Les transversales réciproques de ces parallèles sont autant de tangentes à la parabole proposée (§ 71).

Si l'on trace des parallèles à D′ par les sommets du triangle, les droites rencontrent les côtés du triangle ABC en des points α, β, γ; ayant pris les symétriques α', β', γ' de ces points par rapport aux milieux des côtés du triangle, les points ainsi obtenus sont les points de contact des droites A, B, C avec la parabole (§73).

75. Problème II. — *Construire tangente par tangente une conique connaissant cinq tangentes.*

Soient A, B, C, D, E les tangentes données. Prenons encore les droites D′, E′ transversales réciproques de D et de E par rapport au triangle ABC. Ces droites D′, E′ se coupent en un certain point P. Que l'on mène par ce point autant de droites que l'on voudra, puis que l'on prenne, par rapport à ABC, leurs transversales réciproques ; toutes ces droites seront des tangentes à la conique en question (§ 72).

Le problème traité au paragraphe précédent n'est évidemment qu'un exemple particulier de celui-ci ; c'est le cas où l'on suppose le point P rejeté à l'infini.

Si l'on prend le point réciproque de P par rapport à ABC,

le point P′ ainsi obtenu est le point de Gergonne de la conique cherchée, par rapport au triangle ABC (§ 72). On obtient ainsi les points de contact de la coniqne avec les droites A, B, C.

Enfin, si l'on joint P au centre de gravité de ABC et si l'on prolonge cette droite d'une longueur égale à sa moitié, on aboutit au centre même de la conique.

Il n'est pas nécessaire de faire observer que toutes ces constructions peuvent être effectuées avec la règle et l'équerre, cette condition étant ici toujours implicitement exigée.

76. Problème III. — *Construire une conique connaissant cinq points* A, B, C, D, E.

Prenons les points D′, E′ réciproques des points D et E, par rapport au triangle ABC. A tout point M′, pris sur D′ E′, correspond un point réciproque M qui appartient à la conique cherchée (§ 68). Celle-ci peut ainsi se construire point par point.

En prenant la transversale réciproque de D′ E′ on obtient une droite qui coupe les côtés du triangle ABC en des points α, β, γ. Les droites Aα, Bβ, Cγ sont les tangentes à la conique proposée aux points A, B, C (§ 69).

77. Problème IV. — *Connaissant trois tangentes communes* A, B, C *à deux coniques* U *et* V, *trouver la quatrième tangente commune.*

Ce problème du premier degré se résout très aisément par la considération des transversales réciproques.

Prenons les droites A, B, C pour former le triangle de référence et considérons d'abord la conique U. A cette conique correspond un point P, comme nous l'avons expliqué (§ 73), et toute droite passant par P a pour transversale réciproque une tangente à U. Considérons, de même, la conique V et son point correspondant Q. La droite PQ admet une transversale réciproque Δ, cette droite Δ est la quatrième tangente demandée. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. A. Boutin, *professeur au collège de Vire.*

... La solution proposée pour la question 325, *tome V, 1re série*, 1881, n'est pas exacte...

Nota. — L'erreur signalée par M. Boutin provient d'une faute typographique assez grave. Au lieu de l'équation

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{a}}+\sqrt[n]{\frac{a+x}{x}}=\sqrt[n]{\frac{x}{b}},$$

proposée page 191 et résolue inexactement p. 399 *(loc. cit.)*, il faut lire

$$\frac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\frac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}.$$

Cette équation se résout sans difficulté et donne

$$\frac{a+x}{x}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

de laquelle on peut déduire x. Mais il serait évidemment préférable d'effectuer le calcul indiqué, par les logarithmes. On poserait

$$t=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

et on calculerait t par logarithmes. G. L.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR BOUQUET

Les dernières vacances ont vu mourir un mathématicien qui, d'un avis unanime, a été l'un des géomètres les plus profonds et les plus élégants de l'époque moderne.

Comme le dit avec tant de raison M. le Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, dans le discours qu'il a prononcé sur la tombe de Bouquet et que nous reproduisons plus loin, l'histoire de la science gardera précieusement, et parmi ceux qu'elle honorera le plus, les deux noms impérissables et inséparables de Briot et Bouquet. A trois années d'intervalle, presque jour pour jour, sont morts ces deux hommes que l'École Normale avait liés d'une amitié si étroite et qui ont passé leur vie dans une collaboration dont on connaît tous les fruits.

J'ai personnellement peu connu Bouquet; pourtant, j'ai pu apprécier ses éminentes qualités de professeur dans les conférences qu'il faisait, vers 1863, aux élèves du Lycée Bonaparte. Il était alors professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand; c'est, je crois, peu de temps après qu'il quitta cette chaire pour devenir maître de conférences à l'École Normale et professeur à la Sorbonne. Bouquet était né le 7 septembre 1819; il était entré à l'École Normale dans la promotion de 1839 et, en jetant les yeux sur les promotions voisines, on trouve celle de 1838 qui a donné Briot et celle de 1837 qui a produit Puiseux. Ces trois illustres normaliens sont morts aujourd'hui et se sont suivis dans la tombe avec une sorte de triste régularité. Briot est mort le 20 septembre 1882, Puiseux le 9 septembre 1883 et Bouquet le 10 septembre 1885! Puiseux et Bouquet étaient membres de l'Institut. Si Briot n'a pas eu ce suprême honneur, ce n'est pas faute de l'avoir mérité et, comme le dit M. Bertrand dans le discours qu'on va lire, si l'Académie des sciences n'a pu compter à la fois Briot et Bouquet parmi ses membres, du moins « elle doit à leur mémoire les mêmes hommages et les mêmes regrets ».

Voici d'ailleurs ce discours qui rend au grand mérite de ces deux savants un hommage aussi juste qu'éloquent.

« Messieurs, tous les géomètres de l'Europe étaient conviés il y a huit jours à peine à un concours qui sera mémorable. Le roi de Suède, admirateur éclairé des sciences mathématiques, rappelait leurs progrès depuis un demi-siècle et les espérances qui grandissent chaque jour. Dans un tableau, tracé de

main de maître, quelques noms brillent en tête des voies les plus nouvelles et déjà les plus suivies. Ceux de Briot et Bouquet occupent la place d'honneur, et cette consécration d'une gloire que le temps doit accroître a été pour notre confrère mourant une suprême récompense et une dernière joie.

» Briot et Bouquet! L'histoire de la science retiendra ces deux noms sans les séparer jamais, et l'Académie des sciences, dont les listes n'en ont inscrit qu'un seul, doit à leur mémoire les mêmes hommages et les mêmes regrets.

» Jamais union scientifique ne fut plus complète et plus fructueuse. Liés d'une étroite amitié sur les bancs de l'École Normale, ils se retrouvaient, presque à leurs débuts, professeurs tous deux à la Faculté des sciences de Lyon. L'habitude d'étudier ensemble fut bien vite reprise. Les plus difficiles problèmes furent abordés. Dans ces conférences de chaque jour, presque de chaque heure, leur but était de s'instruire; plus d'une découverte semblait naître comme d'elle-même; sur qui tomba d'abord l'inspiration? S'ils ne l'ont jamais dit, c'est qu'en vérité ils ne le savaient pas. Ils arrivaient au but, et pendant la route souvent longue et pénible, leurs esprits ne s'étaient pas quittés.

» Tous deux ont glorieusement rempli leur tâche. L'un, plus curieux de toutes choses, avait abordé toutes les études et laissera, sur les voies les plus diverses, les marques durables d'un esprit supérieur; l'autre est resté le type le plus aimable du pur géomètre. La géométrie le délassait de l'algèbre; le calcul intégral de la théorie des nombres. Il travaillait sans cesse, publiait peu, mais inventait souvent; ses élèves sont nombreux, ils peuvent en rendre témoignage.

» Il a été dit : « Bienheureux ceux qui sont doux et ceux qui sont simples! » Bouquet a possédé ces deux béatitudes. Jamais les petits ennuis, les petites déceptions, les injustices même, que la carrière des sciences n'épargne pas plus qu'aucune autre à ceux qui s'y distinguent, n'ont fait naître chez lui la plus légère aigreur. Trop modeste pour mettre son amour-propre de la partie, la résignation lui était facile.

» Lorsque, trop tardivement au jugement de ses amis, non au sien, une justice plus complète lui était rendue, sa joie

aurait été sans arrière-pensée s'il n'avait regretté et d'un cœur bien sincère, que, pour penser à lui, on en eût oublié d'autres.

» Adieu Bouquet, excellent confrère, ami toujours dévoué, maître incomparable, ta perte laissera parmi nous de longs regrets. Tes élèves conserveront de toi un pieux et reconnaissant souvenir. Je n'essayerai pas de dire l'inconsolable douleur de ta famille. » G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

(SESSION DE JUILLET 1885)

ACADÉMIE DE PARIS

6 juillet.

1° Deux circonférences O et O′ sont tangentes extérieurement, le rayon de la plus grande est connu et représenté par R, celui de la plus petite $= \frac{R}{3}$. On mène aux deux circonférences une tangente commune AA′. On demande de calculer en fonction de R l'aire comprise entre les deux circonférences et la tangente AA′. — *Remarque.* — On commencera par calculer le cosinus de $\widehat{AOO}$.

2° Démontrer que le jour solaire vrai est plus grand que le jour sidéral.

7 juillet.

1° Démontrer que l'équation du 2e degré en x : $\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} - 1 = 0$ a toujours ses racines réelles, quelles que soient les constantes a, b, p, q.

2° Quelle est, en fonction du rayon d'un cercle, l'expression du côté du pentagone régulier inscrit?

8 juillet.

1° Trouver en kilom. le rayon d'un secteur circulaire dont l'angle $= 5^\circ$ et la surface 25 ares.

2° Trouver le centre de gravité d'une pyramide polygonale connaissant le centre de gravité des pyramides triangulaires.

9 juillet.

1° Démontrer que le lieu géométrique des symétriques du foyer d'une parabole par rapport aux tangentes à la parabole est la directrice.

2° Quelle relation doit-il exister entre les coefficients a, b, c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ pour qu'une des racines soit le double de l'autre?

10 juillet.

1° Dans une sphère de rayon R, on inscrit un cône droit de hauteur $\frac{3R}{2}$. Déterminer un plan parallèle à la base du cône coupant la sphère et le cône suivant deux cercles dont les surfaces aient une différence donnée πa^2.

2° Calculer tg $3a$ connaissant tg a. Pour quelle valeur de tg a trouvera-t-on tg $3a = 0$?

11 juillet.

1° Démontrer que le plus petit commun multiple de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur plus grand commun diviseur.

2° Calculer dans un triangle : a, tg $\frac{B}{2}$ et tg $\frac{C}{2}$, sachant que $b = a + 1$, $c = a + 2$, $\cos A = \frac{3}{5}$.

16 juillet.

1° Trouver le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole.

2° Définition du soleil moyen, du midi moyen, de l'heure moyenne.

17 juillet.

1° Démontrer que la racine carrée des centaines d'un nombre entier est égale au nombre des dizaines de la racine carrée du nombre entier.

2° Résoudre les deux équations $\cos x + \cos y = a$, $\cos 2x + \cos 2y = b$.

(A Suivre.)

QUESTION 133

Solution par M. Chapron, aspirant répétiteur au Lycée de Versailles.

Étant donné un triangle ABC *et deux points* A′ *et* A_1 *sur le côté* BC, *mener par ces deux points un cercle qui coupe* AC *en* B′ *et en* B_1, AB *en* C′ *et* C_1 *de façon que* AA′, BB′, CC′ *concourent en un même point* O′. *On voit facilement que* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent aussi en un point* O_1. (E. Lemoine.)

Démontrons d'abord que si AA′, BB′, CC′ sont concourantes, AA_1, BB_1, CC_1 concourent aussi.

On a

$$BA' \,.\, BA_1 = BC' \,.\, BC_1,$$
$$CB' \,.\, CB_1 = CA' \,.\, CA_1,$$
$$AC' \,.\, AC_1 = AB' \,.\, AB_1.$$

Multiplions membre à membre et supprimons dans le premier membre et dans le second les produits

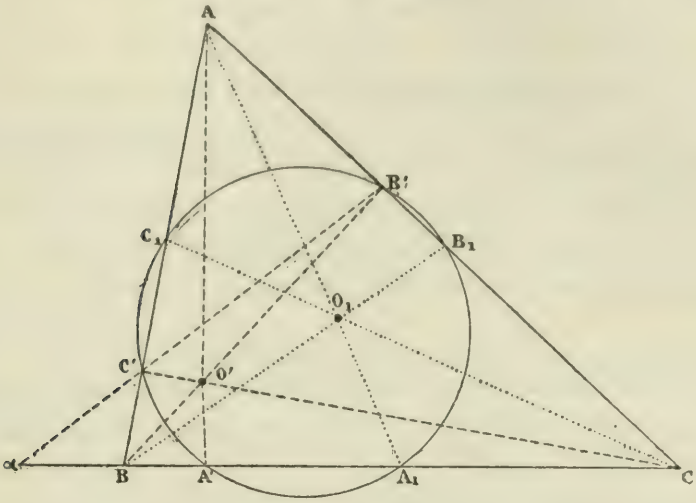
$$BA' \,.\, CB' \,.\, AC', \quad \text{et} \quad BC' \,.\, CA' \,.\, AB'$$

qui sont égaux, puis observons que les droites

AA′, BB′, CC′ concourent en O, il vient

$$BA_1 \,.\, CB_1 \,.\, AC_1 = BC_1 \,.\, CA_1 \,.\, AB_1.$$

Ainsi AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes. Cela posé, si l'on



considère le quadrilatère O'C'AB', les diagonales AO', B'C divisant harmoniquement la troisième BC, si l'on appelle α l'intersection de BC et de B'C', ce point est le conjugué harmonique de A' par rapport à B et à C et par suite il est déterminé.

Mais on a :

$$\alpha C' \,.\, \alpha B' = \alpha A' \,.\, \alpha A_1,$$

c'est-à-dire que B' est sur la circonférence la transformée par rayons vecteurs réciproques de AB, α étant le pôle et $\alpha A' \,.\, \alpha A_1$ la constante de la transformation.

Suivant que cette circonférence coupe, touche, ou ne coupe pas la droite AC, il y a deux solutions ou une seule, ou enfin aucune solution réelle.

QUESTIONS PROPOSÉES

198. — Si on considère les trois ellipses qui ont pour foyers deux des sommets d'un triangle et passent par le troisième :

1° La somme des grands axes est égale au double du périmètre du triangle ;

2° La somme des carrés des demi-petits axes est égale au carré du demi-périmètre du triangle;

3° Le produit des trois demi-petits axes est égal au produit de la surface du triangle par son demi-périmètre;

4° Si on ne considère que les demi-ellipses déterminées par leur grand axe et le troisième sommet du triangle ABC; elles se coupent en trois points qui, joints aux sommets voisins du triangle forment un hexagone tel que la somme de trois côtés non consécutifs est égale à la somme des trois autres. *(A. Boutin.)*

199. — On donne deux droites rectangulaires ox, oy et deux droites Δ, Δ' parallèles à ox. Par o, on mène une transversale mobile Δ'' qui rencontre Δ en A, Δ' en A'; enfin, au point A', on élève une perpendiculaire A'I égale à A'A.

Cela posé, on demande de déterminer la droite Δ'' de façon que le rectangle λ, obtenu en abaissant de I des perpendiculaires sur ox et oy soit maximum.

On suppose ensuite que les droites Δ, Δ' se meuvent parallèlement à elles-mêmes, en conservant une distance invariable; à chaque position de ces droites correspond un point I, déterminé comme on vient de le voir. Trouver pour quelle position des parallèles le rectangle λ, correspondant à ce point, est minimum. (G. L.)

RECTIFICATIONS

1° La dernière page du numéro d'octobre porte que la question 196 est *réitérée;* j'avais dit et il faut lire *retirée.*

2° Les questions 197 et 188 qui m'ont été communiquées par MM. Boubals et Vigarié sont identiques. Elles ont été trouvées séparément par l'un et l'autre de ces collaborateurs et j'aurais dû, si j'avais pensé à les rapprocher, les proposer sous leur signature commune. G. L.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

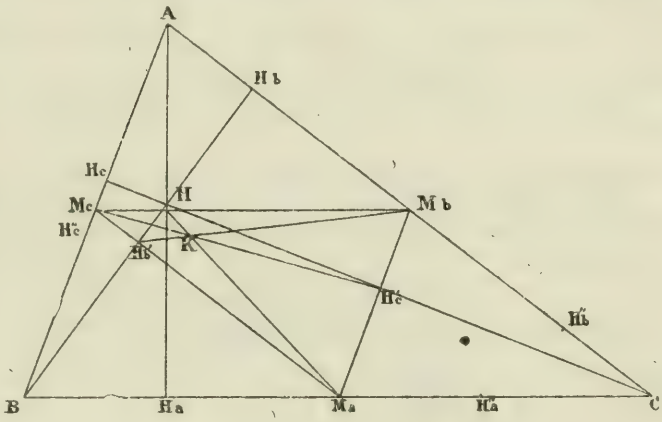
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24762-5.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Émile Vigarié**, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintéjoux).

(*Suite*, voir p. 244.)

27. — La connaissance des distances des points aux trois côtés permet d'établir d'une manière simple et générale le fait de la situation des systèmes de points en ligne droite (*).



On trouve ainsi que *le milieu d'un côté, le milieu de la hauteur correspondante et le point de Lemoine sont trois points en ligne droite*, d'où cette proposition connue (**) :

(*) M. Brocard, *loc. cit.*, Rouen 1883. — *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1883.

(**) Le théorème de Newton (la droite qui joint les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique passe par le centre de cette courbe) prouve, d'une façon générale, que *si l'on considère un triangle* ABC *et trois droites* AA′ BB′ CC′ *concourantes, les droites qui joignent les milieux des côtés du triangle* ABC *aux milieux respectifs des droites* AA′, BB′, CC′ *concourent en un même point; ce point n'étant autre chose que le centre de la conique inscrite au triangle* ABC *aux points* A′, B′ *et* C′.

D'après cela, et comme l'a remarqué M. Lemoine (*), le point de Lemoine est le centre de la conique inscrite à un triangle, les points de contact étant les pieds des hauteurs.

G. L.

(*) *Annuaire de l'Association Française*, 1874. Voyez aussi l'étude de M. J. Neuberg (*Mathesis*, 1881) *sur le centre des médianes antiparallèles.*

Les droites qui joignent les milieux des côtés aux milieux des hauteurs correspondantes sont concourantes.

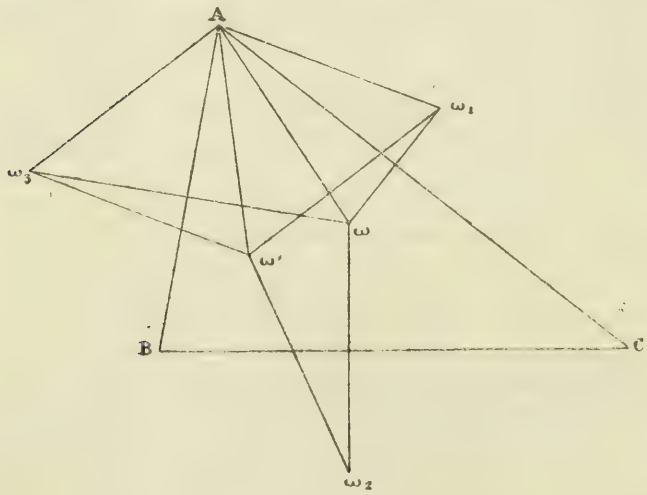
Ce théorème se démontre facilement de la manière suivante : soient H_a, H'_b, H'_c, les milieux des hauteurs du triangle ABC, on a en effet

$$\frac{H'_b M_c . H'_a M_b . H'_c M_a}{H_b M_a . H'_a M_c . H'_c M_b} = \frac{H_b A . H_a C . H B}{H_b C . H_a B . H_c A} = -1 ;$$

si nous prenons les symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux milieux des droites AB, AC, BC, nous obtenons des points H''_a, H''_b, H''_a, tels que les droites AH''_a, BH''_b, CH''_c concourent en un point H_1. Il est alors facile de voir que HH_1 est le diamètre du cercle de Brocard du triangle obtenu en menant par A, B, C des parallèles aux côtés opposés.

28. Théorème. — *Deux points inverses peuvent toujours être considérés comme les foyers d'une ellipse inscrite au triangle* (*).

Soient $\omega\omega'$ deux points inverses du triangle ABC, ω_1, ω_2, ω_3 les symétriques de ω par rapport à AC, CB, BA. Je joins ω' aux deux points ω_1, ω_3. Les deux triangles $\omega' A \omega_3$, $\omega' A \omega$, sont égaux comme ayant un angle égal à $\widehat{BAC}$ compris entre côtés égaux; donc les distances de ω' aux trois points ω_1, ω_2, ω_3 sont égales ; par suite ω, ω' sont les foyers d'une ellipse inscrite au triangle. Le grand axe de cette ellipse est égal à $\omega'\omega_1$.



(*) M. le colonel Mathieu, *loc., cit.* p. 404.

On déduit de là que

Les projections de deux points inverses sur les côtés du triangle sont six points d'une même circonférence, ayant pour centre le milieu de la droite qui joint les points inverses.

Réciproquement : *Une ellipse étant inscrite dans un triangle, ses foyers sont deux points inverses.*

Cela résulte immédiatement d'un théorème connu. En appliquant ici le théorème 3 on retrouve encore cette proposition élémentaire :

Le produit des distances des foyers d'une ellipse à une tangente est constant.

29. — Dans son étude sur le cercle de Brocard (*) M. A. Morel a montré que

L'ellipse inscrite au triangle ABC *et ayant ses foyers aux points de Brocard, touche les côtés du triangle aux pieds des médianes antiparallèles.*

Par une méthode analogue on prouverait que

Le centre de gravité G *du triangle* ABC *et le point de Lemoine sont les foyers d'une ellipse inscrite au triangle. Les points de contact partagent les côtés de* ABC *en segments proportionnels aux carrés des médianes adjacentes ; ce sont donc les pieds des médianes antiparallèles des triangles* BGC, CGA, AGB.

J'arrête ici cette étude dont le sujet est encore loin d'être épuisé. Dans un second travail, qui paraîtra prochainement dans ce journal, j'indiquerai d'autres propriétés des droites et des points inverses et leurs applications, en même temps que les propriétés principales d'un nouveau cercle dont l'idée est due à M. E. Lemoine et qui, pour ce motif, est appelé *cercle de Lemoine.*

En terminant, j'adresse tous mes remerciements à MM. Lemoine et A. Morel, qui ont bien voulu mettre gracieusement leurs différents mémoires à ma disposition.

(*) *Journal de Math. élém.* 1883. — Voir aussi M. J. Neuberg, *Mathesis*, tome I, 1881.

VARIÉTÉS

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE ET DE L'ÉQUERRE

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 251.)

78. Examen d'un cas particulier remarquable; transformations involutives. — On observera que la construction précédente est en défaut dans le cas particulier où, parmi les tangentes données, il s'en trouve deux qui sont parallèles. L'examen de cette hypothèse exige que nous entrions dans quelques développements sur les transformations involutives, lorsque les coordonnées sont tangentielles, mais non homogènes.

Si nous imaginons deux variables θ, Θ vérifiant une relation homographique en involution

$$A\theta\Theta + B(\theta + \Theta) + C = 0, \qquad (1)$$

nous pouvons distinguer quatre cas :

1°	$AC \neq 0$;		(cas général)
2°	$A = 0$,	$C \neq 0$;	cas particuliers.
3°	$C = 0$,	$A \neq 0$;	
4°	$A = 0$, et	$C = 0$;	

Dans la première hypothèse, qui correspond au cas général, on peut toujours, par un changement des variables, ramener l'équation (1) à la forme

$$t'\,\Theta' = h^2,$$

que nous allons examiner et qui représente l'équation normale de l'involution ordinaire.

Considérons maintenant, dans un système dont les coordonnées sont bien déterminées, mais que nous n'explicitons pas pour l'instant, deux éléments (droites ou points) M_0, M_1 et supposons que les coordonnées de ces éléments vérifient les égalités :

$$u_0 U_1 = v_0 V_1 = w_0 W_1,$$

si les coordonnées sont supposées homogènes; ou, dans l'hypothèse contraire, les suivantes :

$$u_0 U_1 = h^2, \qquad v_0 V_1 = h^2.$$

Si le élément M_0 décrit une certaine figure F_0, l'élément correspondant M_1 tracera une figure correspondante F_1, et nous pourrons dire, d'après une locution usitée, que *les figures* F_0, F_1 *sont involutives;* ou que *la transformation considérée appartient au groupe des transformations involutives.*

Telles sont les transformations par points et droites réciproques dont nous avons parlé précédemment; telle est encore celle que nous allons imaginer pour résoudre la difficulté que nous avons rencontrée.

Nous ferons observer à ce propos, et l'expérience n'en est que trop facile à faire, que l'examen des cas particuliers, dans la géométrie des constructions, comporte souvent des difficultés qui leur sont inhérentes et qui ne se présentent pas dans le cas général. Le géométrie descriptive notamment est pleine des singularités que nous signalons ici.

Ajoutons que les trois cas particuliers que nous avons distingués tout à l'heure donnent lieu, eux aussi, à des transformations involutives; mais nous n'envisageons que le cas général qui, seul, nous intéresse pour résoudre le problème que nous avons en vue.

79. Transformation involutive dans le système des coordonnées parallèles. — Les coordonnées parallèles (*) peuvent se définir de la manière suivante :

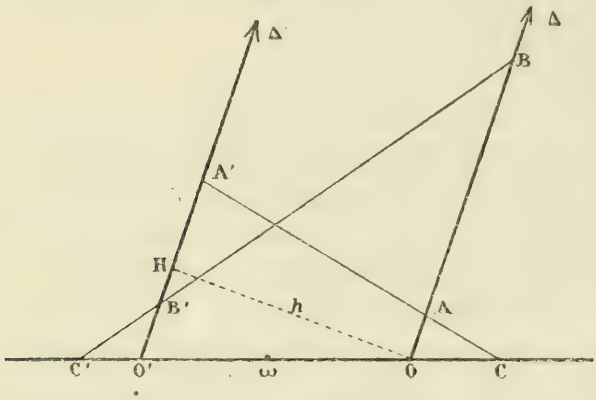
Si nous imaginons deux droites fixes Δ, Δ' dans un plan P et, sur ces droites, deux origines O, O'; une droite D du plan P rencontre Δ et Δ' en des points A, A'. En posant :

$$OA = u, \quad O'A' = v,$$

on peut dire que u et v, valeurs prises en grandeur et en signe, déterminent la position de AA' dans le plan P; en

(*) Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique, déduits de considération des coordonnées parallèles, par *Maurice d'Ocagne*, élève ingénieur des ponts et chaussées, vice-secrétaire de la Société mathématique de France. (Paris Gauthier-Villars, 1885.)

d'autres termes, u et v sont les coordonnées de D. C'est le système bien connu des coordonnées tangentielles. On peut observer pourtant que, dans cette définition, un peu plus générale que celle qu'on donne habituellement, rien n'empêche de supposer que les droites fixes Δ, Δ' soient parallèles. On obtient ainsi le système de coordonnées parallèles de M. d'Ocagne.



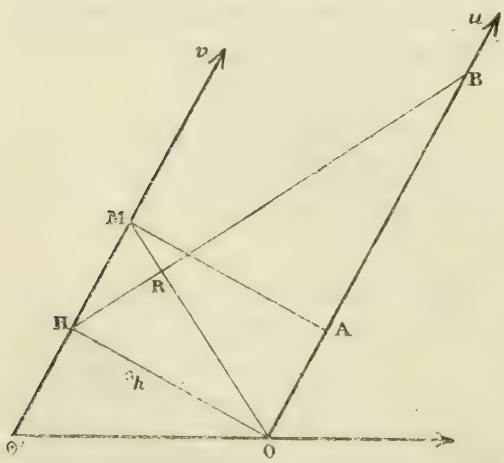
Adoptons, dans ce système de coordonnées, les formules de transformation involutive dont nous avons parlé plus haut et posons

$$uU = h^2, \quad vV = h^2.$$

Dans ces égalités, u, v désignent les coordonnées parallèles d'une droite AA'; U,V celles de la droite transformée BB'; de plus, h représente la distance OH des axes parallèles Δ, Δ'.

Mais avant d'aller plus loin, nous devons montrer d'abord comment, dans cette transformation, on peut construire la correspondante d'une droite, avec la règle et l'équerre.

Du point A, abaissons AM perpendiculairement à l'axe O'v, puis joignons OM et, finalement, abaissons de H une perpendiculaire HR sur OM. Cette droite HR prolongée rencontre l'axe Ou en un certain point B; les triangles semblables OHM, OHB donnent



$$\overline{OH}^2 = HM.\ OB.$$

Ainsi nous avons

$$OA.\ OB = h^2,$$

et nous pouvons, d'après cela, en appliquant cette construction

successivement aux points A et A′, déduire, avec la règle et l'équerre, d'une droite donnée AA′ la correspondante BB′.

80. Remarque. — On peut aussi remarquer, et cette observation peut servir à vérifier la construction précédente, que deux droites correspondantes coupent la droite des origines O,O′ en deux points C,C′ symétriquement placés par rapport au milieu ω de OO′.

En effet, l'égalité

$$OA.\,OB = O'A'.\,O'B',$$

donne

$$\frac{OA}{O'A'} = \frac{O'B'}{OB},$$

et, par suite,

$$\frac{CO}{CO'} = \frac{C'O'}{C'O}.$$

Cette proportion établit bien la symétrie des points C,C′ par rapport à ω.

81. Théorème. — *Dans la transformation involutive définie plus haut, à une conique* Γ, *tangente à la fois aux axes parallèles et à la droite des origines, correspond un point ; et réciproquement.*

Cherchons d'abord l'équation de Γ, équation qui peut s'écrire

$$f(u, v) = 0, \qquad (1)$$

f désignant une fonction algébrique du second degré par rapport aux lettres u et v. A une valeur donnée pour u, correspondent pour v deux valeurs, mais l'une de ces valeurs est infinie. Cette observation s'applique aussi à la variable v et l'on voit ainsi que f ne doit renfermer ni le terme en u^2, ni le terme en v^2. De plus, l'équation (1) doit être vérifiée par $u = 0$ et $v = 0$; finalement l'équation de Γ est donc

$$Auv + Bu + Cv = 0.$$

Transformons cette égalité au moyen des formules

$$uV = h^2, \quad vV = h^2.$$

A une droite Δ (u, v) tangente à Γ, correspond une droite Δ′ (U, V) dont les coordonnées parallèles vérifient constamment la relation

$$Ah^2 + BV + CU = 0.$$

Une propriété élémentaire bien connue, relative aux bases d'un trapèze coupé par une droite qui leur est parallèle, prouve que Δ' passe par un point fixe.

Sans pousser plus avant la transformation précédente on voit le parti qu'on en peut tirer pour résoudre, dans le cas particulier que nous venons d'envisager, le problème qui a pour but la construction de la quatrième tangente commune à deux coniques Γ', Γ'' lorsqu'on suppose connues les trois autres tangentes communes, dans le cas particulier où, parmi celles-ci, deux se trouvent parallèles.

Aux coniques proposées correspondent deux points O', O, qu'on déterminera d'abord en considérant, pour chacune d'elles, deux tangentes et leurs transformées. A la droite O'O'' correspond une droite Δ qui est la tangente demandée.

82. Problème. — *Étant données quatre droites, deux à deux sécantes, tracer, tangente par tangente, la parabole* P *inscrite au quadrilatère qu'elles constituent.*

Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 les quatre droites proposées; considérons trois d'entre elles Δ_1, Δ_2, Δ_3 et prenons la droite Δ'_4 transversale réciproque de Δ_4 par rapport au triangle $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$. Si nous traçons une droite mobile Δ'_5 parallèle à Δ'_4, la transversale réciproque Δ_5 enveloppe une conique inscrite au quadrilatère $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$ et dont le centre est à l'infini (§ 71); c'est précisément la parabole P.

Les points de contact de P avec les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 s'obtiennent très simplement; on mène par l'un des sommets (Δ_1,Δ_2) une parallèle à Δ'_4, laquelle rencontre Δ_3 en un certain point A; on prend ensuite le point A' symétrique de A par rapport au milieu du côté A_3 du triangle $A_1A_2A_3$; le point A' est l'un des points de contact cherchés. On détermine de même les points analogues.

83. Problème. — *Étant données deux coniques* Γ, γ *définies par cinq points*

A, B, C, D, E; A, B, C, F, G;

et possédant, par conséquent, trois points communs A, B, C; *on propose de trouver le quatrième point commun aux deux coniques.*

Ce problème, qui est le corrélatif de celui qui vient de nous occuper, se résout par une méthode toute semblable à celle que nous avons employée pour trouver la quatrième tangente commune à deux coniques, connaissant les trois autres. On substitue seulement, à l'idée des transversales réciproques, celle des points réciproques et l'on raisonne comme il suit.

Prenons le triangle ABC comme triangle de référence et cherchons la transformée de la figure proposée, par la méthode des points réciproques.

A la conique Γ circonscrite au triangle de référence correspond une droite Γ' déterminée par les points D', E', réciproques des points D et E. De même, à γ correspond une droite γ' passant par les points F', G', réciproques des points F, G.

Les droites Γ' et γ' se coupent en un point φ'; le point φ, réciproque de φ', est le point cherché.

Les constructions auxquelles nous faisons allusion ici peuvent toutes être effectuées avec la règle et l'équerre; mais on les abrège singulièrement si l'on s'accorde l'usage du compas à pointes sèches, instrument qui permet de déplacer, sans tracer de lignes, une longueur donnée.

Le tracé des coniques par points et par tangentes, les problèmes nombreux qui s'y rattachent, exigeraient peut-être de plus amples développements. Mais cette géométrie est trop connue pour que nous croyions devoir nous y attarder ici davantage et, après avoir dit ce que nous croyons nouveau sur cette matière, nous voulons aborder maintenant la détermination du centre de courbure. *(A suivre.)*

BIBLIOGRAPHIE

Cours de mathématiques élémentaires. *Eléments de géométrie* (cinquième édition, 1885); *Exercices d'arithmetique*, 3e édition; *Eléments d'arithmetique*, 4e édition; par F. I. C. (A. Mame et fils, Poussielgue frères, éditeurs).

J'ai déjà eu l'occasion (*) de faire l'éloge des *Exercices de géométrie descriptive* du même auteur. Les qualités que j'ai eu le plaisir de constater dans l'ouvrage que je viens de rappeler se retrouvent dans ces trois livres que nous signalons à nos lecteurs en les leur recommandant.

Les *Eléments d'arithmétique* contiennent une foule d'exercices résolus et

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*, année courante, p. 117.

dont le côté pratique nous paraît digne d'être remarqué : les questions de change, d'intérêt, et les approximations numériques sont particulièrement bien développées et avec une grande clarté; mais l'introduction des fractions décimales périodiques ne nous paraît pas faite avec la rigueur nécessaire. Il y a là certainement un point délicat, et nous ne pensons pas qu'il soit possible de l'exposer, en le mettant à l'abri de toute objection, si l'on n'introduit pas l'idée de la progression géométrique indéfiniment décroissante et celle de la limite. Dans l'ancien programme d'arithmétique pour l'admission à l'École Polytechnique, l'étude des progressions arithmétiques et géométriques précédait la recherche de la fraction ordinaire équivalente à une fraction décimale périodique et, en bonne logique, il doit en être ainsi.

Les *Exercices d'arithmétique* complètent le volume précédent; le titre dit assez quel est le but qu'ils se proposent et qu'ils nous paraissent avoir atteint. On y trouvera de nombreux problèmes résolus et aussi la démonstration des principaux théorèmes de l'arithmétique supérieure, notamment ceux de Fermat, d'Euler, de Wilson et de Lamé. Ils contiennent aussi beaucoup de questions théoriques sur la divisibilité, les nombres premiers, les approximations numériques, etc., particulièrement utiles aux candidats aux Écoles.

Les *Éléments de géométrie* sont suivis d'un appendice qui donne à l'ouvrage sa note moderne. La théorie des transversales, les propriétés du rapport anharmonique et des ponctuelles homographiques; les théorèmes de Pascal et de Brianchon, dans le cas du cercle; la transformation par figures inverses, la théorie des axes radicaux, toutes choses qui sont aujourd'hui tombées, et fort heureusement, dans le domaine de l'enseignement secondaire y sont exposés sobrement, mais très clairement. Ces éléments de géométrie se recommandent par leur partie élémentaire aux candidats au baccalauréat et par les développements qui y sont annexés aux élèves qui se destinent à l'École de Saint-Cyr ou aux cours de mathématiques spéciales.

Les dernières pages de ce livre sont consacrées à l'exposition de quelques propriétés saillantes des surfaces du second degré et de quelques courbes remarquables : la spirale d'Archimède, la cycloïde, etc. Enfin, l'avant-dernier chapitre traite de l'évaluation de quelques volumes par la méthode de la sommation et, pour satisfaire à un côté qui n'est jamais perdu de vue dans cette remarquable collection, un dernier chapitre présente des applications pratiques et des exercices numériques nombreux et bien choisis. G. L.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

SESSION DE JUILLET 1885 (Suite) (*).

ACADÉMIE DE PARIS

20 juillet.

La quantité h étant donnée, quelle valeur faut-il donner à k pour que l'inégalité $\frac{(h+1)x^2+hx+h}{x^2+x+1} > k$ ait lieu pour toutes les valeurs positives et négatives de x.

(*) Voyez les autres énoncés de cette session dans le précédent numéro, p. 261.

21 juillet.

1° Volume du segment sphérique.

2° Calculer $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ en fonction des côtés a, b, c du triangle ABC.

22 juillet.

1° Démontrer et définir les propriétés des trièdres supplémentaires.

2° On donne $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = b$, calculer $\sin a$ et $\cos a$.

23 juillet.

1° Déterminer p et q dans le trinôme du 2e degré $x^2 + px + q$, de manière que la valeur *minima* du trinôme soit égale à a et que ce trinôme prenne pour $x = \frac{1}{2}$ la valeur $b + \frac{1}{4}$, a et b désignant des nombres donnés.

2° Démontrer que si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont deux nombres entiers premiers entre eux, la fraction est irréductible.

24 juillet.

1° Prouver que la directrice d'une parabole est le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe des tangentes rectangulaires.

2° Définition du mouvement uniformément varié. Loi de la vitesse. Loi de l'espace dans le cas le plus général où la vitesse n'est pas nulle à l'origine.

25 juillet.

1° Résoudre le système d'équations :

$$\sin x + \sin y = 2a \sin \alpha, \quad \cos x + \cos y = 2a \cos \alpha.$$

a et α étant donnés. — Conditions de possibilité.

2° Volume du tronc de prisme triangulaire.

27 juillet.

1° Partager 88° 21′ 33″ en parties proportionnelles à 3,2, 5,8 et 8,5.

2° Trouver la surface de la zone sphérique dans une sphère de rayon de 6 mètres. A quelle distance du centre de la sphère faut-il mener un plan pour détacher une calotte sphérique dont la surface = le $\frac{1}{3}$ de la sphère entière?

28 juillet.

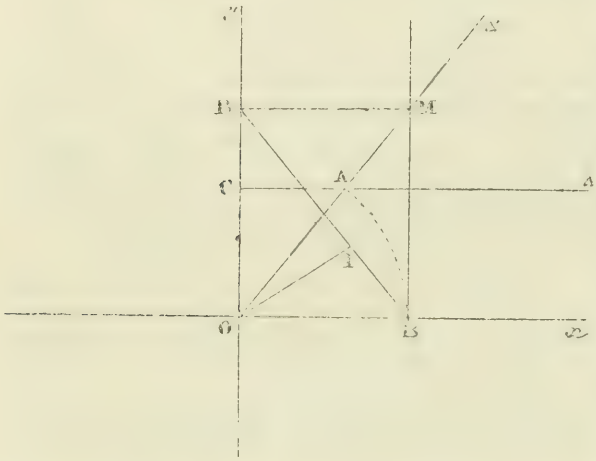
1° Trouver la valeur de $\operatorname{tg} x$ d'après l'équation $\operatorname{tg}^2 x = k \operatorname{tg}(x + a) \operatorname{tg}(x - a)$. discuter la solution et trouver sans table de logarithmes la valeur de x quand $k = 1$.

2° Définir la latitude d'un lieu à la surface de la terre et expliquer comment on arrive à la mesurer.

QUESTION 137

Solution par M. J.-B. Perrin.

On considère deux droites rectangulaires Ox, Oy *et une droite* Δ *parallèle à* Ox. *Par* O *on mène une transversale mobile* Δ′ *qui coupe* Δ *en* A. *De* O, *comme centre, avec* OA *comme rayon on décrit un cercle qui rencontre* Ox *en* B; *par* B, *on mène une parallèle à* Oy *et cette parallèle rencontre* Δ′ *en* M. *Démontrer que si l'on projette* M *sur* Oy *en* B′ *et* O *en* I *sur* BB′, *le lieu du point* I *est une circonférence.* (G. L.)



Soit C le point où Δ coupe Oy.

Les triangles semblables OCA, OB′M donnent $\frac{OC}{OB'} = \frac{OA}{OM}$.

Or, OI étant la hauteur du triangle rectangle OBB′, on a

$$OI = \frac{OB \,.\, OB'}{BB'} = \frac{OA \,.\, OB'}{OM}.$$

En remplaçant $\frac{OA}{OM}$ par $\frac{OC}{OB'}$ il reste

$$OI = OC.$$

Ainsi OI est constant et le lieu du point I est la circonférence de centre O et de rayon OC.

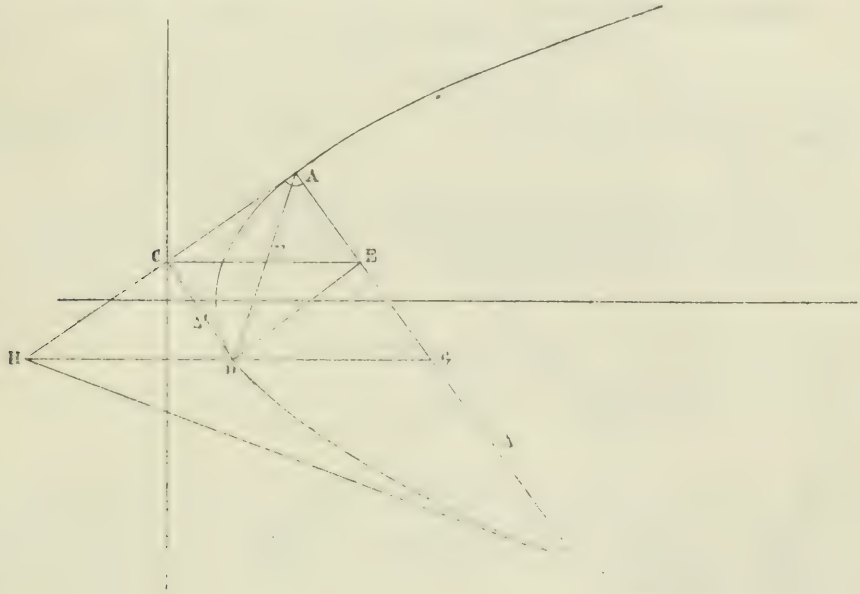
Nota. — Solutions analogues par MM. Voignier, du lycée de Nancy Chapron, à Bar-sur-Aube; A. Teissier, élève au lycée de Nice.

QUESTION 145

Solution par M. E. Mazemann, élève de mathématiques élémentaires au Lycée de Lille (classe de M. Lefebvre).

Démontrer qu'une corde Δ, *normale à une parabole* P, *est égale à quatre fois la portion de tangente* Δ′ *parallèle à* Δ ; *cette portion étant comptée depuis le point de contact jusqu'au point de rencontre de* Δ′ *avec la directrice.* (G. L.)

Soit AB la normale en A; CD la tangente parallèle; la



droite AC est la tangente en A. Du point D, abaissons une perpendiculaire sur AB; le rectangle ACDE donne AD = CE. La diagonale CE, passant par le milieu de la corde des contacts AD, est parallèle à l'axe. D'autre part, joignons le milieu G de AB au point de concours H des tangentes en A et B: cette droite HG est parallèle à l'axe de la parabole et passe par D, puisque CD est une tangente parallèle à la corde AB.

Ainsi CE et DG sont parallèles, et le quadrilatère CDGE est un parallélogramme. On a donc CE = DG; par suite DA = DG. Le triangle ADG est isoscèle et le pied E de la hauteur DE est le milieu de AG; il en résulte que

$$CD = AE = \frac{AG}{2} = \frac{AB}{4}.$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. Louis Simon, au collège Chaptal; Chapron, maitre d'études au collège de Bar-sur-Aube; Th. Caronnet, au collège Chaptal.

QUESTION 152

Solution par M. ÉMILE VIGARIÉ, élève au Lycée Saint-Louis (classe de M. Vintejoux).

Démontrer l'identité

$$\begin{aligned} &x^{4n+2} + y^{4n+2} \\ &= [x^{2n+1} - 2x^{2n-1}y^2 + 2x^{2n-3}y^4 - 2x^{2n-5}y^6 \ldots \pm 2xy^{2n}]^2 \\ &+ [y^{2n+1} - 2y^{2n-1}x^2 + 2y^{2n-3}x - 2y^{2n-5}x^6 \ldots \pm 2yx^{2n}]^2 \end{aligned}$$

(E. Catalan.)

Désignons, pour abréger, les quantités entre crochets par A et B de sorte que

$$x^{4n+2} + y^{4n+2} = A^2 + B^2.$$

On a

$$A^2 = [x^{2n+1} - 2(x^{2n-1}y^2 - x^{2n-3}y^4 + x^{2n-5}y^6 \ldots \mp xy^{2n})]^2.$$

La quantité entre parenthèses est la somme d'une progression géométrique dont le premier terme est $x^{2n-1}y^2$ et la raison $\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)$; par suite

$$A^2 = \left[x^{2n+1} - 2\,\frac{\mp xy^{2n+2} + x^2y^{2n+1}}{x^2 + y^2}\right]^2.$$

On a, de même,

$$B^2 = \left[y^{2n+1} - 2\,\frac{\mp yx^{2n+2} + x^2y^{2n+1}}{x^2 + y^2}\right]^2.$$

De ces égalités on déduit

$$A^2 + B^2 = (x^{4n+2} + y^{4n+2}) = \left(\begin{matrix} x^{4n+2} \\ + y^{4n+2} \end{matrix}\right)$$

$$+\frac{4}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2y^{4n+2}+y^4x^{4n+2}\mp 2x^{2n+2}y^{2n+4} \\ +y^2x^{4n+2}+x^4y^{4n+2}\mp 2y^{2n+2}x^{2n+4}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{4}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}\mp x^{2n+2}y^{2n+2}+y^2x^{4n+2} \\ \mp y^{2n+2}x^{2n+2}+x^2y^{4n+2}\end{pmatrix},$$

ou bien $$x^{4n+2}+y^{4n+2}=\begin{pmatrix} x^{4n+2} \\ +y^{4n+2}\end{pmatrix}$$

$$+\frac{4}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2y^{4n+2}+y^4x^{4n+2}\mp 2x^{2n+2}y^{2n+4} \\ +y^2x^{4n+2}+x^4y^{4n+2}\mp 2y^{2n+2}x^{2n+4}\end{pmatrix}$$

$$-\frac{4}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix}\mp x^{2n+4}y^{2n+2}+y^2x^{4n+4}\mp x^{2n+2}y^{2n+4}+y^4x^{4n+2} \\ \mp y^{2n+4}x^{2n+2}+x^2y^{4n+4}\mp y^{2n+2}x^{2n+4}+x^4y^{4n+2}\end{pmatrix}$$

Les deux derniers termes du second membre sont égaux et de signes contraires et l'on a finalement l'identité évidente :

$$x^{4n+2}+y^{4n+2}=x^{4n+2}+y^{4n+2}.$$

NOTA. — Nous avons reçu une autre solution de M. Chapron, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube. M. Chapron vérifie très simplement l'identité en question en faisant passer dans le second membre les termes x^{4n+2}, y^{4n+2}. L'identité s'écrit alors :

$$(A+x^{2n+1})(A-x^{2n+1})+(B+y^{2n+1})(B-y^{2n+1})=0,$$

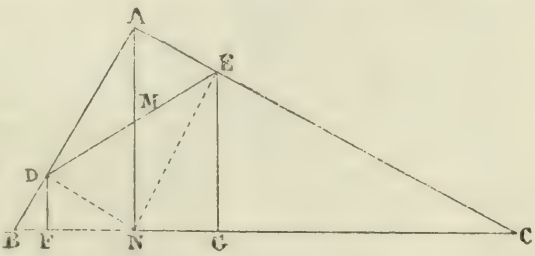
et sous cette forme elle est rendue manifeste quand on a fait la somme des progressions géométriques qui existent dans les diverses parenthèses.

QUESTION 154

Solution par M. G. LAMY, à l'Institution Sainte-Marie (Besançon).

Étant donné un triangle rectangle ABC, *mener une droite antiparallèle à l'hypoténuse* CC *de manière que la partie* DE *comprise entre les côtés de l'angle droit soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points* D *et* E *sur l'hypoténuse.*

Supposons le problème résolu, et soit DE la droite demandée. Du milieu M, de DE, abaissons MN perpendiculaire sur BC ; cette droite passera par le milieu N de FG et sera égale à $\frac{DF+EG}{2}$.



et aussi, d'après l'hypothèse, à DM ou àME. Tirons MA ; le

triangle DMA est un triangle isoscèle, puisque M est le milieu de DE dans le triangle rectangle DAC ; donc l'angle $MD\widehat{A}$, ou l'angle C, est égal à l'angle $M\widehat{A}D$ et, d'après un théorème connu, AM prolongée sera la hauteur issue du sommet A et se confondra avec la perpendiculaire MN.

Ainsi, le quadrilatère ADNE est un rectangle.

De là la construction suivante : par le point N, pied de la hauteur issue du sommet A on mène des perpendiculaires ND et NE sur les côtés de l'angle droit ; DE est la droite demandée.

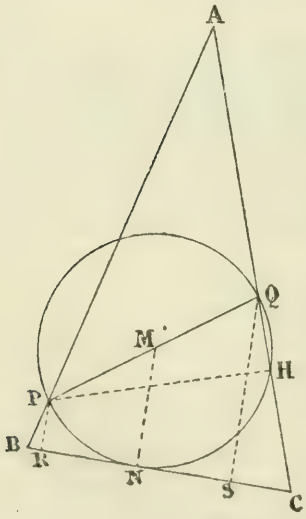
Nota. — Ont résolu la même question : MM. Voignier; Drago, élève au lycée de Marseille; Blessel, conducteur des ponts et chaussées, à Paris; Vigarié, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Vintejoux); H. Pasquet, élève au lycée de Vanves.

QUESTION 155

Solution par M. G. Lamy, élève à l'Institut Sainte-Marie (Besançon).

Par un point P *pris sur le côté* AB *du triangle* ABC, *mener une droite telle que la partie* PQ *comprise entre les côtés* AB *et* AC *soit égale à la somme des perpendiculaires abaissées des points* P *et* Q *sur* BC.

Supposons le problème résolu et que PQ soit la droite demandée. Du point M milieu de PQ abaissons MN perpendiculaire sur BC, cette droite passera par le milieu N de RS, sera égale à $\frac{PR + QS}{2}$ et d'après l'hypothèse à PM et MQ. Le cercle décrit du point M comme centre, avec MP pour rayon, passera par les points P et Q, sera tangent à BC, et coupera le côté AC du triangle en un second point H, pied de la perpendiculaire menée du point P sur BC; ce cercle passe donc par deux points fixes P et H et est tangent à une droite fixe BC. On est ainsi ramené au problème : faire passer par deux points P,



H un cercle tangent à la droite BC. La solution et la discussion de ce problème sont connues; la question proposée est donc résolue.

NOTA. — Autres solutions par MM. Vigarié, élève au lycée Saint-Louis et Auguste Teissier, élève au lycée de Nice. Ces solutions ont le tort de faire intervenir la parabole dans le tracé qu'elles indiquent.

QUESTION 156

Solution par M. **Charles Édouard**, au Lycée de Bar-le-Duc.

Un triangle ABC *est tel que l'on puisse, par le point* A, *mener une sécante* AD, *faisant avec* AB *l'angle* BAD, *tiers de l'angle* BAC, *en même temps que le point* D *détermine sur* BC *un segment* BD, *tiers du côté* BC. *Démontrer que la longueur des côtés vérifie la relation*

$$a^2b^2 = (b^2 - c^2)(b^2 + 8c^2).$$

En effet, dans le triangle ABC on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

puis, en multipliant les deux membres de cette égalité par b^2,

$$a^2b^2 = b^4 + b^2c^2 - 2b^3c \cos A. \qquad (1)$$

Il faut déterminer cos A en fonction de b et de c. Or les deux triangles ABD et ADC ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases; on a donc

$$\frac{\frac{1}{2}AB \,.\, AD \sin \alpha}{\frac{1}{2}AD \,.\, AC \sin 2\alpha} = \frac{1}{2},$$

et

$$\cos \alpha = \frac{c}{b};$$

mais $A = 3\alpha$, d'où $\cos A = \cos 3\alpha$.

Ainsi $\cos 3\alpha$ s'exprime rationnellement en fonction de $\cos \alpha$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

$$\cos A = \frac{4c^3 - 3b^2c}{b^3}.$$

Portant la valeur de cos A dans (1), et simplifiant, il vient

$$a^2b^2 = b^4 + b^2c^2 - 8c^4 + 6b^2c^2,$$

$$a^2b^2 = b^2(b^2 + 8c^2) - c^2(b^2 + 8c^2).$$
$$a^2b^2 = (b^2 - c^2)(b^2 + 8c^2).$$

NOTA. — Solutions analogues par MM. Baudrand, élève à l'institution Sainte-Marie (Besançon); Vigarié, élève au lycée Saint-Louis.

QUESTION 157

Solution par M. F. TARATTE, élève au Lycée Saint-Louis.

On donne un triangle ABC *et une droite qui coupe* BC *en* α, AC *en* β, BA *en* γ; *soit* O *un point du plan et* A′, B′, C′ *les points où* OA, OB, OC *coupent respectivement* BC, AC, AB; *soient :* c_1 *le point ou* A′β *coupe* AB, a_1 *le point ou* B′γ *coupe* BC, b_1 *le point où* C′α *coupe* CA. *Démontrer que les trois droites* Aa_1, Bb_1, Cc_1 *sont concourantes.*

Les transversales $A'c_1$, αb_1, a_1B' donnent dans le triangle ABC :

$$\frac{A'C}{A'B} \times \frac{c_1B}{c_1A} \times \frac{\beta A}{\beta C} = 1,$$
$$\frac{a_1C}{a_1B} \times \frac{\gamma B}{\gamma A} \times \frac{B'A}{B'C} = 1,$$
$$\frac{b_1A}{b_1C} \times \frac{\alpha C}{\alpha B} \times \frac{C'B}{C'A} = 1.$$

En multipliant les égalités membre à membre, il vient

$$\frac{\alpha C}{\alpha B} \times \frac{\gamma B}{\gamma A} \times \frac{\beta A}{\beta C} \times \frac{c_1B}{c_1A} \times \frac{b_1A}{b_1C} \times \frac{a_1C}{a_1B}$$
$$\times \frac{A'C}{A'B} \times \frac{C'B}{C'A} \times \frac{B'A}{B'C} = 1.$$

Or le produit des trois premiers rapports est égal à 1, car il exprime que α, β, γ sont en ligne droite; le rapport des trois derniers est égal à -1, car il exprime que les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes, il reste donc

$$\frac{c_1B}{c_1A} \times \frac{b_1A}{b_1C} \times \frac{a_1C}{a_1B} = -1,$$

ce qui prouve que les droites Aa_1, Bb_1, Cc_1, sont concourantes.

NOTA. — Solutions analogues par MM. Chapron, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube; Vigarié, élève au lycée Saint-Louis; A. Teissier, élève au lycée de Nice; G. Lamy, élève à l'institution Sainte-Marie (Besançon).

QUESTION 164

Solution par M. Giovanni Russo, professeur à l'École technique de Catanzaro (Italie).

Si l, m, n *sont les perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés d'un triangle ; démontrer que l'on a*

$$4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=\frac{abc}{lmn}.$$

En effet, r désignant le rayon du cercle circonscrit, on a

$$al = r^2 \sin 2A;\quad bm = r^2 \sin 2B;\quad cn = r^2 \sin 2C;$$

et
$$r=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

Il en résulte

$$al=\frac{a^2\sin 2A}{4\sin^2 A};\ bm=\frac{b^2\sin 2B}{4\sin^2 B};\ cn=\frac{c^2\sin 2C}{4\sin^2 C};$$

ou :

$$\frac{a}{l}=\frac{4\sin^2 A}{\sin 2A}=2\tang A,$$

$$\frac{b}{m}=\frac{4\sin^2 B}{\sin 2B}=2\tang B,$$

$$\frac{c}{n}=\frac{4\sin^2 C}{\sin 2C}=2\tang C.$$

De là on déduit que

$$\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=2(\tang A+\tang B+\tang C)$$

et
$$\frac{abc}{lmn}=8\tang A\tang B\tang C;$$

mais $A+B+C=\pi$; on a donc par une propriété connue:

$$\tang A+\tang B+\tang C=\tang A\tang B\tang C,$$

ou, finalement,

$$4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=\frac{abc}{lmn}.$$

Nota. — Ont résolu la même question : MM. Chapellier, élève au lycée de Nancy ; L. Brunet, élève au lycée de Rouen ; J. Chapron, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube ; Blessel, conducteur des travaux, à Paris ; Jules Rappe, pensionnat des Frères Maristes, Paris-Plaisance.

QUESTION 165

Solution par M. Giovanni Russo, professeur à l'École technique de Catanzaro (Italie).

ABCP, DEFQ *sont deux circonférences concentriques;* ABC, DEF *sont deux triangles équilatéraux quelconques inscrits dans ces deux circonférences,* P *et* Q *un point pris sur chacune de ces circonférences. Démontrer que l'on a* $QA^2 + QB^2 + QC^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2$.

Je démontrerai d'abord le théorème suivant :

Si l'on a un polygone circonscrit à un cercle et si l'on joint un point P *de son plan avec les points de contact des différents côtés, la somme des carrés des distances, multipliées respectivement par les côtés correspondants, est constante pour tous les points de la circonférence concentrique à la circonférence donnée, ayant pour rayon* PO.

Pour abréger, je suppose $PO = R$ et j'appelle γ le rayon de la circonférence donnée, h_n un des côtés du polygone, P_n son point de contact avec le cercle et d_n la distance PP_n. Alors dans le triangle POP_n j'ai

$$d_n^2 = R^2 + \gamma^2 - 2R\gamma \cos (PO, OP_n).$$

Du centre O je conduis la ligne droite s perpendiculaire à PO; de sorte que les deux lignes droites PO, OP_n étant perpendiculaires : l'une à s, et l'autre à h_n, on a

$$\cos (PO, OP_n) = \cos (h_n, s),$$

par suite

$$d_n^2 = R^2 + \gamma^2 - 2R\gamma \cos (h_n, s),$$

ou

$$d_n^2 \times h_n = (R^2 + \gamma^2)\, h_n - 2R\gamma h \cos (h_n, s).$$

En sommant cette égalité avec les autres que l'on aurait de la même manière, on a

$$\Sigma d_n^2 \times h_n = (R^2 + \gamma^2) \times \Sigma h_n - 2R\gamma \times \Sigma h_n \cos (h_n, s).$$

Or $\Sigma h_n \cos (h_n, s)$ est nul. D'après le théorème des projections, j'ai donc

$$\Sigma d_n^2 \times h_n = (R^2 + \gamma^2) \times \Sigma h_n,$$

et cette égalité demontre le théorème.

Si le polygone est régulier, l'égalité qui précède devient simplement

$$\Sigma d_n^2 = n\,(R^2 + \gamma^2).$$

Dans notre cas on a donc

$$2A^2 + 2B^2 + 2C^2 = PD^2 + PE^2 + PF^2 = 3(R^2 + \gamma^2).$$

NOTA. — Autres solutions par MM. L. Brunet, au lycée de Rouen; Placet, à l'Institution Sainte-Marie à Besançon; Chapron, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube; Drago, lycée de Marseille.

QUESTION 166

Solution par M. H. BROCARD.

Si A, B, C *sont les angles d'un triangle, les angles* λ, μ, ν, *que font entre elles les médianes de ce triangle, sont données par les formules*

$$\left.\begin{aligned} 3\cot\lambda &= \cot A - 2\cot B - 2\cot C \\ 3\cot\mu &= \cot B - 2\cot C - 2\cot A \\ 3\cot\nu &= \cot C - 2\cot A - 2\cot B \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(Hadamard.)

Les longueurs $BG = y$ et $CG = z$ sont les $\frac{2}{3}$ des médianes issues des sommets B et C, et le triangle BGC est le tiers du triangle ABC. On a donc les relations

$$\frac{b^2}{2} + 9\frac{y^2}{2} = a^2 + c^2,$$

$$\frac{c^2}{2} + 9\frac{z^2}{2} = a^2 + b^2,$$

$$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\lambda,$$

$$2S = 3yz\sin\lambda,$$

d'où

$$a^2 = y^2 + z^2 - 4\frac{S}{3}\cot\lambda,$$

et

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \frac{9y^2 + 9z^2 - 9a^2}{4S}$$

$$= \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 - 9a^2}{4S}$$

ou

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 2(a^2 + c^2 - b^2) - 2(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}, \quad (2)$$

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \frac{2bc \cos A - 4ac \cos B - 4ab \cos C}{4S},$$

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \frac{bc \cos A}{bc \sin A} - \frac{2ac \cos B}{ac \cos B} - \frac{2ab \cos C}{ab \cos C},$$

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \operatorname{cotg} A - 2 \operatorname{cotg} B - 2 \operatorname{cotg} C.$$

C. Q. F. D.

L'expression (2) peut s'écrire aussi

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \frac{m^2 - 6a^2}{4S} = \operatorname{cotg} \alpha - \frac{3a^2}{2S},$$

en posant

$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2$$

et

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

L'on a, également,

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \operatorname{cotg} \alpha - 3 \operatorname{cotg} B - 3 \operatorname{cotg} C,$$

$$3 \operatorname{cotg} \lambda = \operatorname{cotg} \alpha - \frac{3a}{H_a},$$

H_a désignant la hauteur issue du sommet A, de sorte que

$$\frac{a}{H_a} = \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$

relation connue. (Voir *Mémoire du Congrès d'Alger*, § 10. et *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1883, p. 169.)

Des équations (1) l'on tirerait pour cotg A, cotg B, cotg C, des équations de même forme :

$$3 \operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg} \lambda - 2 \operatorname{cotg} \mu - 2 \operatorname{cotg} \nu,$$

$$3 \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} \mu - 2 \operatorname{cotg} \nu - 2 \operatorname{cotg} \lambda,$$

$$3 \operatorname{cotg} C = \operatorname{cotg} \nu - 2 \operatorname{cotg} \lambda - 2 \operatorname{cotg} \mu,$$

d'où l'on conclut, comme des précédentes équations,

$$\Sigma \operatorname{cotg} \lambda = - \operatorname{cotg} \alpha = - \Sigma \operatorname{cotg} A,$$

relation rencontrée ici, probablement pour la première fois.

L'expression $\operatorname{cotg} A - 2 \operatorname{cotg} B - 2 \operatorname{cotg} C$ peut s'écrire

$$\frac{\sin B \sin C \cos A - 2 \sin A \sin C \cos B - 2 \sin A \sin B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}$$

ou

$$\frac{\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A - 3 \sin^2 A}{\sin A \sin B \sin C} = \operatorname{cotg} \alpha - \frac{3 \sin A}{\sin B \sin C}.$$

(Voir *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1883, p. 35.)

Remarque. — En nous envoyant la solution précédente, M. Brocard nous fait observer que les relations (1) ne sont pas nouvelles; on les trouve dans les *Questions de trigonométrie rectiligne* par Desboves, 1877, p. 78, n° 20. M. Brocard ajoute :

« Il y a néanmoins intérêt à indiquer la réciprocité observée entre $\operatorname{cotg} \lambda$, $\operatorname{cotg} \mu$, ... et $\operatorname{cotg} A$,... On l'explique facilement en observant avec M. J. Neuberg qu'il existe un triangle dont les côtés sont parallèles et proportionnels aux médianes de ABC et dont les médianes sont parallèles aux côtés de ABC. »

G. L.

Au moment de publier cette solution, M. Brocard nous adresse une autre indication bibliographique qui se rapporte à la même question.

Les médianes forment avec les côtés opposés des angles dont les cotangentes ont une somme nulle (Bermann, *Archives de Grunert*, t. 56, 1874, p. 109) et cette proposition est un cas particulier de la suivante :

Si l'on abaisse, d'un point O, les perpendiculaires OD, OE, OF sur les côtés a, b, c, du triangle ABC, on a

$$\operatorname{cotg} ADC + \operatorname{cetg} BEA + \operatorname{cotg} CFB = 0.$$

(Bretschneider.)

Voir, pour la démonstration, le t. I de la *Nouvelle Correspondance math.* 1875, p. 163.

G. L.

Nota. — La question a été résolue d'une façon analogue, par MM. Chapron, et Anatole Chapellier, élève au lycée de Nancy.

QUESTIONS PROPOSÉES

200. — Du point milieu D du côté BC du triangle ABC on élève la perpendiculaire DEF et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec les deux autres côtés AB, AC aux points F, E. On pose DE $= a$, DF $= b$ et angle ABC $= \alpha$ et on propose de démontrer que la surface du triangle ABC est donnée par la formule

$$\frac{2ab^2 \operatorname{cotg} \alpha}{a+b}.$$

Montrer que si l'angle BAC est droit, alors la surface du triangle est donnée par

$$\frac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}.$$

(Giovanni Russo.)

201. — Une droite AB est partagée par un point variable M en deux segments additifs ou soustractifs; sur chacun des segments on décrit un carré; démontrer que la droite qui joint les centres des carrés enveloppe une parabole. *(A. Boutin.)*

ERRATA. — Page 13; ligne 4, en remontant, au lieu de *Brissonnet*, lisez Bressonnet.

Page 17, dernière ligne, au lieu de *statistique*, lisez « statique ».

Page 34, au bas de la page, les signes (*), (**) doivent être intervertis.

Page 43, ligne 6 de la note, au lieu de *Abnageste*, lisez « Almageste ».

Page 45, lignes 20 et 21, remplacez E par D.

Page 81, avant-dernière ligne, au lieu de 174, lisez 1774.

Page 181, ligne 7, en remontant, au lieu de § 51, lisez, § 52.

N. B. — Cette liste complète le signalement des erratas déjà indiqués pp. 120, 264.

Questions proposées en 1882 et en 1883, mais non résolues ; n° 7, 101, 102.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26856-5.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Arithmétique et Algèbre

Étude élémentaire d'analyse indéterminée, par M. *Ferrent*. 3, 25, 49, 97, 121, 145, 169
Les carrés magiques de Fermat restaurés et publiés sur des documents originaux et inédits, par M. *Ed. Lucas*. . . 104, 130, 148, 176
Maxima et minima, par *J.B.* 248

Géométrie

Nouvelles remarques sur la droite de Simson, par M. *M. d'Ocagne*. . . . 8, 27
Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre, par M. *G. de Longchamps*. 11, 36, 61, 80, 111, 137, 153, 180, 201, 227, 251, 268
Note de géométrie, par M. *Boubals* 31
Note de géométrie, par M. *Vigarié*, 33, 54, 76, 101, 126, 171, 224, 244, 265
Le Pentagone d'*Albert Dürer*. 60
Division d'une droite en moyenne et extrême raison, par M. *E. Bloume*. 73
La construction de la moyenne proportionnelle, par M. *Ed. Bordage*. . . 73
Monographie de la symédiane, par M. *M. d'Ocagne* 173, 193

Pages.

Baccalauréat ès sciences

Montpellier (nov. 1884) . . 19
Toulouse (enseig. sp. 1883). 20
Caen (avril 1885). 161
Grenoble id. 161
Clermont id. 163
Paris id. 164
Rennes id. 237
Nancy id. 238
Poitiers id. 238
Lyon id. 239
Marseille id. 239
Montpellier id. 240
Baccalauréat de l'enseignement spécial. 162
Brevet de capacité scientifique 163
Toulouse (Baccalauréat; avril 1885). 185
Lille id. 186
Caen (juillet 1885) 186
Rennes id. 208
Lille id. 208
Bordeaux id. 235
Lyon id. 237
Paris id. . . 261, 274
Enseignement spécial (août 1885) 236

Questions diverses

Exercices de mathématiques élémentaires, par M. *E. Lemoine*, 51, 125, 198, 217, 241

Mélanges et Correspondance

Extrait d'une lettre de M. *Catalan*, professeur à l'Université de Liège . . 18

Pages.

Extrait d'une lettre de M. *Poujade*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lyon. . . . 19
— de M. *Dufrenoy*; directeur de l'école primaire supérieure d'Amiens 45
— de M. *Chapron*, maître d'études au collège de Bar-sur-Aube. 119
— de M. *John S. Mackay*, professeur à l'Académie d'Edimbourg 158
— de M. *d'Ocagne*, ingénieur 204
— de M. *Em. Lemoine*, ancien élève de l'Ecole polytechnique. 234
— de M. *A. Boutin*, professeur au collège de Vire. 258
Notice biographique sur Bouquet 258

Examens et Concours

Epure du concours de 1885 pour l'admission à l'école spéciale militaire. . . . 156
Ecole navale (1885). . . . 159
Ecole spéciale militaire . . 184
Ecole forestière. . . 184, 235
Concours général (math. élément. 1885) 185
Agrégation (1885). 187
Ecole municipale (1885). . 187
Ecole normale secondaire de Sèvres (Jeunes filles, 1885) 236

Bibliographie

Géométrie descriptive de M. *E. Lebon*, professeur au lycée Charlemagne 91
Premiers éléments d'algèbre, par M. *L. Launay*, professeur au lycée Charlemagne. 188
Cours de Mathématiques élémentaires, par *F. I. C.* . 273

Questions proposées

De 166 à 201

Questions résolues

124, 136, 140, 43, 123, 94, 127, 139, 26, 129, 130, 135, 138, 133, 137, 152, 154, 155, 157, 164, 165, 166, 146.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

AUBRY, *au lycée de Douai*, 21, 47.
BAUDRAND, *élève à l'institution Sainte-Marie*, 282.
BERNHEIM, *élève au lycée de Besançon*, 21.
BLESSEL, *conducteur du service municipal de la Ville de Paris*, 21, 280, 283.
BLOUME (E.), *professeur au lycée de Grenoble*, 73.
BORDAGE (Ed.), *professeur au collège de Nantua*, 75, 120, 192, 213, 216.
BOUBALS, *professeur à l'école du génie à Montpellier*, 31, 71, 95, 168, 192, 216, 240.
BOURGAREL (Paul), *à Antibes*, 21, 23, 46, 213.
BOURGET, *recteur à l'académie de Clermont*, 248.
BOUTIN, *professeur au collège de Vire*, 258, 264, 288.
BROCARD, *capitaine du génie à Montpellier*, 173, 285.
BRUNET, *élève au lycée de Rouen*, 283, 285.
CALINON, *ancien élève à l'école Polytechnique, ingénieur à Pompey* (Meurthe-et-Moselle), 18, 19.
CARONNET, *élève au collège Chaptal*, 215, 278.
CATALAN (E.), *professeur émérite à l'Université de Liège*, 18, 60, 61, 278.
CHAPELLIER, *élève au lycée de Nancy*, 22, 213, 283, 287.
CHAPRON, *maître d'études au collège de Bar-sur-Aube*, 20, 21, 22, 93, 119, 211, 213, 215, 262, 276, 278, 279, 282, 283, 285, 287.
DELPIRON (J.), *au collège Chaptal*, 22.
DESTICKER, *élève au lycée de Douai*, 22.
DRAGO, *élève au lycée de Marseille*, 280, 285.
DUFRENOY, *directeur de l'école primaire supérieure d'Amiens*, 45.
EDOUARD (Charles), *élève au lycée de Bar-le-Duc*, 281.
FERRENT, 3, 25, 49, 97, 124, 145, 169.
FITZ-PATRICK, *élève au lycée d'Angoulème*, 20, 46, 47, 95.
GERY (Louis), *élève au pensionnat Saint-Joseph à Toulouse*, 213.
GIAT, *au lycée de Moulins*, 46, 191.
HADAMARD, *élève à l'Ecole normale supérieure*, 23, 285.
HURÉ (J.), *au collège de Montargis*, 22, 167.
LAISANT, *député de la Seine*, 95, 96.
LAMAIN, *élève an lycée Charlemagne* 47.
LAMY, *à l'institution Sainte-Marie*, 279, 280, 282.
LAUNAY, *professeur au lycée Charlemagne*, 188.
LAURENS, *professeur honoraire*, 240.

LAURENT DYE, *au collège d'Embrun*, 20.

LEBOISNE. *lycée du Mans*, 22, 166.

LEBON (E.), *professeur au lycée Charlemagne*, 91, 156.

LEMÈS, *élève au lycée de Toulouse*, 20.

LEMOINE, *ancien élève de l'École Polytechnique*, 51, 55, 57, 58, 76, 77. 101, 102, 125, 127, 128, 173, 198, 217, 234, 241.

LESAGE, *professeur au lycée Charlemagne*, 92.

DE LONGCHAMPS (G.), *professeur au lycée Charlemagne*, 11, 36, 61, 80, 111, 137, 153, 180, 201, 224, 251, 268.

LUCAS (Ed.), *professeur de mathématiques spéciales au lycée. Saint-Louis*, 104, 130, 148, 176

MACKAY (John), *professeur à l'Académie d'Edimbourg*, 158.

MAILLARD (Camille), *élève au collège de Beauvais*. 191.

MAZEMAN, *élève au lycée de Lille*, 22, 215, 277.

MILLOT, *au lycée de Chaumont*, 21, 22.

MOSNOT, *à Thiers*, 45.

NEUBERG, *professeur à l'Université de Liège*, 57, 101, 128, 173, 174.

D'OCAGNE (M.), *ingénieur à Rochefort*, 8, 27, 55, 57, 76, 77, 101, 102, 129, 172, 173, 192, 193, 204, 216.

PASQUET, *élève au lycée de Nantes*, 280.

PERIN (J.-B.), *maître répétiteur au petit lycée de Clermont-Ferrand*, 21, 22, 167, 215, 276.

PLACET. *à l'institution Sainte-Marie, à Besançon*, 285.

POUJADE, *professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lyon*, 19.

PUIG, *au lycée de Montpellier*, 46.

RAPPE (Jules), *pensionnat des Frères Maristes (Paris-Plaisance)*, 283.

RAVEAU, *élève au lycée Charlemagne*, 47.

ROPERT (l'abbé), *professeur au petit séminaire de Guérande*, 92.

RUSSO (Giovanni), *professeur à l'école technique de Catanzaro* (Italie), 283, 284, 288.

SIMON (Louis), *élève au collège Chaptal*, 21, 215, 278.

TARATTE, *élève au lycée d'Evreux*, 21, 282.

TÉISSIER, (A.) *élève au lycée de Nice*, 22, 276, 281, 282.

VIDAL (Raymond), *surnuméraire des contributions directes à Valence*, 22.

VIGARIÉ, *élève à l'école des Mines*, 20, 21, 22, 33, 48, 54, 76, 95, 101, 120, 126, 143, 144, 168, 171, 175, 188, 191, 209, 211, 224, 244, 265, 278, 280, 281, 282.

VIGNERON (Eug.), 167.

VINCENT, *professeur à Vesoul*, 248.

VOIGNIER, *élève au lycée de Nancy*, 22, 167, 215, 276, 280.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 26356-5.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE MM.

J. BOURGET
Recteur de l'Académie de Clermont.

DE LONGCHAMPS
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.

VAZEILLE
Directeur des études
à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

2e SÉRIE
TOME QUATRIÈME
Année 1885.

PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

—

1885

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

THÉORÈMES SUR LES CONIQUES

Par **E. Catalan.**

Ces théorèmes datent de 1848. A cette époque, ils ont été publiés dans un ouvrage lithographié, intitulé : *Application de l'Algèbre à la Géométrie*, épuisé depuis longtemps. En 1852, afin de *prendre date*, je les ai reproduits, sans démonstration, dans les *Nouvelles Annales* (t. XI, p. 173).

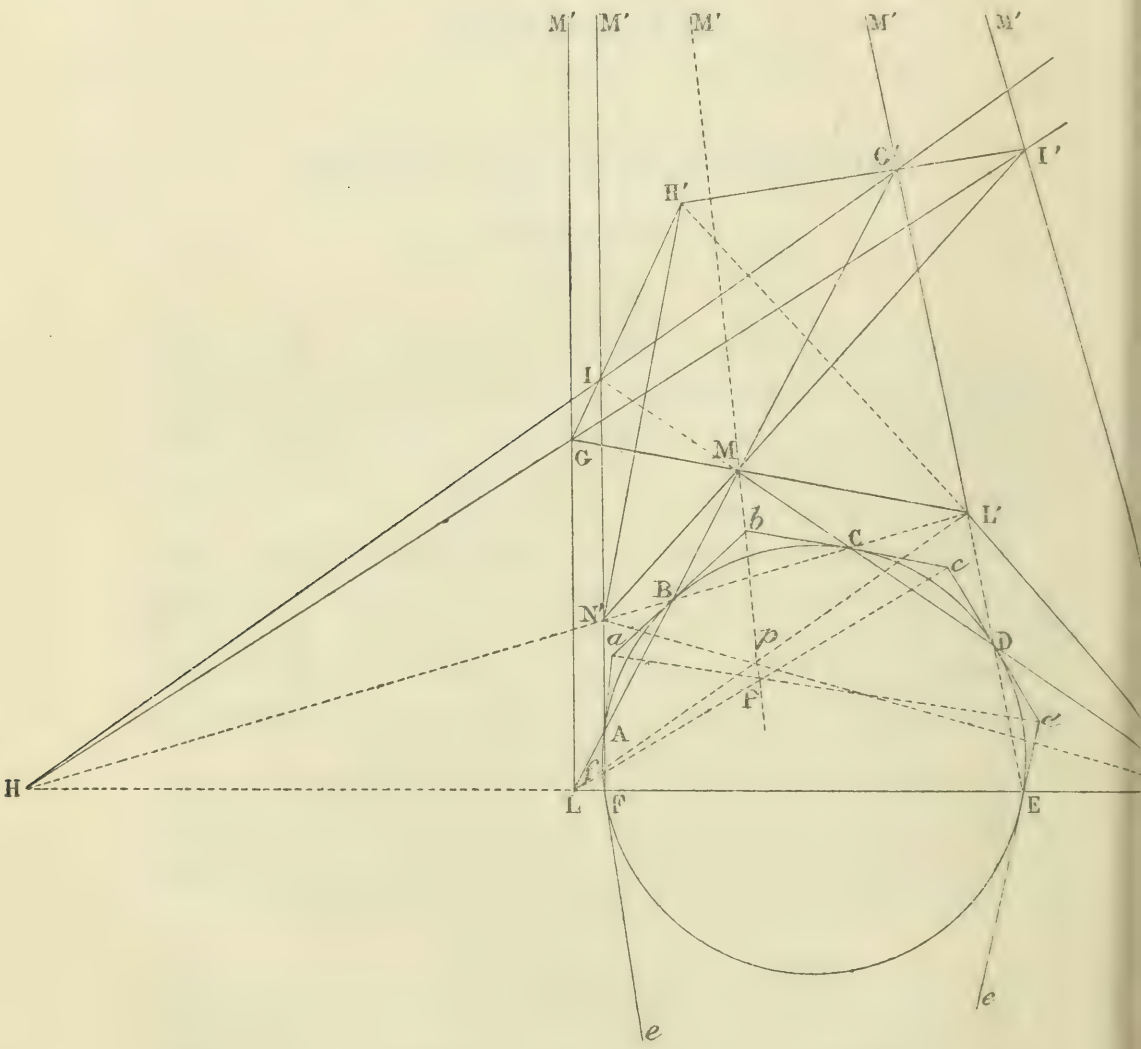
Malgré cette précaution, ils ont été si bien oubliés (même par l'auteur) que M. Folie, mon savant confrère à l'Académie de Belgique, a *réinventé* les deux premiers (*Bulletin de l'Académie*, août 1877, p. 186). Un peu plus tard, M. Folie a spontanément reconnu mes droits (*Restitution de priorité en faveur de M. Catalan. — Bulletin*, octobre 1878).

Les théorèmes dont il s'agit étant intimement liés à ceux de Pascal et de Brianchon, M. de Longchamps a pensé qu'ils pourraient intéresser les élèves ; c'est pourquoi je les publie de nouveau. Puissent-ils en faire découvrir d'autres ! (*)

I. — Soit ABCDEF un hexagone inscrit à une conique C, et dont les côtés se rencontrent en H, G, I. Prolongeons les côtés alternatifs AB, CD, EF : nous obtiendrons un triangle MNL. De même, les côtés BC, DE, FA, prolongés, forment un triangle M'N'L'.

(*) Sauf quelques légères corrections et abréviations, le texte qu'on va lire est conforme au texte primitif.

Les points G, H, I, situés sur une même droite (Th. de Pascal), sont ceux où se coupent les côtés correspondants de ces deux triangles; donc les droites MM′, NN′, LL′ concourent en un même point p (Th. de Desargues); donc aussi, par la réciproque du Théorème de Brianchon, l'hexagone



MM′NN′LL′ est circonscriptible à une certaine conique C′. Ainsi :

Théorème I. — *Les intersections successives des côtés*

alternants d'un hexagone de Pascal sont les sommets successifs d'un hexagone de Brianchon (*).

II. — La réciproque est vraie. Par exemple, les droites MN, L'N', NL,... diagonales de l'hexagone circonscrit ML'NM'LN', forment l'hexagone inscrit ABCDEF. Autrement dit :

Théorème II. — *Les jonctions successives des sommets alternants d'un hexagone de Brianchon sont les côtés successifs d'un hexagone de Pascal.*

III. — Par les sommets de l'hexagone ABCDEF, menons des tangentes à la conique C : nous formerons un hexagone circonscrit, *abcdef*. Considérons, avec celui-ci, l'hexagone ML'NM'LN'. Les points *a*, *c* sont, respectivement, les pôles des cordes AB, CD ; donc le point M, où concourent ces cordes, est le pôle de *ac* (**). De même, M' est le pôle de *df*. Donc MM' est la polaire du point de concours, *s*, des droites *ac*, *df*.

Semblablement, NN' est la polaire du point de concours, *t*, des droites *ce*, *bf*; LL' est la polaire du point de concours, *u*, des droites *db*, *ae*. D'ailleurs, MM', NN', LL' concourent en un même point P; donc *les points* s, t, u *sont situés sur une même droite, polaire de* p.

Les diagonales *ac*, *bd* sont, d'après ce qui a été démontré plus haut, les côtés d'un hexagone inscriptible ; et les points *s*, *t*, *u* sont ceux où concourent les côtés opposés de cet hexagone. En conséquence :

Théorème III. — *Lorsque deux hexagones* H, H' *sont l'un inscrit, l'autre circonscrit à une même conique* C, *de manière que les sommets du premier soient les points de contact*

(*) Comme dans la *Note sur les hexagones de Pascal et de Brianchon* (*Bulletin* décembre 1878), j'adopte, presque textuellement, les énoncés de M. Folie, qui ont le double avantage d'être concis et clairs.

(**) On a omis les droites *ac*, *df*, *be*, pour ne pas trop compliquer la figure.

des côtés du second; l'hexagone de Brianchon, déduit de H (Th. I), *et l'hexagone de Pascal, déduit de* H' (Th. II), *sont polaires réciproquement, relativement à la conique* C.

IV (*). — Voici, je pense, la manière la plus simple de formuler les relations entre les théorèmes de Pascal, de Desargues et de Brianchon :

Dans deux triangles homologiques : 1° les côtés sont ceux d'un hexagone de Pascal ; 2° les sommets sont ceux d'un hexagone de Brianchon.

THÉORÈME D'ALGÈBRE

Par M. **Crètin,** professeur de mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis.

1. — *Soient* F (x, y, z ...) *et* f (x, y, z ...) *deux fonctions entières, la deuxième étant du premier degré par rapport à chacune des variables séparément. Si* F *s'annule chaque fois que* f *est nul, on a*

$$F = fQ,$$

Q étant un polynôme entier.

La démonstration de ce théorème pour le cas d'une seule variable est très facile et bien connue; il me paraît utile de l'exposer pour un nombre quelconque de variables.

Nous l'admettrons pour les variables y, z ... ; et nous allons faire voir qu'il est encore vrai, si l'on introduit une variable de plus, x. Posons

$$F = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m,$$
$$f = ax + b,$$

Faisons la division de ces deux polynômes en ordonnant successivement par rapport aux puissances décroissantes et aux puissances croissantes. Nous serons ainsi conduits aux deux égalités :

(*) *Bulletin de l'Académie de Belgique*, décembre 1878.

$$F = (ax + b)\,Q + \frac{\varphi(y, z \ldots)}{a^{\alpha}},$$

$$F = (b + ax)\,Q' + \frac{x^{m}\psi(y, z \ldots)}{b^{\beta}},$$

φ et ψ désignent des fonctions entières, Q et Q′, des polynômes entiers en x dont les coefficients rationnels ne peuvent contenir en dénominateurs que des puissances de a, pour Q; et des puissances de b, pour Q′.

Donnons à y, z ... des valeurs telles que a et b soient tous deux différents de zéro. Alors F et f seront des polynômes de la seule variable x; le premier par hypothèse s'annulant pour la racine du second, la division se fait exactement. Par conséquent φ et ψ sont nuls. Il existe donc pour chacune des variables y, z ... une infinité de valeurs telles que substituées dans φ et ψ elles donnent pour résultat o. Donc φ et ψ sont nuls identiquement, et l'on a

$$F = (ax + b)Q, \qquad (1)$$

$$F = (b + ax)Q'. \qquad (2)$$

Il s'agit de prouver maintenant que les coefficients du polynôme Q sont entiers. Le premier de ces coefficients est $\frac{A_0}{a}$. Posons :

$$F = (ax + b)\,\frac{A_0}{a}x^{m-1} + F_1, \qquad (3)$$

F_1 étant le premier reste partiel de la division. J'aurai prouvé que $\frac{A_0}{a}$ est entier en démontrant que A_0 s'annule chaque fois que a est nul. — Considérons donc un système de valeurs de y, z ... annulant a, ce système pourra ne pas annuler b; alors l'égalité (2) montre que F est un polynôme de degré $m-1$, donc $A_0 = 0$. Ce système pourra annuler b, alors $ax + b$ étant nul, quel que soit x, il en sera de même de F, et A_0 sera nul.

Il est donc démontré que $\frac{A_0}{a}$ est entier. Mais l'égalité (3) montre que F_1 s'annule, comme F quand $ax + b$ est nul; donc le premier terme du quotient de F_1 par $ax + b$ aura un coefficient entier, et ainsi de suite.

Le théorème est donc démontré.

2. — J'appliquerai ce théorème à la propriété d'invariance du déterminant d'un système de fonctions linéaires homogènes en nombre égal à celui des variables.

Soit le système des trois fonctions :

$$\begin{aligned} f &= ax + by + cZ, \\ f_1 &= a'x + b'y + c'Z, \\ f_2 &= a''x + b''y + c''Z, \end{aligned}$$

dont je désignerai le déterminant par d.

Je fais, dans ces fonctions, la substitution :

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma Z, \\ z &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z, \end{aligned}$$

soit δ le déterminant de cette substitution. On a alors les trois fonctions :

$$\begin{aligned} f &= AX + BY + CZ, \\ f_1 &= A'X + B'Y + C'Z, \\ f_2 &= A''X + B''Y + C''Z, \end{aligned}$$

dont je désignerai le déterminant par D.

D est une fonction des éléments a, b, c..., et α, β, γ.... Si d est nul, il existe une relation entre les fonctions f vérifiée quels que soient x, y, z et par suite quels que soient X, Y, Z. Donc D est nul. De plus d et D sont du même degré par rapport à a, b, c... On a donc

$$D = dQ,$$

et Q est indépendant de a, b, c, etc.

On trouvera Q, comme l'a remarqué M. Walecki, en prenant le cas particulier :

$$f = x, \quad f_1 = y, \quad f_2 = z.$$

Alors $d = 1$, $D = \delta$. Donc $Q = \delta$ et l'on a

$$D = d\delta.$$

C'est la propriété d'invariance.

3. — Cette démonstration fournit celle de la multiplication des déterminants.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} A &= a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' \\ B &= a\beta + b\beta' + c\beta'' \\ C &= a\gamma + b\gamma' + c\gamma'' \\ A' &= a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'', \text{ etc.} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' & , a\beta + b\beta' + c\beta'' & , a\gamma + b\gamma' + c\gamma'' \\ a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha''. & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

C'est la démonstration indiquée dans la première leçon de l'Algèbre de M. Salmon. Le théorème de notre article nous paraît la rendre complètement rigoureuse.

SUR LES TANGENTES

COMMUNES A UN CERCLE ET A UNE PARABOLE

Par M. **Joseph Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

La présente note nous a été suggérée par un théorème intéressant dû à M. Laguerre et démontré par M. Brisse (*). Cette proposition et une foule d'autres du même genre se déduisent, avec la plus grande facilité, d'une même égalité très simple qui est probablement inédite.

1° En exprimant que la perpendiculaire abaissée du centre (α, β) d'un cercle sur une tangente à la parabole est égale au rayon R, on trouve

$$\frac{\beta - m\alpha - \dfrac{p}{2m}}{\pm\sqrt{1 + m^2}} = R, \qquad (1)$$

ou

$$(\alpha^2 - R^2)m^4 - 2\alpha\beta m^3 + (p\alpha + \beta^2 - R^2)m^2 - p\beta m + \frac{1}{4}p^2 = 0. \qquad (2)$$

(*) *Nouvelles Annales*, 1884, p. 388.

Cette équation détermine les coefficients angulaires des tangentes communes aux deux courbes.

On parvient à une équation plus avantageuse en faisant dans la formule (1) les substitutions :

$$m = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

$$\pm \sqrt{1 + m^2} = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi};$$

ce qui donne

$$\frac{p}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \varphi + (R + \beta) \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} \varphi + \left(2\alpha - \frac{p}{2}\right) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi$$
$$+ (R - \beta) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + \frac{p}{4} = 0. \qquad (3)$$

Pour que le premier membre de l'égalité (1) transformée soit positif, il faut prendre pour φ l'angle que fait l'axe des des x positifs avec la partie de la tangente commune qui s'étend à droite ou avec celle qui s'étend à gauche, suivant que cette ligne est tangente commune intérieure ou tangente commune extérieure; d'ailleurs, cet angle doit être compté, comme à l'ordinaire, à partir des x positifs vers les y positifs. Cette convention donne à $\cos \varphi$ le signe qu'il faut attribuer au radical $\sqrt{1 + m^2}$. Il importe de remarquer que deux cercles situés de part et d'autre d'une tangente à la parabole correspondent à deux valeurs de φ qui diffèrent de π, ou à deux valeurs de $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$ qui sont réciproques et de signes contraires.

Les quatre racines de (3) ne dépendent que de trois quantités variables, α, β, R; par suite, il doit exister entre elles une relation. Celle-ci est visiblement

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_3 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_4 = 1. \qquad (4)$$

Telle est la condition *nécessaire* et *suffisante* pour que

quatre tangentes à la parabole enveloppent une même circonférence

2° Désignons par C, C′, C″, C‴, les quatre cercles qui touchent trois tangentes déterminées T_1, T_2, T_3, menées à la parabole, et soient T_4, T'_4, T''_4, T'''_4, les autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à la parabole. Les *paramètres* de T_1, T_2, T_3 sont représentés, respectivement, par

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

$$-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1, \quad -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2, \quad -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3;$$

suivant que ces droites sont considérées avec C, C′, C″ ou C‴; par suite, ceux de T_4, T'_4, T''_4, T'''_4, en vertu de la relation (4), sont

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'_4 = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi''_4 = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_3,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'''_4 = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3.$$

On voit immédiatement que

$$\left(-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_4\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'_4 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi''_4 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'''_4 = 1,$$

$$\left(-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi'_4\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 = 1.$$

Ces égalités ont la même forme que (4). La première indique donc que les droites T_4, T'_4, T''_4, T'''_4 enveloppent un même cercle; de la seconde on conclut qu'il existe un cercle touchant T_4, T'_4 et T_1, le point de contact de T_1 étant le même que celui de la parabole.

D'après cela, on a le théorème suivant :

Étant donnés les quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle et une parabole quelconque inscrite au même triangle : 1° les autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à la parabole enveloppent un même cercle ; 2° deux de ces tangentes et le côté du triangle donné qui touche différemment les cercles correspondant à ces tangentes forment un triangle tel que l'un des cercles inscrits touche ledit côté au même point que la parabole. *(A suivre.)*

PROPRIÉTÉS
DE
L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS
ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

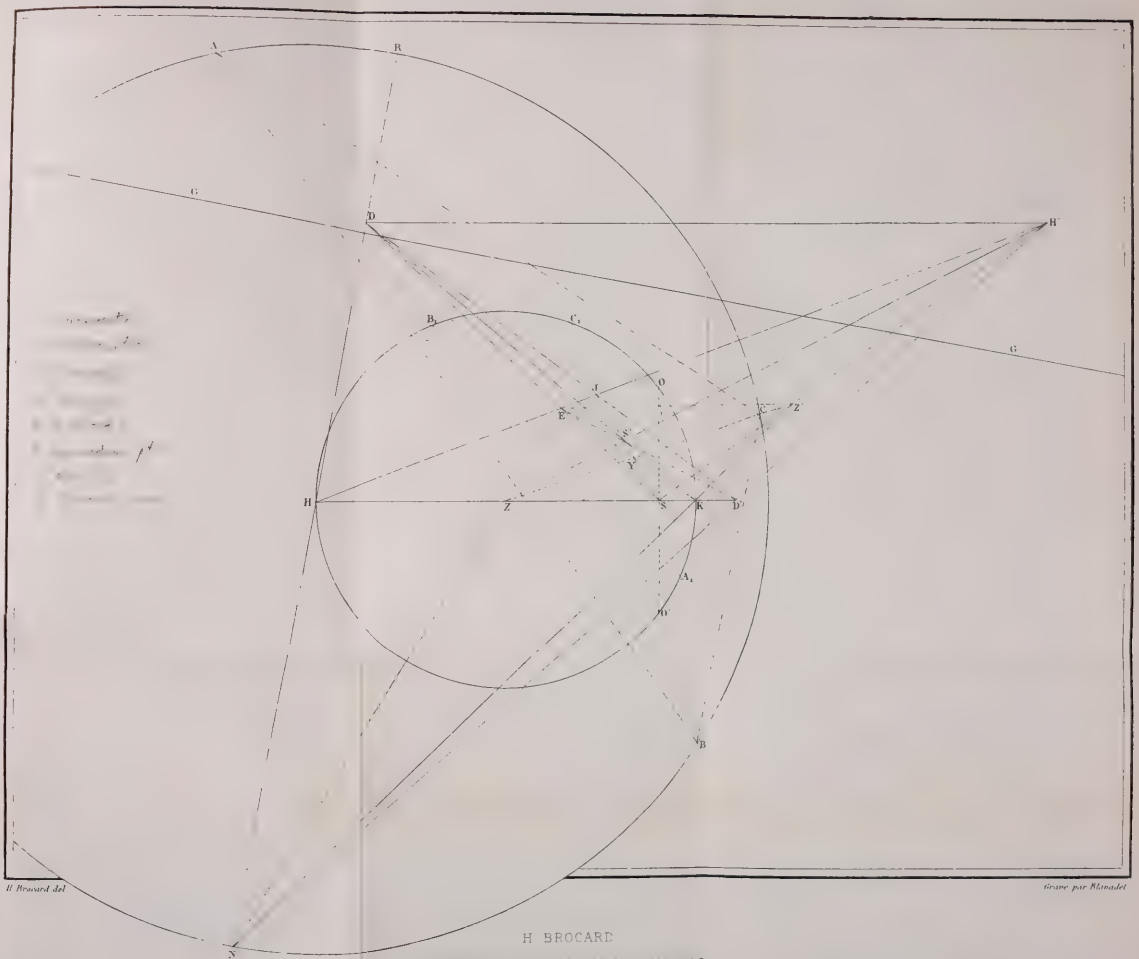
Nota. — Pour faciliter la lecture de la note de M. Brocard, nous rappelons ici les notations employées par ce géomètre dans ses précédents mémoires.

Le triangle donné est désigné par ABC ; la circonférence circonscrite à ce triangle a pour centre H, et RDHN pour un de ses diamètres.

Parmi les points remarquables associés au triangle, il y a lieu de signaler le centre de gravité E; le point H′ de rencontre des hauteurs, ou orthocentre ; le centre des médianes antiparallèles K, ou point de Lemoine ; les points O, O′, ou points de Brocard, définis par les angles égaux (OAB, OBC, OCA), (O′AC, O′BA, O′CB) donnés par la relation

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C;$$

les points A_1, B_1, C_1 d'intersection des droites (OB, O′C) (OC, O′A) (OA, O′B) ; le point S milieu de OO′, situé sur HK diamètre du cercle de Brocard ; Z milieu de HK, centre de ce cercle ; D′ pôle de la corde OO′; D centre homologie des triangles semblables ABC, $A_1B_1C_1$.



H. Brocard del.

Gravé par Blanadet

H BROCARD

NOUVELLES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Les relations de ces divers points sont assez connues pour avoir été étudiées ou indiquées dans les précédents articles du Journal relatifs aux nouvelles propriétés du triangle.

Les couples de points (HH') (EK) (ZZ') (SS') (OO') (DD') correspondent entre eux, par une transformation par droites symétriques.

La conique transformée de la droite HK est alors une hyperbole équilatère passant par neuf points remarquables A, B, C, H', D, E, S', Z', N.

Enfin, la droite HD est perpendiculaire à la droite GG, axe d'homologie des triangles ABC, $A_1B_1C_1$.

Quant aux points J, Y, ils se trouvent respectivement sur les droites (HEH', DD', SS'), (EK, ZZ', SS').

Le présent numéro renferme d'ailleurs la gravure qui correspond aux notations que nous venons de rappeler et qui est gracieusement offerte par l'auteur à nos abonnés.

(G. L.)

1. — J'ai fait connaître dans une notice insérée au *Journal de Mathématiques spéciales* (1884, p. 197-209), la construction et quelques propriétés d'une hyperbole équilatère (Γ) circonscrite et associée au triangle ABC, et qui passe par le centre de gravité et par cinq autres points remarquables du plan.

On peut observer que cette conique se présente dans les conditions suivantes :

Elle est circonscrite au trapèze DEZ'H' dont les deux bases DH', EZ' sont parallèles à HK. (Voir *loc. cit.*, p. 202.)

Son centre W est à l'intersection de la ligne H'D avec la droite f_1f_2 qui joint les milieux des deux bases de trapèze (*).

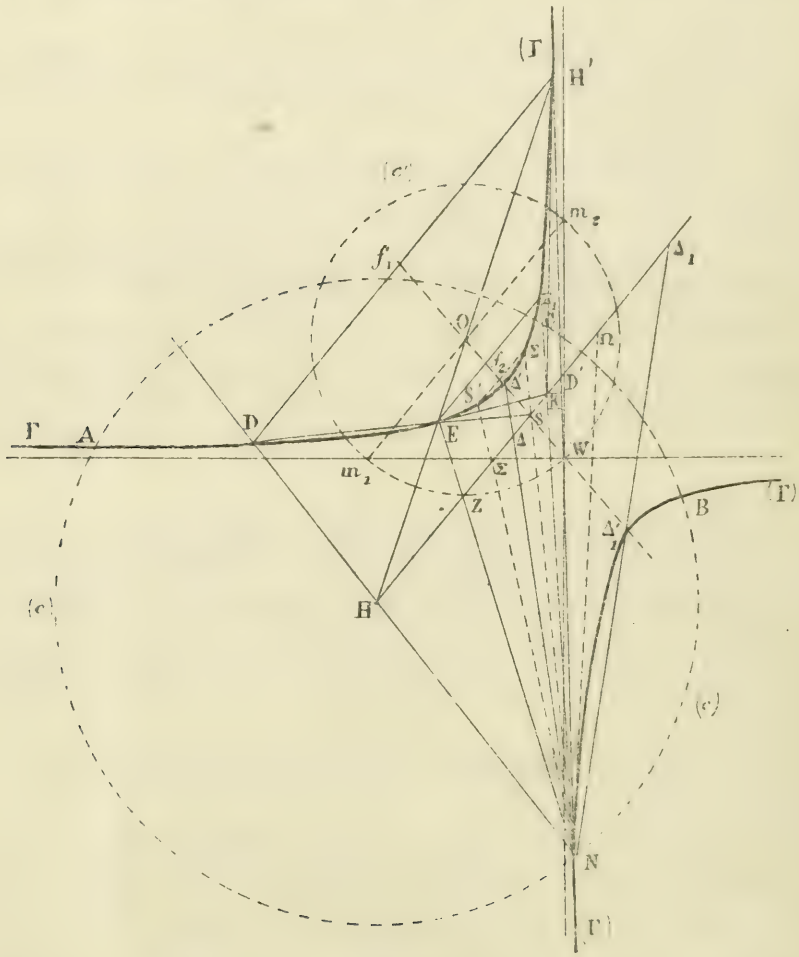
Par définition le centre O du cercle (C') est au milieu de la ligne HH' ou au tiers de la ligne EH'. Mais, d'un autre

(*) Il est intéressant de rappeler que les droites rectangulaires Wm_1 Wm_2 asymptotes de l'hyperbole équilatère (Γ) sont les droites de Simson correspondant aux deux extrémités du diamètre du cercle circonscrit passant par le point K. On sait en effet que les droites de Simson deviennent rectangulaires, quand elles corespondent aux extrémités d'un diamètre.

côté, les coordonnées trilinéaires des points D, O et Z′ vérifient la relation

$$\frac{D - O}{O - Z'} = \frac{3[n^4p^4 + 3n^4b^2c^2 - 2p^4b^2c^2 - n^4a^4 - n^8]}{n^4p^4 + 3n^4b^2c^2 - 2p^4b^2c^2 - n^4a^4 - n^8} = 3,$$

ce qui prouve que le point O est sur DZ′ et divise ce segment de la même manière que EH (*).



Ainsi le centre O du cercle (C′) des neuf points est à l'intersection des diagonales du trapèze DEZ′H′.

(*) Dans tout ce qui suivra, nous adopterons les notations abréviatives déjà proposées :

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad n^4 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2, \quad p^4 = a^4 + b^4 + c^4,$$
$$2P = a + b + c.$$

(Voir, pour cette dernière, *Nouvelles Annales*, t. IX, 1870, p. 377.

La direction f_1f_2 est conjuguée à celle des cordes parallèles DH', EZ' de l'hyperbole (Γ). f_1f_2 passe donc par le point S et par le centre W de cette conique. En outre, $2f_2S = f_1f_2$ (et f_1f_2 est parallèle à HD).

On vérifierait facilement que f_1f_2 passe aussi par le point O. En effet, l'on a

$$f_{1_a} = \frac{S}{a} \cdot \frac{4n^4b^2c^2 + 2a^4n^4 - p^4b^2c^2 - p^4n^4}{n^4(2n - p^4)}$$

$$f_{2_a} = \frac{S}{3a} \cdot \frac{4n^8 - 3p^4n^4 + 2n^4a^4 + p^4b^2c^2}{n^4(2n^4 - p^4)}$$

$$O_a = \frac{S}{a} \cdot \frac{n^4 + a^4 + b^2c^2 - p^4}{2n^4 - p^4}$$

$$\frac{f_1 - O}{O - f_2} = \frac{3(3n^4b^2c^2 + n^4a^4 - n^8 - p^4b^2c^2)}{3n^4b^2c^2 + n^4a^4 - n^8 - p^4b^2c^2} = 3.$$

Ce qui établit la proposition.

Ainsi le point O, milieu de HH', se trouve aussi sur les droites f_1f_2S et DZ'. En d'autres termes, DH' = 2HS, et le milieu du côté Sf_1 du parallélogramme $HDSf_1$ est le centre O du cercle (C'). *(A suivre.)*

NOTE SUR LA TRANSFORMATION RÉCIPROQUE

DE M. DE LONGCHAMPS (*)

Par M. **Maurice d'Ocagne.**

I. — Nous avons démontré dans notre Note *sur l'enveloppe de certaines droites variables* (**) le théorème suivant (p. 256).

Si un segment de droite AA', *dont les extrémités décrivent respectivement les courbes* f *et* F, *est vu d'un point fixe* O' *sous un angle constant, que* O *soit le point où* AA' *touche son enveloppe, et* T *le point de rencontre des tangentes aux courbes* f *et*

(*) Voyez *Journal de Mathématiques spéciales* (1882, p. 49). Les lettres qui sont employées dans cette note se rapportent à la figure 5 (*loc. cit.*, p. 97).

(**) *Nouv. Ann. de Math.* (1883, 3e série, t. II, p. 252). — Cette note comprend une suite qui n'est pas encore publiée, mais qui, je l'espère, le sera prochainement.

F respectivement en A *et* A′, *les droites* O′O *et* O′T *sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle* AO′A′.

Si l'on suppose que l'enveloppe de AA′ se réduise à un point O et que l'angle AO′A′ soit droit, on tombe sur la *transformation réciproque* de M. de Longchamps. On peut donc dire, pour cette transformation, que

Les tangentes en deux points correspondants A *et* A′ *des courbes réciproques* f *et* F *se coupent sur la droite symétrique de l'axe des pôles* OO′ *par rapport à la bissectrice de l'angle* AO′A′.

Ce théorème fournit un moyen simple de construire l'une de ces tangentes quand on connaît l'autre.

II. — Si la courbe *f* est un cercle de centre O′, la courbe F est la courbe d'ombre de la vis à filet triangulaire (*).

Dans ce cas, la tangente AT est perpendiculaire à O′A. Or, si la perpendiculaire élevée en O′ à OO′ coupe AT en H, on a

$$AO'H = A'O'O,$$

ces angles ayant leurs côtés perpendiculaires. Par suite, d'après le théorème précédent,

$$AO'H = TO'A.$$

Ainsi, les triangles rectangles O′AH, O′AT sont égaux et l'on a

$$AH = AT.$$

On trouve ainsi la construction indiquée par Poncelet (Voir Mannheim, *Cours de géométrie descriptive de l'École Polytechnique*, p. 366).

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. **G. de Longchamps.**

La démonstration de M. Walecki sur le théorème fondamental de la théorie des équations : *Toute équation algébrique a une racine*, a profondément troublé l'ordre qui, jusque dans

(*) *Journal* (loc. cit., p. 100).

ces dernières années, présidait au développement des propositions successives de ce grand chapitre de l'algèbre. Nous l'avons introduite dans notre traité d'algèbre, récemment publié ; mais nous avons été un peu surpris (l'ouvrage étant écrit et presque entièrement composé) par l'apparition de cette importante démonstration. Il en est résulté, pour cette partie de notre algèbre, une confusion, au moins apparente. Notre attention a été attirée sur ce point par les observations de plusieurs de nos collègues et aussi par une analyse critique qui vient de paraître en Belgique (*).

Voici, dans ce travail (**), le passage qui vise la démonstration de M. Walecki.

Suivant l'usage, l'auteur débute par la démonstration du théorème fondamental : toute équation a une racine, théorème que l'on appelle, en France, *théorème de d'Alembert*, parce que celui-ci s'est attribué assez naïvement le mérite de l'avoir démontré le premier, en 1746. En réalité, la démonstration de d'Alembert est loin d'être rigoureuse, et il en est de même de celles de Foncenex, d'Euler, de Lagrange et de Laplace, analysées dans les *notes IX et X* de la *Résolution des équations numériques* de Lagrange. C'est Gauss qui le premier, en 1799, puis en 1815 et 1816, a démontré le principe fondamental de l'analyse algébrique et, en bonne justice, on devrait lui donner son nom. La démonstration d'Argand (1806), que Legendre a fait connaître en 1808 en la défigurant et sans en signaler l'auteur, et que Cauchy a améliorée en rendant justice à Argand, n'a été rendue irréprochable qu'en 1877, par M. Lipschitz. La quatrième démonstration de Gauss (1849) est une traduction analytique de celle de 1799. Celle de Cauchy (théorème sur le nombre des points racines dans un contour donné) date de 1831, celle de M. Dutordoir de 1883.

Toutes ces démonstrations contiennent des raisonnements trop subtils ou des calculs trop longs, ou enfin s'appuient sur des théorèmes de calcul intégral trop peu élémentaires pour que l'on puisse les introduire dans les cours d'algèbre des lycées. En 1883, M. Walecki est parvenu à trouver une démonstration vraiment simple du théorème en question, et M. de Longchamps a eu la bonne idée de l'introduire immédiatement dans son livre, avant même que M. Walecki l'eut fait connaître tout au long, dans la livraison de juin 1883 des *Nouvelles Annales de mathématiques*. Malheureusement il n'a pu, pressé par le temps, modifier l'ordre traditionnel des divers chapitres de la théorie des équations. C'est un petit inconvénient qu'il est facile de faire disparaître, en disposant les diverses leçons comme nous allons l'indiquer.

(*) *Analyse critique de l'algèbre de M. G. de Longchamps*, par P. Mansion, professeur à l'université de Gand. — (*Revue des questions scientifiques*, octobre 1884, pp. 559-573.)

(**) Qu'il nous soit permis de profiter de l'occasion qui s'offre à nous, ici, pour remercier M. P. Mansion de l'étude si attentive et si complète qu'il a faite de notre traité d'algèbre ; nous comptons bien tirer profit de plusieurs de ses critiques pour améliorer, par certains points, la future édition de cet ouvrage.

L'ordre que M. Mansion veut bien nous tracer dans la note citée, est, en effet, pris dans son ensemble, celui qui doit être adopté quand on veut exposer la théorie des équations en passant par la démonstration de M. Walecki. Mais, pour éviter toute confusion, et toute apparence de cercle vicieux, il est peut-être utile de préciser, comme nous nous proposons de le faire ici, l'exacte succession des propositions qui se présentent à l'entrée de la théorie des équations.

Dans l'ordre d'idées que soulève la démonstration en question, le titre de la première leçon de la théorie des équations nous paraît être LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE ET LE RÉSULTANT et cette leçon peut être développée dans la forme suivante.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

1. Définition. — On dit que deux polynômes entiers U et V, fonctions de la lettre x, sont premiers entre eux lorsqu'ils n'admettent aucun diviseur commun, fonction de x.

Théorème I. — *Lorsque deux polynômes entiers* U *et* V : *le premier du degré* p, *l'autre du degré* q, *sont premiers entre eux, on peut trouver deux autres polynômes* μ, ν, *tels que l'on ait*

$$\mu U + \nu V = 1,$$

μ *étant du degré* $(q - 1)$, *et* ν *du degré* $(p - 1)$, *tout au plus.*

Supposons, pour fixer les idées, $p \geq q$, et divisons U par V. Nous serons ainsi conduits à l'identité

$$U = VQ_1 + R_1.$$

D'ailleurs, la division qne nous venons d'imaginer ne peut se faire exactement, U et V étant premiers entre eux.

Divisons maintenant V par R_1, nous aurons

$$V = R_1Q_2 + R_2,$$

et ainsi de suite.

Considérons maintenant la suite

$$U, V, R_1, R_2, \ldots \qquad (1)$$

formée par des polynômes dont les degrés vont constamment en diminuant, et observons d'abord que les divisions suc-

cessives que nous venons d'imaginer ne peuvent pas aboutir à une division se faisant exactement.

En effet, si deux restes successifs de la suite (1) : R_{k-2}, R_{k-1}, divisés l'un par l'autre, donnaient un reste nul, l'identité

$$R_{k-3} = R_{k-2} Q_{k-1} + R_{k-1},$$

précédemment obtenue, prouverait que R_{k-3} serait, lui aussi, exactement divisible par R_{k-1}. En remontant ainsi, de proche en proche, dans la suite (1), on arriverait à cette conséquence, contraire à l'hypothèse que nous avons faite, que U et V admettraient un diviseur commun R_{k-1}.

Ainsi, la suite (1) est formée par des polynômes entiers dont les degrés vont sans cesse en diminuant ; d'ailleurs, ils sont obtenus par des divisions successives qui ne se font jamais exactement. On aboutit donc à un dernier terme R_k représentant une constante *différente de zéro* et ces calculs donnent lieu au tableau suivant :

$$U = VQ_1 + R_1,$$
$$V = R_1 Q_2, + R_2.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{k-2} = R_{k-1} Q_k + R_k.$$

La première de ces égalités donne, pour R_1, la forme algébrique $U - VQ_1$. En portant cette expression dans la seconde égalité, on voit que R_2, puis R_3, etc., peuvent s'écrire identiquement sous la forme algébrique $\alpha U + \beta V$; α et β étant des polynômes entiers. Cette observation s'appliquant à R_k, on a donc

$$R_k = \alpha U + \beta V.$$

En divisant par R_k, qui n'est pas nul, et en posant

$$\mu = \frac{\alpha}{R_k}, \quad \nu = \frac{\beta}{R_k},$$

on trouve

$$\mu U + \nu V = 1. \qquad \text{(A)}$$

Si l'on suivait avec attention la formation des facteurs α, β, dans l'expression des restes R_1, R_2... sous la forme $\alpha U + \beta V$, on verrait, mais non sans un certain effort, que la méthode que nous venons d'exposer et qui conduit à l'identité (A), donne bien, conformément à l'énoncé, des

facteurs μ, ν, dont les degrés respectifs sont, tout au plus, $q - 1$ et $p - 1$.

Mais on peut éviter, sinon ces difficultés, du moins ces explications un peu longues et fixer complètement la démonstration, par la remarque suivante.

Si l'on suppose que μ et ν n'aient pas, comme le veut l'énoncé de la proposition en question, des degrés respectifs, égaux ou inférieurs aux nombres $q - 1$ et $p - 1$, alors, on peut diviser μ et ν, respectivement par V et U, et l'on a

$$\mu = V\lambda + \mu', \tag{2}$$

$$\nu = U\lambda' + \nu'. \tag{3}$$

D'après cela, l'identité (A) peut s'écrire

$$UV(\lambda + \lambda') + \mu'U + \nu'V = 1.$$

Dans cette identité, la partie $UV(\lambda + \lambda')$ renferme les termes d'un degré supérieur à tous les autres et au moins égal à $p + q$, si l'on ne suppose pas $\lambda + \lambda' = 0$. Or la présence de ce terme ne peut être admise, l'autre partie : $\mu'U + \nu'V - 1$ n'ayant, pour des raisons évidentes, que des termes dont le degré est, tout au plus, égal à $p + q - 1$.

Ainsi l'on doit supposer

$$\lambda + \lambda' = 0,$$

et l'on a, d'après cela,

$$\mu'U + \nu'V = 1;$$

μ' et ν' ayant, vu les identités (2) et (3), des degrés respectivement égaux ou inférieurs à $q - 1$ et à $p - 1$.

Remarque. — La réciproque de la proposition fondamentale que nous venons d'établir est évidente. Si l'on a

$$\mu U + \nu V = 1,$$

U et V sont deux polynômes premiers entre eux. En effet, si l'on avait $U = U_1D$, $V = V_1D$, on aurait donc

$$D(\mu U_1 + \nu V_1) = 1,$$

inégalité manifestement impossible, si D n'est pas une constante. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Amigues, professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Marseille.

Dans les cours de mathématiques spéciales, on donne le théorème suivant :

Si a *et* b *sont deux racines réelles consécutives de l'équation* $f'(x) = 0$, *et si la fonction* $f(x)$ *et sa dérivée sont continues de* a *à* b, *l'équation* $f(x) = 0$ *admet au plus une racine réelle, comprise entre* a *et* b.

Ce théorème est connu sous le nom de *réciproque du théorème de Rolle*, et sa démonstration se déduit en effet de ce dernier.

Il est exact, bien entendu. Mais il a de nombreux défauts.

1° Son application suppose que les racines de la dérivée sont connues.

2° Il laisse entendre qu'il faut s'arrêter à toutes les racines réelles de la dérivée, tandis qu'on peut négliger les racines paires.

3° Il suppose, par la démonstration adoptée, que la dérivée reste continue entre a et b.

J'ai toujours donné, de préférence, le théorème suivant.

La fonction $f(x)$ *étant continue entre deux nombres quelconques* a *et* b, *la dérivée ne changeant pas de signe dans cet intervalle, l'équation* $f(x) = 0$ *admet, au plus, une racine réelle entre* a *et* b.

En effet, de a à b, la fonction est toujours croissante ou toujours décroissante, et par suite ne peut être nulle qu'une fois.

Pour l'application, les valeurs importantes sont : 1° celles qui rendent la fonction $f(x)$ discontinue ; 2° celles qui rendent la dérivée infinie et la font en outre changer de signe ; 3° les racines impaires de l'équation $f'(x) = 0$. Mais toutes ces valeurs ne sont nécessaires que pour faire une étude complète, et le théorème ci-dessus peut être utile dans d'autres conditions.

Il est bon d'observer que la racine unique, comprise entre a et b, peut être multiple ; mais, en ce cas, elle est d'ordre impair, en définissant, comme d'habitude, les racines paires

et impaires des équations qui ne sont pas algébriques et entières.

Enfin, les nombres tels que a et b peuvent être racines de l'équation $f(x) = 0$, indépendamment de la racine qui peut être comprise entre a et b.

QUESTIONS D'EXAMENS (*)

1. — *Résoudre l'équation*

$$x^6 + 1 = 0.$$

On observe que l'on a

$$(x^6 + 1) = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1),$$

ou

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1).$$

Les six racines de l'équation sont, d'après cette remarque,

$$x_1 = i, \quad x_2 = -i; \quad x_3 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad x_4 = \frac{\sqrt{3} - i}{2};$$

$$x_5 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad x_6 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}.$$

2. — *Résoudre l'équation*

$$x^6 - 1 = 0. \qquad (1)$$

(*) Sous ce titre, nous ferons paraître dans ce journal, d'une façon continue, des questions offrant un intérêt particulier pour les élèves de mathématiques spéciales.

Les exercices que nous proposons ici, ceux que nous donnerons ensuite, dans les mêmes conditions, n'offrent pas assez de difficultés pour qu'il soit utile de présenter leur solution avec tous les détails qu'elle peut comporter. Une indication rapide sur la marche que l'on peut adopter, un renseignement sur le résultat auquel il faut aboutir, suffisent, dans ces problèmes simples, à provoquer immédiatement la solution et à vérifier celle-ci.

Le plus souvent, ces exercices seront choisis dans les questions posées aux examens oraux de l'Ecole Polytechnique. Nous y ajouterons aussi quelques sujets d'un genre analogue, et toujours dans les conditions que nous venons de préciser ; mais ceux-ci, pour les distinguer des précédents, seront accompagnés d'un astérisque.

Nous dirons, à ce propos, combien nous recevrons avec reconnaissance le signalement des inexactitudes qui pourraient nous échapper dans l'indication des solutions et des résultats ; et, pareillement, celui des fautes typographiques. Ces errata divers, que nous nous efforcerons de rendre aussi rares qu'il nous sera possible, seront publiés, dans le numéro de décembre, en même temps que la table des matières. G. L.

L'identité

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1),$$

peut s'écrire encore,

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

On déduit de cette décomposition les six racines de l'équation (1) proposée.

On peut observer que ces deux questions rentrent l'une dans l'autre, en posant

$$x = iX.$$

3. — *Soient* a, b, c *les trois racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0.$$

On propose de calculer U,

$$U = \Sigma \frac{a^2}{(b + 1)(c + 1)}.$$

On peut observer d'abord que

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = p + 1 - q;$$

d'après cela, on a

$$\frac{a^2}{(b + 1)(c + 1)} = \frac{a^2(a + 1)}{p + 1 - q}.$$

On trouve, finalement,

$$U = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2}{p + 1 - q}.$$

Le résultat cherché est donné par la formule

$$U = \frac{2p + 3q}{q - p - 1}.$$

4. — *Reconnaître que l'unité est une racine double de l'équation*

$$(n - 1)(x^n + 1) - 2x(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1) = 0. \quad (1)$$

Cette équation est visiblement vérifiée par $x = 1$, et l'on peut démontrer facilement qu'en divisant le premier membre par $x^2 - 2x + 1$, on est conduit à un quotient exact.

Il est plus simple d'observer, qu'en introduisant *une fois* la racine $x = 1$, on a

$$(n - 1)(x^n + 1)(x - 1) - 2x(x^{n-1} - 1) = 0. \quad (2)$$

En prenant *deux fois* la dérivée du premier membre de cette équation, on trouve :

$$(n^2 - 1)x^{n-2}(x - 1) = 0.$$

Cette dernière égalité prouve que $x = 1$, est une racine double de l'équation proposée.

On peut aussi, bien entendu, vérifier la propriété énoncée en constatant directement, 1° que $x = 1$ est une racine de l'équation (1); 2° que $x = 1$ est une racine simple de l'équation dérivée.

La forme (2) permet d'étudier l'équation donnée au point de vue de la réalité de ses racines. Le théorème des lacunes trouve ici une application évidente. *(A suivre.)*

NOTA. — Nous avons reçu des solutions :

De la question 88, par M. Hugon, à Poligny;

De la question 94, par MM. Bèche, professeur à l'école normale de Tulle; Taratte, élève au lycée Saint-Louis; H. Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay); Giat, élève au lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas) :

De la question 76, par M. Ed. Simonot, élève à la faculté libre de Lyon;

De la question 89, par M. Giat;

De la question 97, par MM. Fervalle; Taratte. (La solution de M. Taratte est purement géométrique et d'une grande élégance).

AVIS

Nous rappelons à nos lecteurs que les solutions qu'ils nous adressent doivent porter en tête :

Le numéro de la question;

Le nom de l'auteur de la solution, ainsi que l'établissement auquel il appartient;

L'énoncé complet et souligné de la question proposée.

De plus, s'il y a des figures, celles-ci doivent être faites avec beaucoup de soin et sur des feuilles à part.

Enfin, nous prions nos lecteurs de mettre les diverses questions sur des feuilles séparées, et en n'écrivant que d'un seul côté, pour faciliter le classement des solutions, et éviter des oublis ou des erreurs.

Ces solutions, sans aucun avis d'envoi, peuvent être adressées sous bande ou sous enveloppe ouverte.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 1376-5.

SUR LES TANGENTES

COMMUNES A UN CERCLE ET A UNE PARABOLE

Par M. **Joseph Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

(*Suite*, voir p. 9.)

3° Lorsque trois des tangentes communes à deux coniques coïncident, les deux courbes ont entre elles un contact du deuxième ordre sur cette tangente. Donc si $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1$ est le paramètre de la tangente T_1 au point de contact de la parabole et d'un cercle osculateur, et que $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2$ soit celui de la seconde tangente T_2 commune à ces courbes, on a la relation

$$\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 = 1, \text{ ou } \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 = \sqrt[3]{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2},$$

qui détermine trois valeurs de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1$ (dont deux imaginaires), lorsque $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2$ est donné. Soient $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1'$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1''$ ces valeurs; on trouve aisément

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1' \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1'' \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 = 1.$$

Ainsi *on peut construire trois cercles osculateurs d'une parabole, qui touchent une tangente à cette courbe : cette tangente et les tangentes au point d'osculation touchent un même cercle.* (Laguerre.)

Pour préciser la position de ce cercle, il suffit d'identifier l'équation (3) avec la suivante :

$$\left(\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\varphi - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2\right)\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2\right) = 0,$$

qui a pour racines

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1,\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1',\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1'',\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2.$$

On trouve ainsi

$$R + \beta = \frac{p}{4} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2, \quad \alpha = \frac{p}{4}, \quad R - \beta = \frac{p}{4} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varphi_2,$$

$$R^2 - \beta^2 = \frac{p^2}{16} = \alpha^2, \qquad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0:$$

d'où l'on conclut que *le cercle passe par le sommet et par le foyer de la parabole.*

4° Pour abréger le langage, nous appellerons maintenant *concycliques* quatre tangentes à un cercle.

Le théorème suivant, dont la démonstration résulte immédiatement de ce qui précède, a quelque analogie avec celui de M. Laguerre :

Étant donnée une parabole : 1° les quatre tangentes aux points d'osculation des cercles osculateurs qui touchent quatre tangentes concycliques à la parabole sont également concycliques ; 2° réciproquement, si l'on construit les cercles osculateurs aux points de contact de quatre tangentes concycliques, les autres tangentes communes à ces cercles et à la parabole sont encore concycliques.

5° La condition pour que quatre tangentes à la parabole soient concycliques étant mise sous la forme

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 \left(- \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_3 \right) \left(- \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_4 \right) = 1,$$

on peut énoncer le théorème suivant :

Si quatre tangentes à la parabole sont concycliques, deux de ces lignes et les symétriques des deux autres par rapport à l'axe de la parabole sont également concycliques.

Voici encore une autre proposition assez curieuse :

Si l'on inscrit deux cercles dans un même angle circonscrit à une parabole, les quatre autres tangentes communes aux deux cercles et à la parabole enveloppent un même cercle.

En effet, par hypothèse, on a deux relations de la forme

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_4 = 1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_3' \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_4' = 1;$$

il en résulte :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_3 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_4 \left(- \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varphi_3' \right) \left(- \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varphi_4 \right) = 1.$$

Lorsqu'un cercle touche la parabole, deux des tangentes communes coïncident, et la relation (4) devient

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2 \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi_3 = 1.$$

Elle détermine deux valeurs de $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3$ égales et de signes contraires, et le produit de ces valeurs, multiplié par $\left(-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_2$ est égal à l'unité. Par conséquent :

Étant données deux tangentes à la parabole, on peut décrire deux cercles qui touchent ces droites et la courbe; les points où ils touchent la parabole sont symétriques par rapport à l'axe; les tangentes en ces points, l'une des tangentes données et la symétrique de l'autre par rapport à l'axe forment un système concyclique.

6° Si l'on considère la suite des cercles inscrits entre deux tangentes déterminées T_1, T_2 à la parabole, on peut se proposer de déterminer le lieu du point d'intersection M des deux autres tangentes T_3, T_4 menées à l'un de ces cercles et à la parabole.

Cela revient à chercher le lieu des points M tels que les tangentes T_3, T_4 menées de M à la parabole vérifient l'équation

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi_2 = K, \quad (5)$$

K étant une constante.

Les deux cercles qui touchent les droites T_3, T_4 et la parabole, touchent celle-ci en deux points fixes N, N'; car le paramètre de la tangente menée en N ou N' se détermine par l'équation

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 \operatorname{tg}\frac{1}{2} = 1.$$

Le problème énoncé ci-dessus est donc identique à une question célèbre posée par Chasles à un concours général de France :

Un cercle variable touche une conique donnée en un point fixe; trouver le lieu du point de rencontre des tangentes communes à ce cercle et à la conique.

Traitons le problème par le calcul. Les paramètres des tan-

gentes issues du point $M(\alpha, \beta)$ sont les racines de l'équation (3), dans laquelle on fait $R = 0$; ils vérifient donc l'égalité

$$\frac{p}{4}\operatorname{tg}^4\frac{1}{2}\varphi + \beta\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\varphi + \left(2\alpha - \frac{p}{2}\right)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi$$
$$- \beta\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{p}{4} = 0.$$

On constate facilement que les solutions de celle-ci sont, deux à deux, réciproques et de signes contraires, circonstance dont l'explication n'est pas difficile. L'équation précédente est donc de la forme

$$\left[\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi - \left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi - 1\right]$$
$$\left[\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi - \left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4}\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi - 1\right] = 0.$$

En identifiant et en tenant compte de la condition (5), on trouve

$$-\frac{4\beta}{p} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4 - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3} - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{K}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4\right),$$
$$\frac{8\alpha - 2p}{p} = K + \frac{1}{K} - \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4\right)^2}{K}.$$

Il reste à éliminer $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_3 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_4$ entre ces égalités. Le lieu est une parabole homofocale à la proposée.

On peut aussi rattacher la solution du problème que nous venons de résoudre, à l'équation (2). A cet effet, cherchons la condition nécessaire pour que les tangentes menées de deux points $M(x, y)$ et $N(x_1, y_1)$ soient concycliques. Les coefficients angulaires de ces droites sont les racines de

$$\left(m^2x - my + \frac{p}{2}\right)\left(m^2x_1 - my_1 + \frac{p}{2}\right) = 0.$$

En identifiant cette équation avec (2), on trouve

$$\alpha^2 - R^2 = xx_1, \qquad 2\alpha\beta = xy_1 + x_1y,$$

$$p\alpha + \beta^2 - R^2 = yy_1 + \frac{p}{2}(x + x_1), \quad \beta = \frac{y + y_1}{2}.$$

Entre ces égalités, il faut éliminer α, β, R. On a d'abord

$$\beta = \frac{y + y_1}{2}, \qquad \alpha = \frac{xy_1 + x_1y}{y + y_1},$$

$$R^2 = \alpha^2 - xx_1 = \frac{(x - x_1)(xy_1^2 - x_1y^2)}{(y + y_1)^2},$$

$$\beta^2 - yy_1 = \frac{(y - y_1)^2}{4};$$

par suite, la relation cherchée est

$$p\,\frac{xy_1 + x_1y}{y + y_1} + \frac{(y - y_1)^2}{4} - \frac{(x - x_1)\,(xy_1^2 - x_1y^2)}{(y + y_1)^2}$$

$$- \frac{p}{2}(x + x_1) = 0,$$

ou

$$(y^2 - y_1^2)^2 - 2p(x - x_1)(y^2 - y_1^2) - 4(x - x_1)(xy_1^2 - x_1y^2) = 0.$$

En observant que

$$xy_1^2 - x_1y^2 = (x - x_1)y_1^2 - x_1(y^2 - y_1^2),$$

on peut lui donner la forme

$$(y^2 - y_1^2)^2 + 4(x - x_1)(x_1 - \frac{1}{2}p)(y^2 - y_1^2) - 4y_1^2(x - x_1)^2 = 0;$$

d'où l'on déduit

$$y^2 - y_1^2 = -2(x - x_1)(x_1 - \frac{1}{2}p)$$

$$\pm 2(x - x_1)\sqrt{y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}p)^2}. \qquad (6)$$

Si l'on suppose le point N fixe, le point M décrit deux paraboles qui correspondent, respectivement, aux deux suites de cercles touchant les tangentes menées du point fixe. L'équation (6), après quelques transformations faciles, devient

$$y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2 = \left[x - x_1 \pm \sqrt{y_1^2 + (x_1 - \frac{1}{2}p)^2}\right]$$

et montre que les paraboles du lieu sont homofocales à la parabole donnée et passent par le point (x_1, y_1).

(A suivre.)

PROPRIÉTÉS
DE
L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS
ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 12.)

2. — L'équation de l'hyperbole (Γ) peut s'obtenir aisément (*).

Cette conique est circonscrite au triangle. Son équation est donc de la forme

$$L\beta\gamma + M\alpha\gamma + N\alpha\beta = 0.$$

Elle passe par les points E et D. On a donc

$$La + Mb + Nc = 0, \quad La^3 + Mb^3 + Nc^3 = 0.$$

L'équation de la conique devient, par conséquent,

$$(b^2 - c^2)bc\beta\gamma + (c^2 - a^2)ac\alpha\gamma + (a^2 - b^2)\, ab\alpha\beta = 0. \quad (1)$$

On peut vérifier que cette conique passe bien par l'orthocentre H'

$$\alpha \cos A = \beta \cos B = \gamma \cos C,$$

condition d'ailleurs surabondante, car la conique passe déjà par cinq points A, B, C, E, D, et doit coïncider avec l'hyperbole équilatère (Γ), qui se trouve donc entièrement déterminée.

Le centre de la conique (1) serait donné par les équations

$$\frac{F'\alpha_0}{a} = \frac{F'\beta_0}{b} = \frac{F'\gamma_0}{c}$$

ou

$$(c^2 - a^2)c\gamma + (a^2 - b^2)b\beta = (b^2 - c^2)c\gamma + (a^2 - b^2)a\alpha$$
$$= (b^2 - c^2)b\beta + (c^2 - a^2)a\alpha,$$

qui ne semblent pas devoir conduire à un résultat simple.

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure du numéro de janvier (p. 14).

On peut acquérir, au contraire, une notion plus complète des tangentes à l'hyperbole (Γ).

3. — La polaire du point $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ a pour équation

$$\alpha F'\alpha_0 + \beta F'\beta_0 + \gamma F'\gamma_0 = 0.$$

La polaire du point K $\left(\frac{\alpha_0}{a} = \frac{\beta_0}{b} = \frac{\gamma_0}{c}\right)$ a donc pour équation

$$a\alpha[c^4 - b^4 + a^2b^2 - a^2c^2] + b\beta[a^4 - c^4 + b^2c^2 - a^2b^2]$$
$$+ c\gamma[b^4 - a^4 + a^2c^2 - c^2b^2] = 0.$$

Mais cette équation est vérifiée par les coordonnées des points H, E, H', et représente la droite HEH'. On en conclut que la tangente au point E est EK; la tangente au point H', H'K. Le point K, centre des médianes antiparallèles ou point de Lemoine, est donc le pôle de la corde EH'.

D'autre part, la polaire du point S de concours des côtés ED, Z'H' du trapèze DEZ'H' est, par construction, la parallèle à DH' menée par le point d'intersection O des diagonales DZ', EH'. Cette polaire est donc la droite m_1m_2.

Nous venons de voir que EH' est la polaire du point K. Mais cette droite EH' passe aussi par le point O. Ce point, autrement dit, le centre du cercle (C') des neuf points, est donc le pôle de la droite HK par rapport à l'hyperbole équilatère (Γ).

La tangente en N à l'hyperbole est parallèle à H'K, le point N étant, en effet, diamétralement opposé sur la courbe au point H'. Cette tangente en N rencontre HK en un point Ω.

4. — Si maintenant l'on cherchait les coordonnées trilinéaires du point N, voici comment on pourrait les évaluer.

L'hyperbole (Γ) rencontre le cercle circonscrit au triangle aux quatre points A, B, C, N. Les coordonnées des sommets A, B, C du triangle sont connues; celles du point N se déduiront donc immédiatement de la combinaison de l'équation (1) avec l'équation du cercle circonscrit, c'est-à-dire

$$a\beta\gamma + b\alpha\gamma + c\alpha\beta = 0.$$

Éliminant $\alpha\beta$, par exemple, il vient

$$(b^2 - c^2)bc^2\beta\gamma + (c^2 - a^2)ac^2\alpha\gamma = (a^2 - b^2)ab(a\beta\gamma - b\alpha\gamma),$$

équation qui se décompose en deux autres : $\gamma = 0$, qui représente le côté AB, et

$$a\alpha(b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2) + b\beta(b^2c^2 + a^2b^2 - a^4 - c^4) = 0$$

qui représente la corde CN.

Les coordonnées du point N satisfont donc aux relations

$$a\alpha(n^4 - p^4 + a^4 - b^2c^2) = b\beta(n^4 - p^4 + b^4 - a^2c^2)$$
$$= c\gamma(n^4 - p^4 + c^4 - a^2b^2).$$

On obtiendrait les distances α, β, γ, en suivant la méthode habituelle (voir *Journal de Mathématiques élémentaires*, t. II, 1883, p. 250-252); c'est-à-dire par les équations

$$a\alpha f_a = b\beta f_b = c\gamma f_c = K,$$

et

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S;$$

mais les expressions définitives paraissant devoir être trop compliquées, nous n'en pousserons pas plus loin la recherche, et nous procéderons différemment.

Les distances des points R et N, diamétralement opposés dans le cercle circonscrit, peuvent se déduire de celles des points H et D aux trois côtés.

L'on a, en effet,

$$\frac{RH}{DH} = \frac{n^4}{p^4 - n^4};$$

donc

$$\frac{R_a - H_a}{D_a - H_a} = \frac{n^4}{p^4 - n^4};$$

d'où

$$R_a = \frac{2S(a^4 - n^4 + 2b^2c^2)}{a(p^4 - n^4)}.$$

De même, pour le point N,

$$\frac{HN}{DH} = \frac{n^4}{p^4 - n^4};$$

donc

$$\frac{H_a - N_a}{D_a - H_a} = \frac{n^4}{p^4 - n^4},$$

d'où

$$N_a = \frac{2S(p^4n^4 - p^4a^4 - 2b^2c^2n^4)}{a(p^4 - n^4)(2n^4 - p^4)}.$$

Pour vérifier, par exemple, que les points N, D′, H′ sont en ligne droite, il suffit de réduire l'expression

$$\frac{H'_a - D'_a}{D'_a - N'_a}$$

On trouve ainsi

$$\frac{\dfrac{2S(2a^4 - p^4 + 2b^2c^2)}{a(2n^4 - p^4)} - \dfrac{2Sa^3}{p^4}}{\dfrac{2Sa^3}{p^4} - \dfrac{2S(p^4n^4 - p^4a^4 - 2b^2c^2n^4)}{a(p^4 - n^4)(2n^4 - p^4)}} = \frac{p^4 - n^4}{n^4},$$

ce qu'il fallait bien trouver, H′D étant parallèle à HD′.

On vérifierait, de même, les identités

$$\frac{EZ}{ZN} = \frac{Z'K}{KN} = \frac{p^4 - n^4}{3n^4}.$$

Enfin, d'après une intéressante remarque de M. Boubals, la droite de Simson correspondant au point N, dans le triangle donné ABC, est perpendiculaire à HK, et, par conséquent, celle du point R, diamétralement opposé à N, est parallèle à HK. (Voir plus haut, § 1.) *(à suivre.)*

NOTE

SUR UNE TRANSFORMATION TANGENTIELLE CIPROQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.

Nous possédons depuis longtemps, dans nos papiers, quelques résultats relatifs à une méthode de transformation très élémentaire qui fait correspondre généralement à une courbe de la classe m une courbe de la classe $2m$.

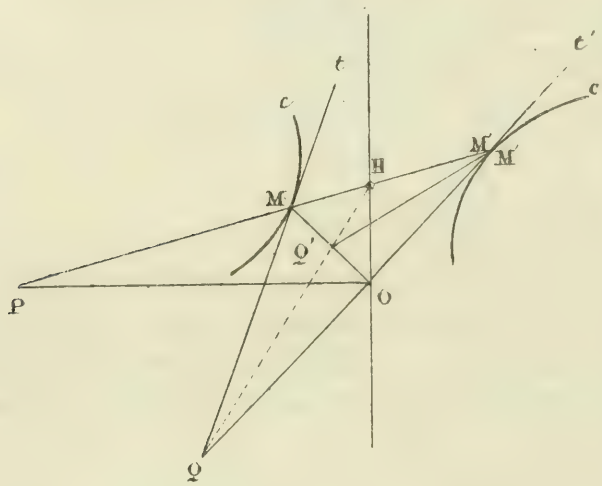
Nous avions oublié cette Note (*), lorsque M. de Longchamps, en nous communiquant ses intéressantes recherches sur la *transformation réciproque*, nous la remit en mémoire.

Or, il se trouve qu'il existe entre les deux méthodes une

(*) L'idée de cette Note remonte à peu près à l'époque de notre entrée à l'Ecole Polytechnique (1880).

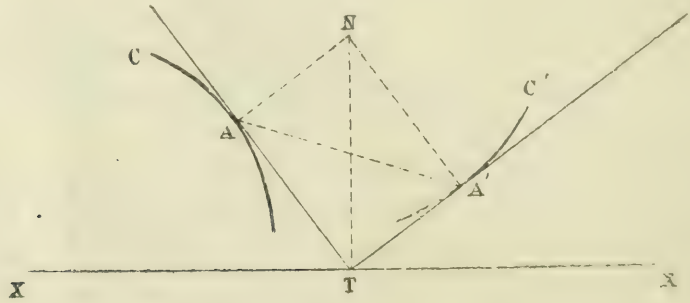
liaison des plus étroites; l'une peut se déduire de l'autre par une simple transformation par polaires réciproques; en sorte que chaque propriété démontrée pour l'une conduit immédiatement à une propriété corrélative pour l'autre. En effet, voici comment nous définissons la transformation tangentielle réciproque en question.

On donne un axe XX′ *(fig. 1)* et une courbe C. Une tangente quelconque AT à la courbe C coupe XX′ au point T. En T, élevons à AT une perpendiculaire TA′. Cette droite a pour enveloppe une courbe C′ qui est la transformée de C. On voit que, réciproquement, C est, suivant ce procédé, la transformée de C′.



Transformons par polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O.

Soient P le pôle de XX′ *(fig. 2)*;
M celui de AT;
M′ celui de AT′;
c et c' les polaires réciproques de C et C′.



Les droites AT et A′T se coupant constamment sur la droite fixe XX′, les points M et M′ sont constamment en

ligne droite avec le point fixe P; l'angle ATA′ étant droit, la droite MM′ est vue du point O sous un angle droit. Donc, les courbes c et c' sont *réciproques* au sens dans lequel M. de Longchamps prend ce mot.

L'angle ATA′ étant constant *(fig. 1)*, les normales AN et A′N aux courbes C et C′ en A et A′ se coupent sur la normale TN à la droite XX′ en T. Cela permet de construire le point A′ connaissant le point A, et réciproquement. Quelle est la propriété corrélative dans la méthode de transformation de M. de Longchamps?

Soient Q le pôle de AN *(fig. 2)*,
Q′ celui de A′N,
N celui de TN.

Le point Q est sur la tangente en M à la courbe C et l'angle MOQ est droit, c'est-à-dire que le point Q est sur OM′.

De même, le point Q′ est à la rencontre de OM et de la tangente en M′ à la courbe c'.

Le point H est sur la droite MM′, et comme l'angle POH est droit, le point H est aussi sur la perpendiculaire élevée en O à la droite OP.

Les droites AN, A′N et TN de la première figure concourant au même point, les points corrélatifs Q, Q′ et H de la seconde sont en ligne droite.

Nous aurons donc, pour la transformation réciproque de M. de Longchamps, le théorème suivant :

M *et* M′ *étant des points correspondants sur deux courbes réciproques* c *et* c′, Mt *et* M′t′ *les tangentes à ces courbes en ces points,* O *le pôle secondaire, le point de rencontre de* Mt *et de* OM′, *et le point de rencontre de* M′t′ *et de* OM *sont en ligne droite avec le point de rencontre de* MM′ *et de la perpendiculaire élevée à l'axe des pôles par le point* O.

Cette perpendiculaire étant une droite fixe, les droites OM, OM′ et Mt étant tracées, on voit que ce théorème fournit une construction extrêmement simple de la tangente M′t' à la courbe réciproque. Il suffit de joindre le point M′ au point de rencontre de Mt et de OM′.

Nota. — On trouvera une théorie assez complète de la transformation dont nous venons de dire un mot et que nous

appellons *transformation orthotangentielle*, dans une brochure que nous sommes en train de publier chez M. Gauthier-Villars, sous le titre de : *Coordonnées parallèles et axiales*.

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 16.)

Définition. — Lorsque deux polynômes U, V, ne sont pas premiers entre eux, on appelle plus grand commun diviseur de ces polynômes un autre polynôme D, qui les divise exactement et qui, en outre, jouit de cette propriété qu'aucun diviseur commun à U et à V ne possède un degré supérieur à celui de D.

Nous montrerons tout à l'heure que, abstraction faite des facteurs constants, il n'y a qu'un polynôme vérifiant les deux conditions que nous venons d'énoncer.

Théorème. — *Pour que* D *soit le plus grand commun diviseur des polynômes* U *et* V, *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$U = U_1 D, \quad V = V_1 D,$$

U_1, V_1, *désignant des polynômes premiers entre eux.*

1° La condition est *nécessaire*. En effet, si U_1 et V_1 admettaient un diviseur commun δ, en posant

$$U_1 = U_2\delta \quad \text{et} \quad V_1 = V_2\delta,$$

on aurait

$$U = U_2(D\delta), \quad V = V_2(D\delta),$$

et ces identités montreraient que $D\delta$ est un diviseur commun à U et à V. Ainsi, D ne serait pas le plus grand commun diviseur et ceci est contraire à l'hypothèse.

2° La condition est *suffisante*. Pour le démontrer, remarquons d'abord que U_1 et V_1 étant premiers entre eux, nous

avons $$\mu U_1 + \nu V_1 = 1,$$
et, par suite,
$$\mu U + \nu V = D. \qquad (1)$$

Cela posé, soit Δ un diviseur commun à U et à V; nous pouvons écrire
$$U = u\Delta, \quad V = v\Delta,$$
u, v étant des polynômes entiers. L'identité (1) devient alors
$$\Delta(\mu u + \nu v) = D. \qquad (2)$$

La forme $\mu u + \nu v$ n'est pas identiquement nulle, si D et par conséquent si U et V ne sont pas identiquement nuls, condition évidemment donnée. L'identité (2) prouve donc que tout diviseur Δ, commun à U et à V, est d'un degré égal ou inférieur à celui de D.

D'après cela, si un polynôme D divise exactement U et V et si ces divisions conduisent à des quotients premiers entre eux, il n'y a pas de diviseur, d'un degré supérieur à D, commun à U et à V.

On voit aussi que, dans le cas où Δ a un degré égal à celui de D, D et Δ sont identiques. Le cas que nous signalons ici correspond à celui où l'on suppose que $\mu u + \nu v$ est une constante.

Cela posé, nous allons résoudre le problème suivant :

Deux polynômes U *et* V *étant donnés, vérifier s'ils sont, ou non, premiers entre eux ; et dans le cas où ils ne sont pas premiers entre eux, déterminer leur plus grand commun diviseur.*

On remarquera, dans les développements qui vont suivre, le rapprochement que l'on peut faire entre la théorie du *plus grand commun diviseur* algébrique et celle du *plus grand commun diviseur* telle qu'elle peut être exposée en arithmétique.

Lemme. — *Si* U *n'est pas exactement divisible par* V, *le plus grand commun diviseur entre* U *et* V *est le même que celui qui existe entre le polynôme* V *et le reste* R, *obtenu en effectuant la division de* U *par* V.

Si U était exactement divisible par V, V serait évidemment le plus grand commun diviseur cherché. Supposons donc

que cette division ne se fasse pas exactement et conduise à l'identité

$$U = VQ + R, \qquad (1)$$

on voit d'abord que si U et V sont premiers entre eux, V et R sont, eux aussi, premiers entre eux. En effet, si V et R admettaient un diviseur commun Δ, $VQ + R$ serait exactement divisible par Δ et les polynômes U et V ne seraient pas premiers entre eux.

Supposons maintenant que U et V admettent un *plus grand commun diviseur* D ; nous allons montrer que D est aussi le *plus grand commun diviseur* de V et de R.

On a, par hypothèse,

$$U = U_1 D \qquad (2)$$

$$V = V_1 D \qquad (3)$$

U_1 et V_1 étant deux polynômes entiers, premiers entre eux. L'identité (1) peut donc s'écrire

$$R = (U_1 - V_1 Q)D; \qquad (4)$$

$U_1 - V_1 Q$ est un polynôme entier qui n'est pas identiquement nul; car si l'on avait $U_1 - V_1 Q = 0$, on aurait $R = 0$ et par suite les polynômes U et V seraient exactement divisibles l'un par l'autre. Ainsi R est divisible par D et les identités (3) et (4) établiront que D est le *plus grand commun diviseur* des polynômes V et R, quand nous aurons montré que

$$V_1, \text{ et } (U_1 - V_1 Q)$$

sont premiers entre eux.

Considérons, en effet, un diviseur Δ de V_1; si Δ était un diviseur de $U_1 - V_1 Q$, Δ serait aussi un diviseur de U_1, ce qui ne peut être admis, U_1 et V_1 étant, nous le supposons, premiers entre eux.

RECHERCHE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE

Désignons toujours par U et V les deux polynômes proposés; divisons U par V, soit R_1 le reste obtenu; divisons V par R_1, soit R_2 le reste de cette division; et ainsi de suite.

Deux cas peuvent se présenter : 1° *le dernier reste obtenu* R_p *est numérique :* le *plus grand commun diviseur* entre U et V étant le même que ceux des polynômes

$$V \text{ et } R_1, \quad R_1 \text{ et } R_2, \quad \ldots \quad R_{p-1} \text{ et } R_p$$

et ces derniers n'ayant pas de diviseur commun algébrique, on peut conclure de ce calcul que U et V sont premiers entre eux; 2° *le dernier reste* R_p *est nul* : dans ce cas, le *plus grand commun diviseur* entre R_{p-2} et R_{p-1} est égal à R_{p-1}; R_{p-1} représente donc le *plus grand commun diviseur* cherché. On conclut de cette théorie la règle suivante :

Règle. — *Etant donnés deux polynômes* U *et* V, *on divise successivement : 1°* U *par* V; *2°* V *par le reste* R_1 *de cette première division; 3°* R_1 *par le reste* R_2 *de cette deuxième division; et ainsi de suite : ces calculs conduisent nécessairement à une division dont le reste est numérique, ou égal à zéro : dans le premier cas,* U *et* V *sont premiers entre eux; dans la seconde hypothèse, ils admettent un plus grand commun diviseur qui est égal au diviseur employé dans la dernière division.*

Enfin, voici quelques propriétés qui se rattachent encore aux idées précédentes et qui nous seront utiles pour l'établissement du théorème fondamental de la théorie des équations.

Théorème. — *Un polynôme qui divise un produit de deux autres polynômes, et qui est premier avec l'un d'eux, divise l'autre.*

Soit P un polynôme divisant le produit (U . V) de deux polynômes U et V; je suppose que P soit premier avec V, je dis que P divise U.

En effet, P et V étant premiers entre eux, nous venons de reconnaître qu'il existait deux polynômes μ, ν vérifiant l'identité

$$\mu P + \nu V = 1.$$

On a, par suite,

$$\mu PU + \nu VU = U.$$

Par hypothèse, le polynôme P divise VU ; soit Q le quotient, on peut écrire

$$UV = P.\ Q,$$

et, par conséquent,

$$P(\mu U + \nu Q) = U.$$

Cette identité prouve que U est exactement divisible par P.

Théorème. — *Étant donnés deux polynômes* U *et* V; *si l'on peut trouver deux autres polynômes* P *et* Q, P *étant d'un degré inférieur à* V, *et* Q *d'un degré inférieur à* U, *tels que la relation*

$$PU - QV = 0, \qquad (1)$$

soit vérifiée, U *et* V *ne sont pas premiers entre eux.*

La relation (1) donne

$$\frac{U}{V} = \frac{Q}{P}, \text{ ou } U = V\frac{Q}{P}. \qquad (2)$$

On peut d'ailleurs supposer que Q et P sont premiers entre eux, car s'ils admettaient un diviseur commun D, on pourrait diviser les deux membres de (1) par D, l'identité n'en subsisterait pas moins.

D'après l'identité(2), P divise le produit VQ ; il est premier avec Q, il divise donc V. Posons, d'après cela,

$$V = P \,.\, \theta, \qquad (3)$$

et observons que P étant, par hypothèse, d'un degré inférieur à V, θ est nécessairement une fonction entière de x, du premier degré, au moins.

Les identités (2) et (3) donnent alors

$$U = Q \,.\, \theta. \qquad (4)$$

Les relations (3) et (4) prouvent que les polynômes U et V admettent un diviseur commun θ, θ étant un polynôme entier en x; U et V ne sont donc pas premiers entre eux.

Remarque. — La réciproque est évidemment vraie. Si l'on suppose que l'on ait

$$U = U_1\Delta, \quad \text{et } V = V_1\Delta,$$

on a donc aussi

$$V_1U - U_1V = 0.$$

Cette identité établit que *si* U *et* V *ne sont pas premiers entre eux, il existe deux polynômes* U_1, V_1; U_1 *et* V_1 *étant, respectivement, de degré inférieur à* U *et à* V *et tels que* V_1U *soit identique à* U_1V. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Hadamard, élève à l'École normale supérieure (*).

Je suis parvenu à tirer, des considérations que je vous ai présentées précédemment, une conséquence qui me paraît digne d'être signalée. Nous avons trouvé (α, β, γ étant les longueurs des tangentes issues d'un point à l'hypocycloïde, V, V', V'' les angles qu'elles font entre elles) les formules :

$$\frac{\alpha}{4R} = \sin V' \sin V'' \; ; \; \frac{\beta}{4R} = \sin V'' \sin V ; \; \frac{\gamma}{4R} = \sin V \sin V',$$

R désignant le rayon du cercle inscrit à la courbe. Transformons les points A, B, C par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point P pour origine. Les distances des points A'', B'', C'' ainsi obtenus au point P seront

$$\alpha_1 = \frac{K^2}{\alpha}, - \beta_1 = \frac{K^2}{\beta}, \gamma_1 = \frac{K^2}{\gamma}$$

et l'on aura
$$\frac{\alpha_1}{\sin V} = \frac{\beta_1}{\sin V'} = \frac{\gamma_1}{\sin V''}$$

On voit aisément, à l'aide de ces proportions, que *le point* P *est le centre de gravité du triangle* A''B''C''.

Mais pour obtenir ce triangle, nous pouvons d'abord considérer le triangle A'B'C' polaire réciproque du triangle ABC par rapport à un cercle ayant le point P pour centre. Les points A'', B'', C'' sont les projections du point P sur les côtés du triangle A'B'C'.

Or, de ce que le point P est le centre de gravité de ses projections sur les côtés du triangle A'B'C', il résulte qu'il

(*) Voyez : *Journal*, *1884*, p. 227, une lettre de M. Hadamard à laquelle fait suite la présente. Voyez aussi (*loc. cit.*; p. 169) notre note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Dans la lecture de la lettre ci-dessus, il faut supposer : 1° que A, B, C représentent les points de contact des tangentes issues du point P; 2° A', B', C' les pôles des droites BC, CA, AB par rapport à un cercle de centre P; 3° A'', B'', C'' les inverses des points A, B, C par rapport au même cercle. G. L.

est le centre des médianes anti-parallèles de ce triangle; et, par suite, que la droite PA′, par exemple, est la conjuguée harmonique par rapport aux côtés A′B′, A′C′, de la tangente en A′ au cercle A′B′C′.

Si nous passons alors à la figure polaire réciproque, le cercle A′B′C′ deviendra une ellipse ayant P pour foyer et inscrite au triangle ABC. D'ailleurs cette ellipse touche le côté BC en son milieu, et, de même, chacun des deux autres côtés: elle est donc l'ellipse maximum inscrite au triangle:

Ainsi *le point* P *est un foyer de l'ellipse maximum inscrite au triangle* ABC.

QUESTIONS D'EXAMENS

5. — *Trouver la vraie valeur des expressions indéterminées suivantes :*

1° $$y = \frac{Lx^p - La^p}{x - a}, \qquad \textit{pour } x = a.$$

On posera $x - a = a\alpha$; y prend la forme

$$y = p\,\frac{L(1 + \alpha)}{a\alpha}.$$

La valeur cherchée est donc $\frac{p}{a}$ Le.

2° $$y = \frac{e^x - e^{x-}}{x}, \qquad \textit{pour } x = 0.$$

On peut, adoptant la méthode générale, remplacer e^x et e^{-x} par le développement connu, réduit à trois termes. On peut aussi raisonner comme il suit.

Posons

$$e^x = X, \qquad (X = 1, \text{ pour } x = 0),$$

nous aurons alors

$$y = \frac{X^2 - 1}{XLX} = \frac{X + 1}{X},\ \frac{X - 1}{LX}.$$

En faisant $a = 1$ dans l'exercice précédent, nous voyons que

$$\lim \frac{X - 1}{LX} = 1, \qquad \text{pour } X = 1;$$

finalement, nous avons donc

$$\lim y = 2.$$

3° $$y = \frac{1}{x} + Lx, \qquad \textit{pour } x = 0.$$

Nous poserons

$$x = \frac{1}{X}, \quad (X = \infty, \text{ pour } x = 0)$$

et nous aurons

$$y = X - LX = X\left(1 - \frac{LX}{X}\right).$$

Nous savons d'ailleurs que, si X croît au delà de toute limite, le rapport $\frac{LX}{X}$ tend vers zéro. D'après cela, y croît au delà de toute limite.

4° $$y = \frac{e^x - 1}{\sin x}, \qquad \textit{pour } x = 0.$$

Posons encore $e^x = X$, nous avons

$$y = \frac{X - 1}{LX}\left(\frac{x}{\sin x}\right).$$

Ainsi, d'après ce que nous venons de voir tout à l'heure,

$$\lim y = 1.$$

5° $$y = (2 - e^x)^{\frac{1}{x}} \qquad \textit{pour } x = 0.$$

Posons

$$2 - e^x = 1 + \alpha, \qquad (\alpha = 0, \text{ pour } x = 0).$$

Nous avons

$$y = \left\{(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\frac{1-e^x}{x}}$$

et, d'après la limite déterminée dans l'exercice précédent,

$$\lim y = e^{-1}.$$

6° $$y = \frac{\sin px}{l(1 + x)}, \qquad \textit{pour } x = 0.$$

On a

$$y = p\left(\frac{\sin px}{px}\right)\frac{x}{l(1 + x)},$$

d'où $$\lim y = \frac{p}{l.e}.$$

6. — *Prendre la dérivée de l'expression*

$$y = \text{arc sin}\,(x\sqrt{1 - a^2} - a\sqrt{1 - x^2}).$$

On trouve facilement

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

D'après ce résultat, on peut vérifier que, après avoir posé

$$Y = \text{arc sin}\, x,$$

et

$$a = \sin \varphi,$$

on a bien

$$y = Y - \varphi.$$

7. — *Calculer la dérivée de* y,

$$y = \cos\,(2 \text{ arc cos } x).$$

En posant

$$\text{arc cos}\, x = X,$$

ou

$$x = \cos X,$$

on a

$$y = \cos 2X = 2x^2 - 1.$$

Ainsi,

$$y' = 4x.$$

(A suivre.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

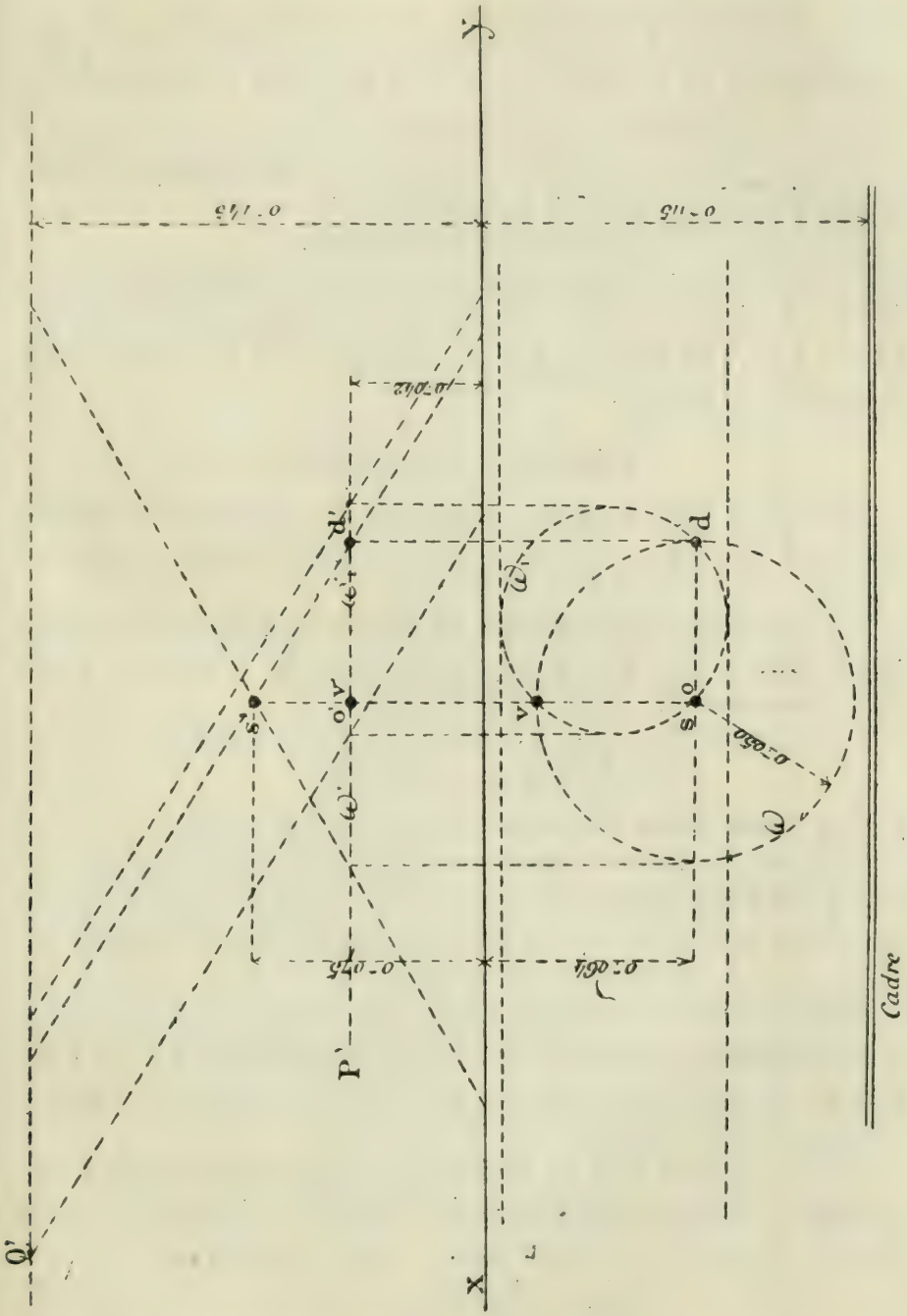
DEUXIÈME SESSION DE 1884

Épure.

Intersection d'un cône de révolution et d'un cylindre.

Dans un plan horizontal P′ à la cote $0^m,042$, on trace deux cercles : le premier ω, ω' est la directrice du cône, il a $0^m,050$ de rayon et son centre o, o' se trouve à $0^m,064$ en avant du plan vertical ; le second ω_1, ω_1' est la directrice du cylindre, il passe par le centre o, o', par le point v, v' le plus voisin du plan vertical et par le point le plus à droite d, d' du premier cercle. Le sommet s, s' du cône a pour cote $0^m,075$, et les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite sd, $s'd'$.

On demande de construire les projections du corps consti-



tué par la partie des deux nappes du cône, supposées pleines et opaques, placée à l'intérieur du cylindre et comprise

entre un plan horizontal Q′, ayant une cote de $0^m,145$ et le plan horizontal de projection.

On indiquera, à l'encre rouge, les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celle des points et des droites remarquables.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure,

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection d'un cône et d'un cylindre. Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre à $0^m,115$ du grand côté inférieur, et la droite ss' au milieu de la feuille.

Géométrie analytique.

On donne, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et une droite quelconque coupant ces axes respectivement aux points A et B.

On prend sur cette droite un point m dont les coordonnées sont α et β et on construit, dans le plan, un point correspondant M ayant pour coordonnées

$$x = \frac{f^2}{\alpha}, \qquad y = \frac{g^2}{\beta},$$

f et g étant deux longueurs constantes données.

Ceci posé : 1° On demande d'écrire l'équation du lieu des points M, lorsque le point m se déplace sur la droite indéfinie AB. Ce lien est une hyperbole qu'on désignera, dans ce qui va suivre, par la lettre H ;

2° On demande de déterminer les éléments nécessaires à la définition complète de cette hyperbole H et d'en construire géométriquement un point quelconque, ainsi que la tangente en ce point ;

3° On suppose que la droite AB se déplace dans le plan, de façon telle que la somme des inverses de ses coordonnées à l'origine reste constante ; soit, de façon que

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{l} = \text{const.}$$

A chaque position de la droite répondra une hyperbole H.

On demande de montrer que toutes ces hyperboles ont

une corde commune et de trouver le lieu des pôles de cette corde relativement aux diverses hyperboles (c'est-à-dire le lieu des points pour lesquels elle est corde de contact des tangentes menées de ce point à l'une des hyperboles).

4° On projette le centre C de l'hyperbole H répondant à la droite AB, sur cette droite, en D ; et on demande de trouver le lieu des points D lorsque la droite AB se déplace, non plus selon la loi ci-dessus définie, mais en restant parallèle à elle-même.

Trigonométrie.

Calculer les angles et la surface d'un triangle dont les trois côtés sont :

$$a = 4356^{m},742,$$
$$b = 3754\ ,682,$$
$$c = 2574\ ,754.$$

QUESTION 53

Solution par M. Henri Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay).

Soient a, b, c, d, *quatre coefficients consécutifs d'une équation algébrique réelle ; si l'équation*

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

n'a pas ses trois racines réelles et distinctes, l'équation proposée a au moins deux racines imaginaires. (Walecki.)

Le reste de la division du polynôme

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

par le tiers de sa dérivée

$$ax^2 + 2bx + c.$$

étant, au facteur $\frac{1}{a}$ près,

$$2(ac - bd)\,x + ad - bc,$$

la condition pour que l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

ait ses trois racines réelles et distinctes est :

$$4(ac - b^2)^2 \frac{c}{a} - 4(ac - b^2)(ad - bc) \frac{b}{a} + (ad - bc)^2 < 0$$

ou

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) < 0. \qquad (1)$$

Or, on sait (*Cours d'algèbre* de M. de Longchamps, exercices sur le théorème des lacunes) que quatre coefficients consécutifs d'une équation n'ayant que des racines réelles vérifient l'inégalité (1); si donc les trois racines de l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

ne sont pas réelles et distinctes; c'est-à-dire si l'inégalité (1) n'est pas vérifiée, aucune des équations, dont a, b, c, d sont quatre coefficients consécutifs, ne peut avoir toutes ses racines réelles.

NOTE. — La condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré s'obtient, un peu plus rapidement, en écrivant que le résultant des dérivées partielles de la forme rendue homogène est négatif. — Le théorème auquel renvoie ce travail peut se démontrer directement en écrivant que le facteur $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, choisi pour faire apparaître une lacune de deux termes, a ses racines imaginaires. G. L.

Ce numéro était composé quand nous avons appris la mort soudaine de M. Vazeille. Le temps et aussi certains renseignements nous manquent pour retracer aujourd'hui, convenablement, la vie si occupée, et tout entière vouée au travail, de cet éminent professeur, mort à la peine. Mais nous espérons pouvoir, dans une notice qui paraîtra dans le prochain numéro de ce journal, rendre à la mémoire de celui qui fut ici, pendant près de trois années, notre collaborateur, le tribut d'éloges auquel elle a droit.

G. L.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 3160-5.

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR VAZEILLE

Dans le précédent numéro de ce Journal, nous avons eu le vif regret d'annoncer la mort soudaine de notre collaborateur Vazeille. En communiquant à nos lecteurs cette nouvelle si imprévue, nous nous sommes engagés en même temps à leur parler une dernière fois de ce professeur distingué, à rendre hommage à ses qualités si diverses et si variées; nous venons aujourd'hui remplir ce devoir douloureux.

Vazeille était originaire des environs de Clermont et il fit, au lycée de cette ville, de brillantes études littéraires. Il avait d'ailleurs gardé beaucoup de cette première éducation; à la façon élégante et correcte avec laquelle il s'exprimait, on reconnaissait vite l'homme de science doublé du lettré. Il entra à l'École Polytechnique dans la promotion de 1845, en sortit élève ingénieur des ponts et chaussées; mais, pour des raisons qui ne nous sont pas connues, poussé peut-être par un goût prononcé pour l'enseignement, carrière pour laquelle il était si bien doué, il donna sa démission, vers 1850 ou 1851. Depuis cette date, Vazeille n'a pas cessé d'appartenir à l'enseignement libre; il en fut, pendant plus de trente ans, un des représentants les plus en vue.

Il y a environ trois ans que Vazeille, succédant à M. Kœhler, alors très souffrant, dans la direction des études à l'Ecole Préparatoire de Sainte-Barbe, vint prendre, en même temps, la situation de rédacteur-gérant au *Journal de Mathématiques*. A cette époque, bien que connaissant Vazeille depuis quelques années, je suis entré nécessairement en relations plus fréquentes et plus intimes avec cet esprit remarquablement souple et fin. Vazeille frappait, au premier abord, par l'expression caractérisée de sa physionomie, par la vivacité exceptionnelle de son esprit toujours en éveil, par l'élégance et la séduction de sa parole. Nous avions alors, nous avons eu jusque dans ces derniers temps,

dans ce cabinet où la mort est venue le foudroyer, des séances mensuelles, pendant lesquelles les membres du comité de rédaction de ce Journal échangeaient leurs opinions et leurs idées sur les travaux divers qui étaient parfois soumis à leur appréciation. On se fera difficilement une idée de ce qu'était Vazeille dans ces circonstances; de l'abondance et de la variété inépuisables de ses appréciations ; enfin, de la verve finement aiguisée dont il parsemait ses réflexions. J'ai toujours pensé, après avoir assisté aux discussions que je viens de rappeler, que Vazeille, professeur et peut-être plus encore conférencier des plus distingués, eût été, si les circonstances l'y avaient poussé, un critique mathématique de premier ordre.

Il sentait bien d'ailleurs cette force maîtresse qui était en lui, et plus d'une fois il a voulu me rattacher à une idée, que je n'ai jamais goûtée, mais qu'il défendait avec cette chaleur vive que donne une conviction sincère. Cette idée, à laquelle il revenait toutes les fois que l'occasion favorable se présentait de le faire, était d'engager le Journal dans la voie de la critique ; non pas de cette critique banale, le plus souvent dictée par des considérations de personnes, d'amitiés ou de recommandations; mais, comme il disait, de la vraie critique, la critique sans ménagements, la critique impitoyable, enfin. C'était bien là, en effet, le terrain sur lequel Vazeille se fût développé complètement. Les sous-entendus et les ménagements n'étaient pas du ressort de ce caractère personnel et tout entier, qui poussait la franchise on pourrait dire jusqu'à l'excès, s'il était permis de fixer une limite à une si belle qualité.

Je ne suis pas non plus éloigné de penser que cette tendance si marquée de cet esprit vers la critique n'ait été une des raisons pour lesquelles il a si peu produit. Mais la cause véritable de cette abstention presque absolue de Vazeille dans la rédaction de ce Journal est la peine extrême qu'il éprouvait à détacher, de sa vie si remplie, quelques heures de liberté. Je puis dire, dans tous les cas, pour avoir été le témoin des promesses, j'oserais presque dire des serments qu'il nous faisait, que ce n'est pas la bonne volonté

qui lui manquait. Des promesses, il s'en faisait à lui-même tous les jours. C'est ainsi qu'il a passé des années se proposant sans cesse d'écrire son cours de mathématiques spéciales; mais je ne serais pas surpris d'apprendre que la première page de ce manuscrit est encore blanche. Il voulait aussi, depuis longtemps, publier une Géométrie descriptive, science pour laquelle il avait une prédilection marquée. Il possédait d'ailleurs, dans cette spécialité, une compétence incontestable et qui, si nos souvenirs sont exacts, fut très remarquée de ceux qui suivirent, il y a un certain nombre d'années, le cours de Géométrie descriptive qu'il professa, à cette époque, au lycée Charlemagne.

En terminant cette notice que je me reprocherais de faire aussi courte, si les discours qu'on lira plus loin n'étaient pas là pour suppléer dignement à son insuffisance, je veux encore rappeler dans la vie de Vazeille un bien petit incident, mais dont le souvenir m'a vivement frappé, quand j'ai connu sa mort foudroyante.

Il y a deux ans environ, au sortir d'une des séances du comité, Vazeille disait à l'un de nous : « Un tel, croyez-moi, vous travaillez beaucoup trop; il faut savoir se ménager et vous ne résisterez pas longtemps à tant de fatigues. ». Et il nous citait des exemples, hélas ! ils sont nombreux, de professeurs tués par l'excès du travail. C'étaient là, assurément, de sages paroles, bien que peut-être (c'est souvent le sort des meilleures), elles n'aient pas été très écoutées par celui auquel elles s'adressaient. Mais n'est-il pas singulier de voir, une fois de plus, combien nous sommes aveugles sur nous-mêmes, et combien nous aimons à donner aux autres des avis que nous n'avons pas la force d'imposer nous-mêmes à notre conduite ? N'est-il pas curieux, par exemple, de constater, dans le cas que nous citons, que c'était justement celui d'entre nous qui se dépensait le plus, qui, à l'âge où l'on peut songer à un repos prochain, avait à faire face, non seulement à l'enseignement des mathématiques spéciales au collège Stanislas et à l'école préparatoire de Sainte-Barbe, mais encore à la direction des études de cet établissement, qui conseillait

des ménagements, qui recommandait le repos ? Peut-être est-il juste d'ajouter que ces ménagements sont au-dessus des forces humaines, pour certains tempéraments du moins ; et ceux-là, entraînés par la force des choses, prenant le travail sans compter, sans réflexion, vivent absorbés par lui, comme a vécu Vazeille, et comme lui, au jour fatal, meurent à la peine. G. L.

DISCOURS DE M. DUBIEF

DIRECTEUR DE SAINTE-BARBE

Au nom de Sainte-Barbe je viens dire un dernier adieu à l'un de ses maîtres les plus distingués, à l'un de ses amis les plus fidèles.

Ce n'est pas la première fois que les élèves de Sainte-Barbe et de Stanislas se rencontrent, hélas ! dans une cérémonie funèbre. Il y a quelques années ils venaient rendre ensemble les derniers devoirs à un professeur éminent qui appartenait aux deux collèges, à M. Gros, dont le souvenir demeure vivant parmi nous. Aujourd'hui encore ils se retrouvent mêlant leurs regrets et leurs larmes devant la tombe d'un professeur adoré.

Je dis adoré, l'expression n'est pas trop forte : car M. Vazeille avait toutes les séductions, la séduction du talent, la séduction de la bonté unie à la grâce. Sorti de l'École Polytechnique, où il occupait un des premiers rangs de sa promotion, il entra de bonne heure dans l'enseignement libre, et ne tarda pas à s'y faire une place exceptionnelle par ses rares qualités. Pendant vingt ans nous l'avons vu à l'œuvre et nous avons pu apprécier la lucidité de ses leçons et l'éclat de sa parole. Peu de professeurs ont eu comme lui le don d'intéresser et d'entraîner leurs élèves, de leur communiquer l'ardeur dont il était animé. M. Vazeille en effet n'était pas seulement un mathématicien ; c'était un mathématicien éloquent, un lettré, un artiste, un esprit

ouvert à la fois à tout ce qui est vrai, à tout ce qui est beau. Ainsi s'explique la fascination qu'il exerçait autour de lui; de là les brillants succès qu'il a remportés tant de fois, et particulièrement l'an dernier, qui a été en quelque sorte le couronnement de sa carrière. Qui nous aurait dit qu'il serait si vite ravi à notre affection? Il était si plein de force et de vitalité! il supportait si facilement le fardeau qu'il s'était imposé! sa vigueur, son activité infatigable, tout semblait lui promettre de longs jours. Et voilà que tout à coup, sans maladie, sans aucun signe précurseur, il est tombé au milieu de nous. Ce n'est pas du soir au matin, ce n'est pas en quelques heures qu'il a passé : il a été foudroyé instantanément. Une minute a suffi pour éteindre ce brillant esprit, pour glacer ce cœur si chaud et si généreux.

Devant une mort si imprévue, si prématurée, nous n'avons qu'à nous incliner tristement et à méditer, jeunes et vieux, sur la fragilité de notre existence éphémère. Les paroles sont impuissantes à exprimer la stupeur douloureuse dont nous avons été saisis et dont nous ne sommes pas encore revenus. Puisse au moins la sincérité de notre affliction, puisse le souvenir de gratitude que M. Vazeille laisse dans le cœur de ses élèves, puisse surtout la pensée qu'il jouit d'un bonheur sans mélange dans un monde où il n'y a plus ni surprises ni déceptions, adoucir dans la mesure du possible la douleur profonde et durable de sa famille et de ses nombreux amis qui pleurent avec nous!

DISCOURS DE M. L'ABBÉ PRUDHAM

DIRECTEUR DU COLLÈGE STANISLAS

Messieurs, je voudrais, avant de m'éloigner de cette tombe, dire un mot d'adieu à M. Vazeille au nom du collège Stanislas, c'est-à-dire au nom du directeur, des professeurs, des élèves ici présents et aussi des anciens qui, pendant ces

quinze dernières années, ont suivi les cours de ce maître habile.

M. le Directeur de Sainte-Barbe vient de faire l'éloge du défunt : il l'a fait avec beaucoup de cœur, d'éloquence et avec une autorité incontestable. Je remercie M. le Directeur d'avoir ainsi rendu mon devoir plus facile : je n'aurai que peu de mots à ajouter, car je souscris des deux mains à tout ce qui vient d'être dit.

J'ai connu en M. Vazeille le collaborateur actif, intelligent, fidèlement dévoué ; le professeur dont les rapports avec ses collègues étaient empreints de beaucoup d'urbanité, de courtoisie et de cordialité, le professeur à la parole nette, claire, dont l'enseignement brillant était couronné des plus beaux succès.

Cette année, en particulier, a été pour ce professeur distingué une année glorieuse : on peut dire que M. Vazeille meurt enseveli dans son triomphe.

Enfin, j'ai connu en M. Vazeille l'homme au cœur sensible et généreux, aux sentiments élevés, une âme d'artiste, ardente, se passionnant facilement pour la cause du bien, de la vérité et de la justice. C'est à ce regretté collaborateur, à cet homme si estimé, à cet éminent professeur que je viens payer un juste tribut de regrets et de reconnaissance.

Tant de qualités et de vertus, jointes aux miséricordes infinies de Dieu, sont une consolation et une espérance pour sa famille désolée et pour nous tous que la mort a frappés d'un deuil si soudain. Vous surtout, jeunes gens qui m'écoutez, retenez bien cette dernière leçon de votre maître, et lorsque la mort viendra vous saisir, qu'elle vous trouve dans le chemin du devoir et toujours préparés à la suivre.

M. le Directeur de Sainte-Barbe a fait dans son discours un rapprochement instructif ; il a rappelé que les élèves de Stanislas et de Sainte-Barbe étaient déjà, il y a onze ans, confondus près de la tombe de leur professeur commun de mathématiques spéciales, M. Gros ; mais ce que M. Dubief n'a pas dit, le fait qui ajoute à l'enseignement de

ce souvenir, c'est que c'est le plus jeune des deux Directeurs qui firent alors l'éloge funèbre de celui-ci, que Dieu a rappelé à lui.

Quant à moi, pour qui la mort a eu déjà bien des rigueurs, je ne séparerai jamais dans mon souvenir ce dernier coup qu'elle vient de frapper de la mémoire de cet homme si vivement regretté à qui nous venons rendre les derniers hommages.

Au nom du collège Stanislas, merci, cher Monsieur Vazeille, et au revoir, ou mieux, employant le mot dans son sens vrai et chrétien : Adieu!

SUR LES TANGENTES

COMMUNES A UN CERCLE ET A UNE PARABOLE

Par M. **Joseph Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

(*Suite*, voir p. 25.)

7° On peut encore déduire de l'équation (3) d'autres résultats remarquables. Si φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont les angles de quatre tangentes concycliques avec l'axe de la parabole, on a

$$\Sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 = -\frac{4(R+\beta)}{p},$$

$$\Sigma \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_2 = \frac{8\alpha - 2p}{p},$$

$$\Sigma \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1} = -\frac{4(R-\beta)}{d}.$$

d'où

$$R = -\frac{p}{8} \Sigma \left(\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1 + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi_1} \right) = -\frac{p}{4} \Sigma \frac{1}{\sin \varphi_1}, \quad (7)$$

$$\rho = -\frac{p}{8}\Sigma\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1}\right) = \frac{p}{4}\Sigma\operatorname{cotg}\varphi_1, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{\rho}{\alpha - \frac{1}{2}p} \quad (9)$$

Or, si une tangente quelconque rencontre en P la tangente au sommet A, le triangle FAP donne

$$AF = \frac{1}{2}p\operatorname{cotg}\varphi, \quad FP = \frac{p}{2\sin\varphi}.$$

On sait aussi que AF est la moitié de l'ordonnée du point de contact de la tangente. Dès lors, les formules (7), (8), (9) admettent l'interprétation suivante :

Lorsqu'un cercle et une parabole sont inscrits à un même quadrilatère : 1° le rayon du cercle est la demi-somme algébrique des distances du foyer aux côtés ; 2° le centre du cercle et le centre des moyennes distances des points de contact de la parabole sont sur un même diamètre de la parabole ; 3° la somme des inclinaisons des côtés du quadrilatère sur l'axe de la parabole diffère, d'un multiple de 2π, du double de l'inclinaison du même axe sur la droite joignant le foyer au centre du cercle.

La seconde partie de cette proposition est déjà connue. Car la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère circonscrit aux deux courbes passe par le centre du cercle et par celui de la parabole; c'est donc un diamètre de la parabole. L'ordonnée de ce diamètre par rapport à l'axe est une moyenne arithmétique des ordonnées de deux sommets opposés du quadrilatère, et, par suite, une moyenne des ordonnées des points de contact; donc ce diamètre passe par le centre des moyennes distancées des points de contact.

La propriété tirée de la formule (9) est susceptible d'un autre énoncé qui le rend applicable aux coniques à centre. Les paramètres de quatre tangentes concycliques menées à une ellipse sont racines de l'équation

$$[(\beta + R)^2 - b^2] \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\varphi + 4\alpha(\beta + R) \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2}\varphi$$

$$+ (4\alpha^2 - 2\beta^2 + R^2 - 2\alpha^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi - 4\alpha(\beta - R) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$$

$$+ (\beta - R)^2 - b^2 = 0;$$

d'où $$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 - c^2} \quad (10)$$

Ce résultat montre que la moyenne des inclinaisons des quatre tangentes sur une droite fixe ne dépend que du centre du cercle inscrit. Soient C le centre du cercle, MNPQ le quadrilatère formé par les tangentes. La moyenne des inclinaisons des droites NM, NP est égale à l'inclinaison de leur bissectrice CN; propriété analogue pour QP, QM, QC. Donc l'égalité (10) exprime que les bissectrices des angles NCQ, MCP ont des directions constantes. Mais lorsque le rayon R devient nul, les côtés du quadrilatère MNPQ se confondent avec les tangentes menées de C à l'ellipse. Donc lorsque R est quelconque, les bissectrices des angles NCQ, MCP se confondent avec celles des tangentes menées de C, ou, ce qui revient au même, avec celles des droites CF, CF'.

8° Les éléments du cercle osculateur résultent aussi des formules du paragraphe 7. Soient φ, φ_1 l'inclinaison de la tangente au point d'osculation M et celle de la seconde tangente commune au cercle et à la parabole. Si l'on fait

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_1 = \operatorname{cotg}^3 \frac{1}{2}\varphi, \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_3 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi_4 = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi,$$

on trouve $$R = -\frac{p}{8}\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}\right)^3 = -\frac{p}{\sin^3 \varphi}$$

$$\beta = \frac{p}{8}\left(\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi}\right)^3 = -p \operatorname{cotg}^3 \varphi,$$

$$\frac{8\alpha - 2p}{p} = 3\left(\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}\right),$$

$$\frac{8(\alpha - p)}{p} = 3\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}\right)^2 = 12\operatorname{cotg}^2\varphi,$$

$$\frac{8\alpha + 4p}{p} = 3\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}\right) = \frac{4}{\sin^2\varphi}.$$

Ces égalités conduisent à la construction du centre de courbure et à l'équation de la développée.

Soient R_1, R_2, R_3, R_4 les rayons de courbure aux points de contact de quatre tangentes concycliques. On vient de trouver

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi_1} = \left(-\frac{8R_1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ etc.}$$

Par suite, en vertu de l'égalité (7) :

$$\frac{R}{p} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{R_1}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{R_2}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{R_3}{p}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{R_4}{p}\right)^{\frac{1}{3}}\right].$$

En particulier, si R est le rayon du cercle osculateur en un point M, et R_1 celui au point de contact de la seconde tangente commune au premier cercle et à la parabole, on a

$$\frac{4R}{p} - 3\left(\frac{R}{p}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{R_1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

PROPRIÉTÉS

DE

L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS

ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 30.)

---

5. — Ces préliminaires établis, observons que le point N de l'hyperbole (Γ) est le centre d'un faisceau de droites passant par des points correspondants de l'hyperbole et de

la droite HK, ces points étant d'ailleurs répartis suivant une certaine symétrie.

Soit S'Σ' la corde de l'hyperbole parallèle à HK. Les propriétés remarquées jusqu'à présent permettent de reconnaître que SN passe par le point Σ' et que S'N rencontre HK en un point Σ correspondant à Σ'.

Si nous resserrons l'intervalle S'Σ', nous aurons à la limite, sur l'hyperbole (Γ), le point de contact Δ' de la tangente parallèle à HK, et au point Δ où Δ'N rencontre HK, le point correspondant à Δ'.

Ce point Δ est donc, par sa nature même, un des *points doubles* de l'involution déterminée sur HK par les faisceaux de droites (NH, ND'), (NZ, NK), (NS, NΣ).

Mais la direction f_1f_2S est conjuguée à celle des cordes parallèles à HK; le point Δ' est donc à l'intersection de cette droite f_1f_2 ou OS avec l'hyperbole (Γ).

L'autre point double Δ est à l'intersection de HK avec la ligne NΔ', c'est-à-dire la ligne qui joint le point N au point diamétralement opposé à Δ' sur l'hyperbole (Γ).

Le point Ω, défini plus haut, est au milieu de l'intervalle $\Delta\Delta_1$, et représente, par conséquent, le *point central* de l'involution précitée, dont Δ et Δ_1 sont les deux *points doubles*. (Voir Chasles, *Géométrie supérieure*, 1880, §§ 202 à 213.)

Ces considérations donnent une idée du rôle remarquable et important du point N dans toute cette nouvelle série de propriétés du centre O du cercle (C').

La notion des points doubles Δ, Δ_1, et du point central Ω devient l'origine d'une série de relations métriques.

Par suite du mode de construction, les points précités sont toujours réels.

Le point central Ω est à l'intersection de HK avec la tangente à l'hyperbole (Γ) en N, c'est-à-dire avec une parallèle NΩ à H'K.

Les points doubles Δ, Δ_1 s'obtiennent facilement. Il suffit de décrire, sur un segment de l'involution tel que HD', ZK, etc., comme diamètre, une circonférence, et de lui mener une tangente par le point Ω. La longueur de cette tangente est constante et égale à ΩΔ ou $\Omega\Delta_1$.

6. — Passons aux relations métriques.

On a déjà, pour le point central,

$$\Omega H \,.\, \Omega D' = \Omega Z \,.\, \Omega K.$$

Mais

$$\Omega D' = \Omega H - HD', \quad \Omega Z = \Omega H - \frac{HK}{2}, \quad \Omega K = \Omega H - HK$$

L'équation précédente devient alors

$$\Omega H = \frac{HK}{3 - \frac{m^4}{p^4}} = \frac{abcp^4}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}\sqrt{p^4 - n^4}} = \frac{HKp^4}{2(p^4 - n^4)}.$$

Pour les points doubles, on a

$$\Omega Z.\, \Omega K = \overline{\Omega\Delta}^2 = \Omega H(\Omega H - HD') = \frac{a^2b^2c^2n^4}{m^4(p^4 - n^4)}$$

et

$$\Omega\Delta = \Omega\Delta_1 = \frac{abcn^2}{m^2\sqrt{p^4 - n^4}} = \frac{n^2\sqrt{2n^4 - p^4}}{2(p^4 - n^4)}HK.$$

Pour déterminer la position du point Σ, l'on a

$$\Omega S \,.\, \Omega\Sigma = \overline{\Omega\Delta}^2;$$

d'où

$$\Omega\Sigma = \frac{\overline{\Omega\Delta}^2}{\Omega H - HS} = \frac{2n^8abc}{m^2\sqrt{2n^4 - p^4}\sqrt{p^4 - n^4}(n^4 + p^4)}.$$

Enfin, au moyen des relations trouvées dans toutes les précédentes notices, l'on vérifiera aisément les identités qui expriment que quatre points sont en ligne droite.

Ainsi, pour les quatre points H, Z, S, D', par exemple, l'on doit avoir

$$HZ.SD' + ZS.HD' = HS.ZD',$$

ou

$$HZ.SD' = HS.ZD' - ZS.HD',$$

relation qui se réduit effectivement à

$$\frac{a^2b^2c^2(p^4 - n^4)}{2n^4p^4} = \frac{a^2b^2c^2(p^4 - n^4)}{2n^4 - p^4}\left(\frac{1}{p^4} - \frac{1}{2n^4}\right).$$

Note. — La propriété fondamentale que traduit cette relation entre les segments déterminés sur une droite par quatre points a été indiquée, pour la première fois, par Euler.

7. — Ainsi que je l'ai fait remarquer (*loc. cit.* p. 203), la

conique (Γ) n'est pas le seul exemple d'hyperbole équilatère passant par plus de cinq points du plan. Le théorème rappelé à propos du quadrilatère s'applique au triangle, mais alors le nombre de points, de neuf ou dix, se réduit à six:

1° Les trois milieux A′,B′,C′, des côtés;

2° Le centre H du cercle circonscrit au triangle ABC (qui est alors le point de rencontre des hauteurs, ou l'orthocentre du triangle A′B′C′) (propriété connue);

3° Un sommet A du triangle;

4° L'intersection D du côté opposé BC avec la tangente en A au cercle circonscrit.

Le centre de cette hyperbole, circonscrite au parallélogramme AB′A′C′, est au point d'intersection des diagonales AA′, B′C′, et les deux points A et A′ peuvent être considérés comme les centres des faisceaux générateurs de l'hyperbole. Les directions des asymptotes sont celles des bissectrices de l'angle BAC. (E. Dewulf.)

8. — Il me reste, toutefois, à signaler une propriété plus intéressante, qui offre alors une plus complète analogie avec la notion des hyperboles de neuf points. J'ai eu l'occasion de reconnaître, à propos d'une question toute différente (*) de celle qui nous occupe actuellement, la notion d'une autre hyperbole équilatère passant aussi par dix points du plan, et circonscrite à un triangle au lieu d'être circonscrite à un quadrilatère.

Considérons, en effet, un triangle ABC. Toutes les hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle passent par son orthocentre. Ce quatrième point ne détermine donc pas ces coniques, et pour en fixer une, il est nécessaire d'avoir une autre donnée. Prenons par exemple, la direction (D) d'une des asymptotes.

Soient I, N_a, N_b, N_c les centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits. En vertu d'une propriété bien connue et d'ailleurs presque évidente, I est l'orthocentre du triangle $N_aN_bN_c$. Par les sommets A, B, C du triangle orthocentrique,

(*) *Nouvelles Annales*, t. XVIII, 1859. Question 475 : Construire une ellipse, connaissant une directrice et trois tangentes.

menons des parallèles et des perpendiculaires à la direction (D). Elles rencontreront les côtés opposés en six nouveaux points α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. Cela posé, la propriété que j'ai à signaler est la suivante :

L'hyperbole équilatère passant par le centre du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits renferme les milieux des six segments interceptés par chacun des côtés du triangle orthocentrique sur des parallèles aux deux directions rectangulaires des asymptotes menées par les sommets opposés.

Ce théorème peut s'énoncer encore autrement.

Si de chaque sommet d'un triangle ABC l'on mène des parallèles à deux directions fixes rectangulaires, les milieux des six segments et les quatre centres du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits se trouvent sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux deux directions données.

Ce qui précède renferme la solution du problème de la détermination d'une hyperbole équilatère passant par trois points et ayant ses asymptotes parallèles à deux directions données rectangulaires.

J'ignore si ces propriétés sont nouvelles.

Voici, d'ailleurs, l'élégante démonstration qui en a été donnée par M. E. Dewulf.

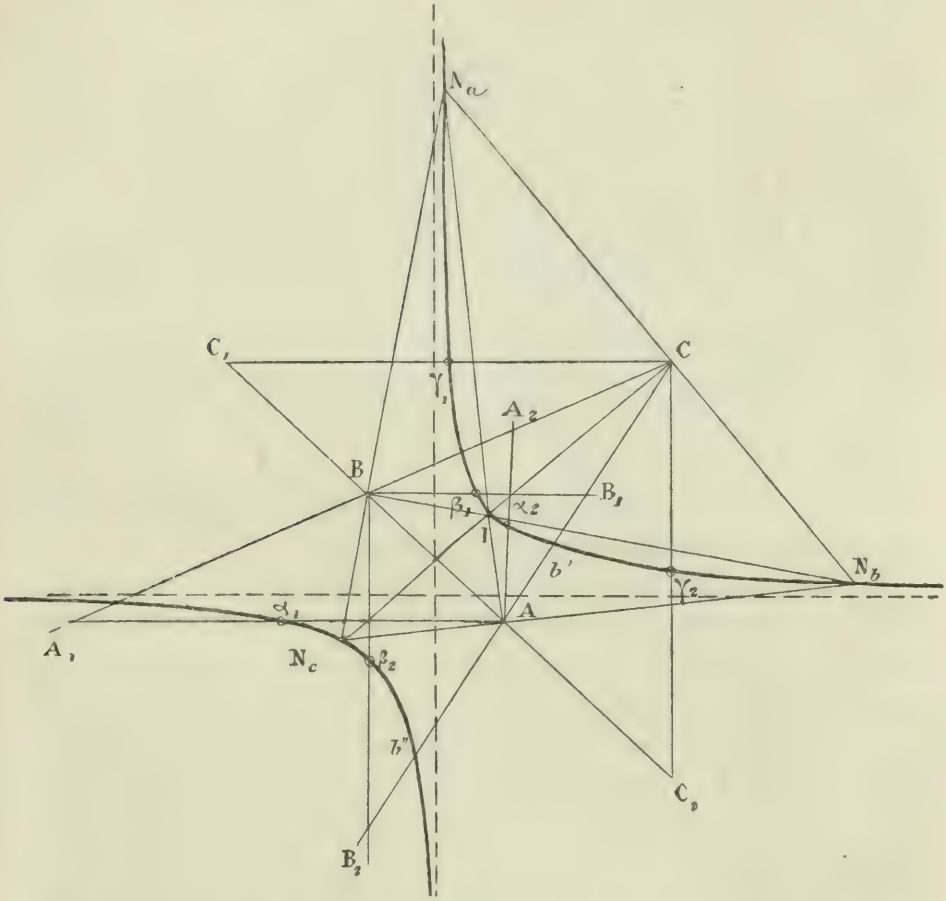
Soient BB_1 le segment arrêté au côté AC, β_1 le milieu de BB_1.

Le triangle ABC est le triangle conjugué commun à toutes les hyperboles équilatères du faisceau $N_aN_bN_cI$, puisque ABC est le triangle diagonal du quadrilatère $N_aN_bN_cI$.

Il en résulte que l'hyperbole équilatère du faisceau qui est déterminée par le point B_1 de AC est tangente en ce point B_1 à BB_1.

Considérons maintenant la droite indéfinie BB_1 comme une parallèle une des asymptotes d'une des courbes (C) du faisceau; elle rencontre (C) à l'infini, donc son second point d'intersection avec l'hyperbole est le point central de l'involution déterminée sur BB_1 par les courbes du faisceau, c'est-à-dire le point milieu des points doubles de cette involution. Or, ces points doubles sont le point B qui appartient à l'hyperbole équilatère, dégénérée en ses deux asymptotes N_aN_c, BN_b

et le point B_1, puisque l'hyperbole équilatère $N_aN_bN_cIB_1$ est tangente en B_1 à BB_1. Le point β_1 milieu de BB_1 est donc un point de la courbe.



Il résulte de là que si l'on joint le point B aux points d'intersection b', b'', de AC avec l'hyperbole équilatère ($N_aN_bN_cI$, BB_1), c'est-à-dire dont une asymptote est parallèle à BB_1, l'on a les tangentes à l'hyperbole équilatère en ces points b', b''. Cette conséquence paraît digne de remarque.

La même conclusion s'applique aux lignes qui joignent C aux points d'intersection avec AB, et A aux points d'intersection avec BC.

9. — Il serait probablement facile de déterminer d'autres troupes de points du plan situés sur une même hyperbole

équilatère, cette courbe jouant un rôle semblable à celui de la circonférence.

Pour en donner une idée, il suffira de signaler une conséquence très simple de la situation de l'orthocentre H′ du triangle ABC sur l'hyperbole équilatère circonscrite à ce triangle.

Nous avons vu, en effet, que cette hyperbole passe par le point N, autrement dit, que la circonférence circonscrite à ce même triangle rencontre l'hyperbole équilatère en un quatrième point qui est diamétralement opposé, sur cette conique, à l'orthocentre du triangle. Or, le quadrilatère ABCN donne quatre triangles ABC, ABN, BCN, ACN, et quatre orthocentres H′, H_1, H_2, H_3. et quatre points N, N_1, N_2, N_3, diamétralement opposés aux précédents par rapport au centre W de l'hyperbole. Voilà donc un groupe de huit points situés sur une même hyperbole équilatère circonscrite à un quadrilatère inscriptible.

On en déduit cette propriété, sans doute connue ou déjà remarquée, du quadrilatère inscriptible :

Les lignes qui joignent un sommet d'un quadrilatère inscriptible à l'orthocentre du triangle des trois autres sommets passent par un même point, qui est le centre commun de ces quatre segments et de l'hyperbole équilatère circonscrite au quadrilatère donné.

Au reste, et en résumé, la géométrie de l'hyperbole équilatère a fixé depuis longtemps l'attention des géomètres en raison de l'analogie des propriétés de cette courbe avec les propriétés du cercle. Pour ne citer que les travaux les plus connus, il suffira de signaler ceux de Plücker, Poncelet et Brianchon, Bobillier, Mention, P. Serret.

(A suivre.)

SUR LES PODAIRES

PRINCIPE D'UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. — Le but de la présente Note est de faire ressortir ce point, à savoir que la considération des *podaires* renferme le

principe d'une méthode de transformation géométrique susceptible d'assez nombreuses applications et qui est à la portée des élèves de Mathématiques élémentaires.

2. — Si d'un point O on abaisse des perpendiculaires sur les divers plans tangents à une surface S, le lieu des pieds de ces perpendiculaires est une surface S'.

La surface S' est dite *podaire* de la surface S relativement au point O, et la surface S *antipodaire* de la surface S', relativement au même point.

Joignons le point O à trois points M, M', M'' infiniment voisins sur la surface S, et décrivons des sphères sur OM, OM' et OM'' comme diamètres. Ces trois sphères se coupent, en outre du point O, en un point H, symétrique du point O par rapport à leur plan diamétral commun ; le point H est, par suite, le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan MM'M'', qui est, à la limite, tangent à la surface S; ce point H appartient donc à la podaire de la surface S relativement au point O, et on peut énoncer les théorèmes suivants :

La podaire d'une surface S *relativement à un point* O *est l'enveloppe des sphères qui ont pour diamètres les rayons vecteurs joignant le point* O *aux divers points de la surface* S.

L'antipodaire d'une surface S *relativement à un point* O *est le lieu des points diamétralement opposés au point* O *dans les sphères qui passent par ce point et sont tangentes à la surface* S.

3. — Considérons une surface S et sa podaire S' relativement à un point O. Prenons les inverses Σ et Σ' de ces surfaces par rapport au point O.

Soit T un plan tangent à S; la sphère θ, inverse de ce plan, passe par le point O et est tangente à Σ. Le pied A de la perpendiculaire abaissée de O sur P appartient à la surface S'; par suite, l'inverse de ce point, qui est diamétralement opposé au point O dans la sphère θ, appartient à la surface Σ'.

La surface Σ' est donc, en vertu du second des théorèmes précédents, l'antipodaire de Σ relativement au point O' et l'on peut dire que

Relativement à un point quelconque, l'inverse de la podaire d'une surface est l'antipodaire de l'inverse de cette surface.

Comme corollaire, on voit que

La podaire et l'antipodaire d'une anallagmatique, relativement à l'un de ses pôles principaux, sont inverses par rapport à ce pôle.

4. — Mais venons à l'objet principal de cette Note ; nous voyons que la considération des podaires conduit à la méthode de transformation suivante :

Étant donné un point fixe O, *prenons un point quelconque* M *dans l'espace et décrivons sur* OM *comme diamètre une sphère; cette sphère sera dite transformée podaire du point* M *relativement au point* O.

L'enveloppe des sphères transformées podaires de tous les points d'une surface est la transformée podaire de cette surface.

On a, dans le plan, la même définition en remplaçant respectivement les termes de surface et de sphère par ceux de courbe et de cercle.

5. — La transformée podaire d'un plan dans l'espace, ou d'une droite dans le plan, est un point qui est le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle de la transformation sur ce plan ou sur cette droite.

Quelques remarques évidentes, jointes aux notions qui précèdent, constituent tout le procédé de transformation que nous avons en vue. Nous allons maintenant consigner ces remarques en les appuyant de quelques exemples très simples. *(A suivre.)*

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Henry Bourget**, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Clermont-Ferrand.

---

1. — Dans la théorie des coniques, on cherche les asymptotes de ces courbes en les considérant comme des diamètres coïncidant avec leurs conjugués. On peut se demander s'il est possible d'étendre ces considérations à la recherche des asymptotes dans les courbes planes de degrés

supérieurs; c'est à cette question que nous allons essayer de répondre dans cette note.

2. — Résolvons d'abord le problème suivant, qui peut être regardé, à un certain point de vue, comme la généralisation de la théorie des diamètres dans les coniques.

Étant données une courbe algébrique (c) *de degré* m *et une direction* d *dans son plan, on prend sur chacune des parallèles à* d *le centre des moyennes distances des* m *points d'intersection de cette droite avec la courbe. Lieu de ces points.*

Il est évident, *à priori*, que ce lieu est une droite qu'on peut nommer *le diamètre conjugué* de la direction donnée *d*. Nous rappellerons ici comment on trouve l'équation de cette droite.

Soit $f(x, y) = 0$ (1), l'équation de la courbe (c) rapportée à des axes quelconques; soit, de plus, $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho$, la direction donnée d. La parallèle à d menée par un point de coordonnées x_0 et y_0 et faisant partie du lieu sera

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho.$$

Les valeurs de ρ donnant les points d'intersection de la droite ci-dessus et de la courbe sont les racines de l'équation

$$\begin{aligned} f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) &= \varphi_m(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) \\ &+ \varphi_{m-1}(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) + \ldots = 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

En développant suivant la formule de Taylor, en considérant x_0, y_0 comme des accroissements, on obtient

$$\begin{aligned} f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho) = \rho^m\varphi_m(\alpha, \beta) + \rho^{m-1}[x_0\varphi'_{m,x}(\alpha, \beta) \\ + y_0\varphi'_{m,y}(\alpha, \beta)] \\ (1) \qquad + \rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\alpha, \beta) \qquad + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}$$

D'autre part, puisque le point de coordonnées (x_0, y_0) fait partie du lieu, on a, d'après l'énoncé, en désignant par ρ_1, ρ_2, ... ρ_m les m racines de l'équation (1) et par ρ, le ρ d'un point de lieu :

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m}{m}.$$

qui devient en prenant (x_0, y_0) comme origine des ρ,

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m = 0;$$

par suite, nous aurons l'équation du lieu en exprimant que la somme des racines de l'équation (1) en ρ est nulle, ce qui donne pour équation de ce lieu

$$x\varphi'_{m,x}(\alpha, \beta) + y\varphi'_{m,y}(\alpha, \beta) + \varphi_{m-1}(\alpha, \beta) = 0,$$

ce qui définit bien une droite.

3. — Ceci posé, considérons une courbe plane (c) de degré m et soit d l'une de ses asymptotes.

Une parallèle quelconque s à d coupe (c) en m points dont l'un est le point de contact de l'asymptote avec la courbe; et le centre des moyennes distances de ces m points est précisément ce point de contact. Dans le cas où la droite s se confond avec d, le centre des moyennes distances devient indéterminé sur d et le lieu précédent est l'asymptote elle-même. Comme, d'autre part, l'équation de ce lieu est

$$x\varphi'_{m,x}(\alpha, \beta) + y\varphi'_{m,y}(\alpha, \beta) + \varphi_{m-1}(\alpha, \beta) = 0,$$

nous concluons que cette équation, dans laquelle (α, β) est une solution de l'équation $\varphi_m(\alpha, \beta) = 0$, définit l'asymptote de la courbe (c), parallèle à cette direction.

Nous retrouvons ainsi les résultats auxquels on est conduit par la théorie des tangentes.

Remarque. — Ajoutons que la même méthode s'applique à la recherche des plans asymptotiques d'une surface.

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 36.)

Théorème. — *Lorsque deux polynômes entiers* U, V *sont premiers entre eux, les polynômes* U^p, V^p *sont aussi premiers entre eux*: p *désignant un nombre entier et positif.*

Puisque U et V sont premiers entre eux, nous avons

$$\mu U + \nu V = 1.$$

Élevons les deux membres de cette identité à la puissance p, les principes de la multiplication algébrique prouvent que nous avons

$$\mu^p U^p + \nu^p V^p + UVW = 1, \qquad (1)$$

W désignant une forme entière.

Cela posé, soit D le plus grand commun diviseur de U^p et de V^p; je dis que D est premier avec U.

En effet, si U et D admettaient un diviseur Δ, V^p étant divisible par D admettrait, lui aussi, ce diviseur Δ et le premier membre de (1) serait divisible par Δ; hypothèse évidemment inadmissible.

Nous voyons de même que V et D sont premiers entre eux.

D'après cela, D divisant U^p, mais étant premier avec U, doit diviser U^{p-1}; nous reconnaissons de même que D divise V^{p-1}. Ainsi, D est un diviseur commun à U^{p-1} et à V^{p-1}.

En poursuivant ce raisonnement, nous démontrerons finalement que D divise U et V; et comme U et V sont premiers entre eux, D n'est pas un diviseur algébrique.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

8. — *Soit :*

$$x^3 + px + q = 0,$$

une équation donnée; a, b, c, *désignant ses trois racines, on propose de calculer* U,

$$U = \Sigma \frac{a}{1 + a}.$$

Transformons l'équation donnée au moyen de la formule

$$y = \frac{x}{1 + x};$$

nous trouvons immédiatement :

$$y^3(1 + p - q) + y^2(3q - 2p) + y(p - 3q) + q = 0. \quad (1)$$

Cette équation donne, entre autres choses,

$$\Sigma \frac{a}{1+a} = \frac{2p-3q}{p+1-q}.$$

Nous donnons, plus loin, une généralisation de cet exercice.

9. — *Les conditions et les notations de l'exercice précédent subsistant, trouver* U,

$$U = \Sigma \frac{a^2}{(1+a)^2}.$$

Posons

$$y = \frac{x}{1+x},$$

puis cherchons l'équation en y. De la relation (1) on déduit la somme des carrés des racines, en appliquant la formule connue :

$$S_2 = \frac{A_1^2 - 2A_0A_2}{A_0^2}.$$

Le résultat est donc

$$(p+1-q)^2U = (3q-2p)^2 - 2(p+1-q)(p-3q).$$

On observera que la méthode que nous indiquons ici s'applique avec avantage aux fonctions symétriques de la forme $\Sigma \frac{a^p}{(1+a)^p}$.

10. — *Résoudre l'équation*

$$(x+aj)^3 + (x+aj^2)^3 = 0, \qquad (1)$$

j *et* j^2 *désignant les racines cubiques imaginaires de l'unité.*

On sait que l'on a

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A+Bj)(A+Bj^2).$$

En appliquant cette identité au premier membre de (1), et en tenant compte des égalités :

$$j^3 = 1, \qquad j + j^2 = -1,$$

on trouve d'abord

$$(2x-a)(x+a)(1+j)(x+xj^2+2aj) = 0.$$

et, finalement,

$$(2x-a)(x+a)(x-2a) = 0.$$

11. — *Soit l'expression* $(t + \theta)^m$ *; on y remplace successivement* θ *par les* m *racines de l'équation*

$$x^m - 1 = 0, \qquad (1)$$

démontrer que la somme U *des résultats ainsi obtenus est égale à*

$$m(t^m + 1).$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, les m racines de (1); en désignant par S_p la somme des puissances p de ces racines, les formules de Newton, appliquées à l'équation (1), prouvent que l'on a

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_{m-1} = 0,$$

et

$$S_m = m;$$

et, d'après cela, l'égalité

$$U = (t + \alpha_1)^m + (t + \alpha_2)^m + \ldots + (t + \alpha_m)^m$$
$$= mt^m + C_m{}^1 t^{m-1} S_1 + C_m{}^2 t^{m-2} S_2 + \ldots + C_m{}^{m-1} t S_{m-1} + S_m,$$

donne bien

$$U = m\,(t^m + 1). \qquad \textit{(A suivre.)}$$

QUESTION 115

Solution par M. Taratte, élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Construire la courbe représentée par l'équation :

$$x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 1 = 0.$$

(E. V.)

L'équation peut se mettre sous la forme

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 2x^2y^2 = 0.$$

La courbe se compose donc des deux coniques dont les équations sont

$$x^2 + y^2 - xy\sqrt{2} - 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + xy\sqrt{2} - 1 = 0.$$

Ce sont deux ellipses égales ayant pour axes les bissectrices des angles des axes de coordonnées et coupant ces axes de coordonnées à une distance de l'origine égale à l'unité. Le carré du demi grand axe est $2 + \sqrt{2}$, le carré

du petit axe est $2 - \sqrt{2}$, les foyers sont à une distance du centre dont le carré est $2\sqrt{2}$.

Même solution par M. Ferval, élève au lycée Henri IV (classe de M. Macé de Lépinay), et M. Léon Clément, élève au lycée de Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

138. — Trouver et discuter la courbe enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par quatre points fixes. *(Hadamard.)*

N. B. — Cette courbe est une courbe du quatrième degré qui a une tangente double à l'infini et trois points de rebroussement. Ces trois points sont les sommets d'un des triangles maxima inscrits dans une conique homothétique et concentrique au lieu des centres des coniques données.

Ce dernier lieu est d'ailleurs tritangent à la courbe. Les diamètres des points de contact sont les tangentes de rebroussement et, en même temps, des diamètres de la quartique.

Si le faisceau de coniques se compose d'hyperboles équilatères, la courbe devient une hypocycloïde à trois rebroussements (d'où l'on conclut que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde est un cercle).

139. — Si d'un point P on mène des tangentes à des cercles ayant même axe radical, on sait que le lieu des points de contact est une cubique circulaire. Faire voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une cubique circulaire puisse être ainsi engendrée est que les asymptotes imaginaires se rencontrent sur la courbe. *(E. Cr.)*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 4870-5.

SUR LES TANGENTES COMMUNES

A UNE ELLIPSE ET A UN CERCLE

Par M. **J. Neuberg**, professeur à l'Université de Liège.

1. — Pour que deux droites rencontrent une conique en quatre points d'une même circonférence de cercle, il faut et il suffit qu'elles fassent des angles égaux, en sens contraire, avec un axe de la conique.

Ce théorème bien connu a pour corrélatif le suivant, dont le rôle, nous semble-t-il, n'a pas été suffisamment apprécié :

Pour que les tangentes menées de deux points à une conique enveloppent un même cercle, la condition nécessaire et suffisante est que ces points soient sur une même conique homofocale à la première.

Voici une démonstration analytique de cette élégante proposition due à Chasles (*Comptes rendus*, t. XVII). Si l'on prend pour coordonnées tangentielles les réciproques des segments compris sur les axes d'une ellipse E entre le centre et une droite quelconque, l'équation de l'ellipse est :

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0,$$

et celle d'un cercle de centre I (x_0, y_0) est

$$(x_0u + y_0v - 1)^2 - R^2(u^2 + v^2) = 0. \qquad (1)$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de deux sommets opposés M_1, M_2 du quadrilatère circonscrit au cercle et à l'ellipse; l'équation du cercle pourra aussi prendre la forme

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 - K(x_1u + y_1v - 1)(x_2u + y_2v - 1) = 0. \quad (2)$$

Si l'on écrit que les équations (1) et (2), ne diffèrent que par un facteur constant l, on trouve l'identité

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 + lR^2(u^2 + v^2) \qquad (3)$$
$$= (x_0u + y_0v - 1)^2 + Kl(x_1u + y_1v - 1)(x_2u + y_2v - 1).$$

Les deux membres de (3), égalés à zéro, doivent représenter la même courbe. Le premier membre indique une conique ayant pour axes $2\sqrt{a^2 + lR^2}$, $2\sqrt{b^2 + lR^2}$, et qui, par suite, est homofocale à l'ellipse proposée; d'après la forme du deuxième membre, la courbe touche les droites

IM_1, IM_2, aux points M_1, M_2. Le théorème de Chasles est ainsi démontré.

Réciproquement, *étant données deux coniques homofocales, si de deux points de l'une on mène des tangentes à l'autre, les quatre droites ainsi obtenues enveloppent un même cercle.*

2. — La proposition suivante résulte immédiatement de ce qui précède :

Si l'on considère tous les cercles touchant deux tangentes fixes M_1N, M_1N' *menées à une ellipse* E, *le lieu du point d'intersection* M_2 *des deux autres tangentes communes à l'un de ces cercles et à l'ellipse, se compose des deux coniques homofocales à* E *et passant par* M_1.

3. — L'hyperbole homofocale menée par M_1 rencontre E en quatre points P, P′, P″, P‴. Ces points sont les points de contact de cercles touchant l'ellipse E et les droites M_1N, M_1N'; car ils correspondent à des cercles ayant avec E deux tangentes communes confondues.

Il existe une infinité de cercles touchant E en P; les tangentes communes à l'un de ces cercles et à E se coupent sur l'hyperbole. Donc, *si l'on construit les cercles touchant une ellipse* E *en un point donné* P, *le lieu du point de concours des tangentes communes à l'un de ces cercles et à l'ellipse est l'hyperbole homofocale passant par* P. (Concours général de 1844.)

4. — Soit M_1QQ' le triangle circonscrit à E et à l'un des cercles touchant E en P. Les points Q, Q′ peuvent être considérés comme deux sommets opposés d'un quadrilatère M_1QPQ' circonscrit à l'ellipse E et au cercle; donc ils se trouvent sur une conique homofocale à E.

De là on conclut cet autre énoncé de la question du Concours de 1844 : *Une tangente fixe au point* P *d'une ellipse* E *est rencontrée par une conique homofocale à* E *en deux points* Q,Q′ *tels que les autres tangentes menées de* Q, Q′ *à* E *se coupent sur l'hyperbole homofocale à* E *qui passe par* P.

5. — Soit ABC un triangle formé par trois tangentes à l'ellipse E, et soient t, t', t'', t''' les quatrièmes tangentes communes à E et à l'un des quatre cercles inscrits à ABC. D'après le théorème du § 1, les points α, α', α'', α''', où la droite BC est coupée respectivement par t, t', t'', t''', sont,

deux sur l'ellipse homofocale à E, et les deux autres sur l'hyperbole homofocale passant par A. Donc, d'après le théorème du § 4, les lignes t, t', t'', t' forment un quadrilatère circonscrit à E et tel que deux des sommets opposés sont situés sur l'hyperbole homofocale passant par le point de contact de BC avec E; ce quadrilatère est donc circonscriptible à un cercle.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème assez curieux :

Étant donnés une ellipse E, *un triangle circonscrit* ABC, *et les quatre cercles inscrits à ce triangle, les quatrièmes tangentes communes à* E *et à l'un des cercles enveloppent un même cinquième cercle, et forment un quadrilatère complet tel que les trois couples de sommets opposés se trouvent respectivement sur les trois hyperboles homofocales à* E *qui passent par les points de contact de* E *avec les côtés du triangle* ABC.

Nous ne nous arrêterons pas à d'autres propriétés de la figure précédente.

6. — Considérons maintenant le cercle osculateur au point P de l'ellipse E. Trois des tangentes communes à ce cercle et à l'ellipse sont confondues avec la tangente menée par P; soit QRR′ la quatrième tangente commune touchant l'ellipse en R et le cercle en R′, et rencontrant la tangente menée par P au point Q. Les points Q et P peuvent être regardés comme les sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit à l'ellipse et au cercle; donc ils sont sur une même hyperbole homofocale à E. Le centre I du cercle se trouve sur la normale à E par P, et sur la bissectrice de l'angle RAP, bissectrice qui est tangente à l'hyperbole.

Donc : *le centre du cercle osculateur en un point* P *d'une ellipse est le pôle de la tangente commune par* P, *par rapport à l'hyperbole homofocale à* E *qui passe par* P; *cette tangente et l'autre tangente commune au cercle et à l'ellipse se coupent sur la même hyperbole.*

7. — La question que nous venons de traiter conduit à plusieurs problèmes intéressants que nous nous contenterons d'énoncer :

a. Lieu du point Q où une tangente à l'ellipse rencontre l'hyperbole homofocale qui passe par le point de contact;

b. Lieu du milieu de la droite PQ;

c. Enveloppe de la droite QI;

d. — — PR;

e. — — PR';

f. Lieu du point R';

g. Combien de cercles osculateurs touchent une même tangente RQ menée à l'ellipse ?

PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 58.)

10. — Après l'hyperbole équilatère passant par plusieurs points remarquables du plan, la courbe la plus intéressante à étudier est la parabole. Mais ici, l'intérêt du problème s'accentue davantage, par suite d'une circonstance curieuse et pour ainsi dire inattendue.

Nous arrivons, en effet, à la notion de deux groupes fort remarquables de trois paraboles, ayant deux à deux pour foyers communs trois points du cercle de Brocard. En outre, les paraboles d'un de ces groupes sont doublement tangentes à deux droites rectangulaires fixes, que l'on peut déterminer par une construction graphique.

Ces six paraboles et leurs propriétés focales ont été étudiées pour la première fois par M. A. Artzt, dans un Programme scolaire du Gymnase de Recklinghausen, édité au commencement de l'année 1884, et intitulé : *Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreicks und auf deren Mittelsenkrechten, sowie über kongruente Strahlenbüschel aus den Ecken desselben; ein Beitrag zur Geometrie des Brocardschen Kreises.*

Mais elles ont été rencontrées, indépendamment de ces recherches, par d'autres géomètres, et, circonstance assez singulière, les paraboles d'un groupe ont été étudiées par MM. E. Lemoine et R. Tucker, tandis que j'ai remarqué les paraboles de l'autre groupe en établissant, tout d'abord, la notion et l'existence des deux tangentes rectangulaires communes.

Le travail de M. A. Artzt établit, par conséquent, la liaison entre des recherches absolument indépendantes, et dont les résultats se complètent mutuellement.

Enfin, il paraît utile d'observer que ces résultats se présentent de la façon la plus naturelle, comme conséquence de certaines propriétés très simples, rencontrées déjà au cours de ces recherches. Les développements qui vont suivre pourront donc donner un nouvel et intéressant exemple de discussion d'un simple problème de la Géométrie du Triangle.

11. — Si, sur les côtés d'un triangle ABC, l'on construit intérieurement des triangles isoscèles semblables, ayant par conséquent le même angle φ à la base, les sommets A'B'C' de ces triangles déterminent un triangle A'B'C' dont le centre de gravité est le même que celui du triangle donné (voir *Nouv. Corresp. Math.*, t. V, 1879, p. 425-429; *Journal de Math. élém.* 1883, p. 97-98; *Congrès d'Alger* 1881, §§ 3 et 15; *Zeitschrift*, questions 195, 196, 201, t. XIII, 1882, p. 33 et 357-360). Cette proposition est d'ailleurs un cas particulier d'un théorème plus général : Si sur les côtés d'un triangle on construit des triangles semblables, le triangle des sommets a même centre de gravité que le triangle proposé. (J. Neuberg et Laisant.) Dans le cas des triangles isoscèles semblables, les lignes AA', BB', CC' concourent en un point M dont le lieu est une conique ayant pour équation

$$\frac{\sin(A-B)}{\gamma}+\frac{\sin(C-A)}{\beta}+\frac{\sin(B-C)}{\alpha}=0$$

(Kiepert, *Nouv. Annales*, t. VIII, 1869, p. 40-42).

Le triangle A'B'C' ne peut se réduire à un point; mais ses trois sommets peuvent se trouver en ligne droite *(N. C. M. loc. cit.)*.

Cette droite (T) correspond à un angle φ donné par la relation

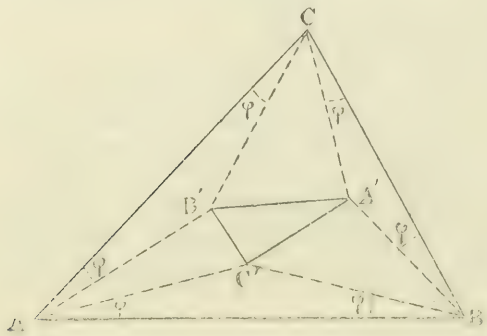
$$\sin(2\varphi + \alpha) = 2 \sin \alpha$$

ou

$$\operatorname{cotg}^2 \varphi - 2 \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \varphi + 3 = 0$$

avec

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}$$



(loc. cit.) et par conséquent, elle passe par le point E, centre de gravité.

Il est donc possible de la déterminer complètement par une première construction graphique *(N. C. M., loc. cit.)*.

Mais nous allons aussi lui reconnaître, très simplement, d'autres propriétés.

En effet, considérons en particulier la série des sommets A′ et B′. Ces points se trouvent sur les droites OA′, OB′ perpendiculaires aux milieux des côtés BC, AC du triangle, et l'enveloppe des droites A′B′ est, en vertu de propriétés bien connues, une parabole tangente aux droites OA′, OB′, ainsi qu'aux deux bissectrices de l'angle C et de son supplément, car ces deux bissectrices sont évidemment deux positions particulières de la droite A′B′, l'une correspondant à l'angle $\varphi = \frac{C}{2}$, l'autre à l'angle $\varphi = \frac{\pi + C}{2}$.

On obtiendrait, de la même façon, deux autres paraboles tangentes à des droites analogues.

Il y aurait à signaler également une cinquième tangente, la ligne qui joint les milieux des côtés du triangle qui comprennent l'angle considéré. Cette ligne correspond à l'angle $\varphi = 0$.

Mais il est bien clair que la tangente menée par le point E à chaque parabole doit coïncider avec la droite (T) définie précédemment.

On en conclut donc ce théorème, qui paraît curieux :

Les trois paraboles tangentes aux trois groupes de quatre droites constitués par les deux bissectrices de chaque angle d'un triangle et les perpendiculaires aux milieux des côtés qui comprennent cet angle, admettent une tangente commune (T) *qui passe par le centre de gravité* E *du triangle et rencontre les bissectrices intérieures en trois points* A′, B′, C′, *sommets de triangles isoscèles semblables* BA′C, AB′C, AC′B, *dont l'angle* φ *à la base est déterminée par la relation*

$$\sin(2\varphi + \alpha) = 2\sin\alpha,$$

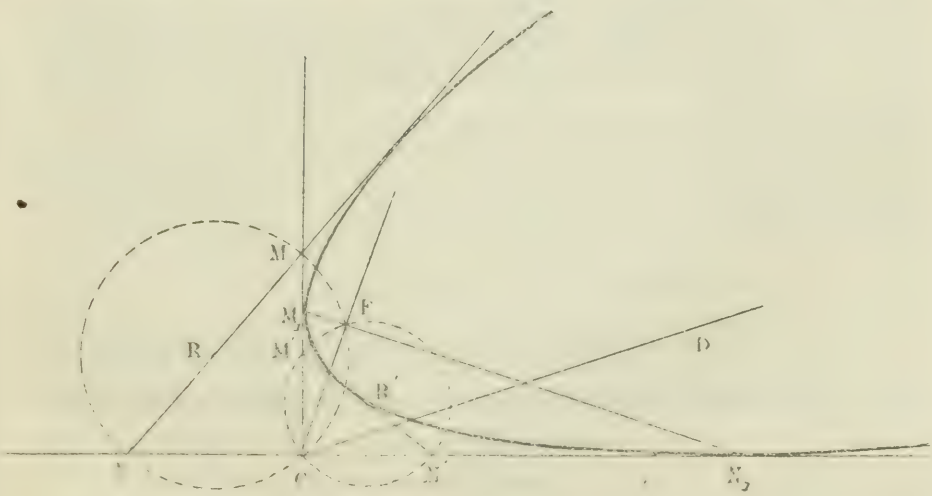
l'angle α *vérifiant l'égalité*

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

12. — Ainsi, nous connaissons, dans chaque parabole, six tangentes, dont deux rectangulaires, ou bien quatre tangentes et un point de la directrice.

On peut donc se proposer d'achever la détermination de ces coniques, en éliminant, bien entendu, certaines conditions évidemment surabondantes.

La tangente (T) menée par le point E peut être déterminée, comme nous l'avons dit, par une construction graphique indépendante de la notion des paraboles. Mais il est également possible de l'obtenir en se donnant seulement les quatre lignes



OA′, OB′, CI, CI′, que l'on sait être tangentes à une parabole et qui suffisent, — propriété connue, — pour déterminer entièrement cette conique. (Cremona. *Trad*, Dewulf, p. 114.)

Pour résoudre ce problème, nous pourrons, par exemple, nous appuyer sur cette propriété de la parabole :

La circonférence circonscrite au triangle formé par trois tangentes à la parabole passe par le foyer de cette conique (Poncelet, *Annales de Gergonne*, t. VIII, 1817 ; et *Appl. d'Analyse et de Géom.* 1864, p. 461-462) (Théorème de Lambert, *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*, sect. 1, d'après Poncelet; *Traité des Propr. proj.* 1822, p. 269-270).

Dans le cas particulier que nous étudions ici, l'un des angles des tangentes est droit.

Soient donc M_1, N_1, M'_1, N'_1 les points où les deux tangentes rectangulaires CM, CN sont rencontrées par les deux autres tangentes MN, M'N'. On prendra les milieux R, R' des deux segments MN, M'N'. Ce seront les centres des circonférences passant par le point C et par le foyer cherché F. Joignant FC, l'on aura une parallèle CD à l'axe de la parabole en construisant l'angle N'CD égal à l'angle FCM, propriété bien connue aussi (Poncelet, *loc. cit.*). De plus, en joignant CF et menant par F une perpendiculaire à CF, cette droite M_1N_1 rencontrera CM et CN aux deux points M_1 et N_1 de contact des tangentes rectangulaires (Poncelet, *Appl. d'Analyse et de Géom.* 1862, p. 54).

Enfin une parallèle à FD menée par F et une perpendiculaire à FD menée par C représenteront l'axe et la directrice de la parabole.

Le sommet et la tangente au sommet s'en déduisent immédiatement. *(A suivre.)*

SUR LES PODAIRES

PRINCIPE D'UNE MÉTHODE DE TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE

Par M. **Maurice d'Ocagne,** élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

(*Suite*, voir p. 64).

---

6. — Prenons d'abord les propriétés linéaires; leur transformation repose sur cette remarque, à savoir que :

La distance des centres des sphères (ou cercles) transformées

podaires de deux points est égale à la moitié de la distance de ces deux points.

En particulier, si l'on considère un cercle C et son centre c, on voit que les centres des cercles transformés podaires des points de C sont situés sur un cercle qui a pour centre le centre du cercle transformé podaire de c. Or, le cercle podaire de tout point de C est tangent à la podaire de C, et l'on sait que la podaire de C est un limaçon de Pascal. On peut donc énoncer ce théorème :

Si un cercle variable passe par un point fixe et que son centre décrive un cercle, ce cercle variable a pour enveloppe un limaçon de Pascal.

7. — La transformation des propriétés angulaires repose sur les deux remarques suivantes :

1° *L'angle sous lequel se coupent les sphères (ou cercles) transformées podaires de deux points est égal à l'angle sous lequel on voit la distance de ces deux points du pôle de la transformation;*

2° *L'angle sous lequel on voit la distance des points transformés podaires de deux plans (ou de deux droites) est égal à l'angle de ces plans (ou de ces droites).*

Comme exemple, prenons cette proposition : si les côtés d'un angle constant tournent autour de deux points, la bissectrice de cet angle tourne aussi autour d'un point.

Transformant par podaires et appliquant la seconde des deux remarques qui précèdent, on a ce théorème :

Si deux points A *et* B *se déplacent respectivement sur deux cercles de manière que leur distance soit vue de l'un des points communs* O *à ces deux cercles sous un angle constant, le milieu de l'arc* AB *sur le cercle circonscrit au triangle* AOB *décrit aussi un cercle passant par le point* O.

8. — Les propriétés barycentriques se transforment aussi très aisément, si l'on observe que :

Le centre de gravité des centres des sphères podaires d'un système de points est le centre de la sphère podaire du centre de gravité de ces points.

En particulier, si ce centre de gravité est fixe, le centre de gravité des centres des sphères podaires est, lui aussi, fixe.

Prenons comme exemple ce théorème : le centre de gravité des points de contact d'une surface S avec ses plans tangents parallèles à un plan donné est fixe quel que soit ce plan.

Soit S′ la podaire de S relativement au point O. Les plans tangents à S parallèles ont pour podaires des points de S′, en ligne droite avec le point O ; les points de contact de ces plans tangents ont pour podaires les sphères tangentes à S′ aux points dont il vient d'être parlé, et passant par le point O; le centre de gravité des centres de ces sphères sera fixe, en vertu de la remarque précédente. Comme d'ailleurs on peut disposer de la surface S pour que S′ soit une surface quelconque donnée, on a ce théorème, énoncé par nous dans une note présentée à l'Académie des sciences (*).

Si une droite variable passant par un point fixe O *coupe une surface algébrique donnée aux points* A_1, A_2, ... A_p, *le centre de gravité des centres des sphères qui passent par le point* O *et qui touchent la surface donnée respectivement aux points* $A_1, A_2, \ldots A_p$, *est un point fixe.*

9. — Cette manière d'envisager les podaires a encore un autre intérêt. En effet, si nous appelons podaire d'une courbe gauche le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes à cette courbe, la courbe ainsi obtenue n'a aucun rapport avec la surface podaire d'une surface passant par la courbe gauche donnée, tandis que, d'après la définition que nous avons adoptée, la podaire de la courbe gauche est la surface enveloppe des sphères qui ont pour diamètres les vecteurs des divers points de cette courbe ; cette surface est tangente à la surface podaire d'une surface quelconque passant par la courbe gauche donnée. On peut l'engendrer d'une autre manière, en abaissant du point fixe des perpendiculaires sur les tangentes de la courbe gauche et en décrivant sur ces droites comme diamètres des cercles dans des plans perpendiculaires aux tangentes correspondantes; la surface, lieu de ces cercles, est la podaire en question.

(*) Séance du 10 novembre 1884. Voir *Comptes rendus*, t. XCIX, p. 744.

INDICATIONS SUR UN POINT

DE LA

THÉORIE DES SURFACES HOMOFOCALES

Par M. **G. Kœnigs.**

1. — Lorsque l'on se propose d'étendre à l'espace les propriétés du cercle envisagé comme une conique, on trouve deux voies pour développer cette extension. La première consiste à envisager des sphères, la seconde, des surfaces du second degré de révolution.

Prenons pour exemple la propriété suivante :

Les quatre points où le côté BC d'un triangle ABC est touché par les quatre cercles tangents à ses côtés, sont les sommets des deux coniques homofocales qui ont B et C pour foyers et qui passent par le sommet A.

Pour étendre cette propriété à l'espace, on pourra considérer des *sphères bi-tangentes* à un cône et tangentes à un plan, ou encore, des *surfaces de révolution* du second degré tangentes à un plan, et *circonscrites* à un cône.

Le résultat auquel on parvient a cela de remarquable qu'il est le même dans les deux cas ; car si l'on cherche le lieu des points de contact avec le plan, soit des sphères, soit des surfaces de révolution, on trouve trois mêmes coniques, que l'on obtient en prenant les coniques principales dans le plan considéré π des trois surfaces homofocales qui passent par le sommet du cône, et ont pour focale la trace de ce cône sur le plan π.

2. — Cette proposition peut d'ailleurs être considérée comme un cas particulier d'une proposition très étendue de géométrie projective.

Considérons en effet deux surfaces du second ordre quelconques A et B, et cherchons quelles relations doivent exister entre un plan α et une droite Δ pour qu'il existe une troisième surface du second degré tangente à la surface A aux deux points où elle est percée par Δ, et circonscrite à

la surface B tout du long de son intersection avec le plan α. Voici les conditions que l'on trouve.

On sait que par toute courbe commune à deux surfaces A et B du second ordre on peut généralement faire passer quatre cônes du second degré C_1, C_2, C_3, C_4, de même que par les points communs à deux coniques il passe trois systèmes de deux droites. Les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles α et Δ sont assujettis consistent en ce que ce plan et cette droite doivent se couper en l'un quelconque des sommets des quatre cônes C_1, C_2, C_3, C_4; et de plus ils doivent être conjugués par rapport à celui de ces cônes dont ils contiennent le sommet.

Mais on aperçoit immédiatement que les quadriques A et B figurent symétriquement dans l'énoncé des conditions, en sorte que s'il existe une surface du second ordre bi-tangente à A suivant Δ et circonscrite à B suivant α, il existe une autre surface du second degré bi-tangente à B suivant Δ et circonscrite suivant le plan α à la surface A.

3. — Si l'on cherche alors le lieu des points de contact avec un plan fixe π des surfaces du second ordre Σ tangentes à ce plan, bi-tangentes à A et circonscrites à B on trouve quatre coniques, que l'on retrouve encore en supposant que l'on assujettisse les surfaces Σ (toujours tangentes au plan π) à être bi-tangentes à B et circonscrites à A.

En effet, grâce au résultat précédemment énoncé, on trouve la construction suivante des quatre coniques en question, construction où les surfaces A et B figurent symétriquement.

Prenez la trace des surfaces A et B sur le plan π : appelez a et b ces deux coniques. Deux coniques sont toujours polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à quatre autres ; soit p l'une de ces quatre coniques pour les coniques a et b; si l'on prend les coniques e_1, e_2, e_3, e_4 polaires réciproques par rapport à p des traces des cônes C_1, C_2, C_3, C_4 sur le plan π, on a précisément dans ces coniques e_1, e_2, e_3, e_4 le lieu des points de contact cherché. *(A suivre.)*

ÉQUATIONS DE LA LOXODROMIE

Par M. **R**..., licencié ès sciences mathématiques.

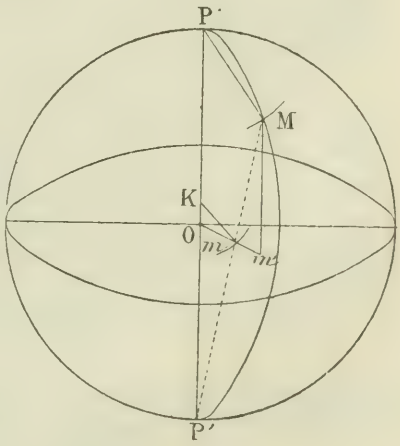
On sait que la *loxodromie* (*) est une courbe décrite sur une sphère et coupant tous les méridiens sous un angle constant.

Soient M un point d'une telle courbe et m sa projection stéréographique.

On sait aussi que, dans ce genre de projections, les angles de deux courbes tracées sur la sphère se projettent en vraie grandeur.

D'après cela, la tangente en m à la projection stéréographique de la courbe forme avec le rayon vecteur om un angle constant. Il en résulte, qu'en projection, la courbe est une spirale logarithmique (**) dont l'équation est, en coordonnées polaires :

$$r = Ae^{n\theta}. \qquad (1)$$



Il s'agit de déduire de là, l'équation de la projection orthogonale de la *loxodromie*.

Soit m' la projection orthogonale de M. Désignons om' par ρ, et cherchons une relation entre r et ρ. Les triangles $OP'm$, $Mm'm$, étant semblables, on a :

$$\frac{mm'}{om} = \frac{Mm}{P'm},$$

d'où $$\frac{mm' + om}{om} = \frac{Mm + P'm}{P'm},$$

(*) D'après Frenet, *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal*; 4e édition, p. 324, la loxodromie a été imaginée en 1492 par Nonius. Maupertuis s'est aussi occupé de cette courbe (*Mémoire sur la parallaxe de la Lune* et *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1744.)

(**) Cette remarque évidente a été faite par Halley ; M. Vannson l'a retrouvée (*Nouv. Annales*, 1861 ; pp. 31 et 226) ; aussi est-elle quelquefois donnée sous le nom de Théorème de Vannson. (V. *Exercices de Géométrie descriptive*, par F. I. C. ; 2e édition, A. Mame et Cie, p. 550.) G. L.

ou
$$\frac{\rho}{r} = \frac{P'M}{P'm}.$$

Menons mK parallèle à MP; on a, dans le triangle PMP', $\frac{P'M}{P'm} = \frac{P'\rho}{PK'}$. En tenant compte de l'égalité précédente, on a donc $\frac{\rho}{r} = \frac{P'P}{PK'} = \frac{2a}{P'K}$ (en posant $PP' = 2a$).

Or, dans le triangle P'mK, rectangle en m, on a :
$$P'm^2 = r^2 + a^2 = P'K \times a.$$
Éliminant P'K entre cette égalité et la précédente on a :
$$\frac{\rho}{r} = \frac{2a^2}{a^2 + r^2}; \qquad (2)$$
éliminons r entre (1) et (2)
$$\rho = \frac{2a^2 A e^{n\theta}}{a^2 + A^2 e^{2n\theta}},$$
d'où
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2A} e^{-n\theta} + \frac{A}{2a^2} e^{n\theta}. \qquad (3)$$

Prenons a pour la constante arbitraire A, et, pour $\rho = a$, supposons $\theta = 0$.

L'équation (3) devient :
$$\rho\,(e^{n\theta} + e^{-n\theta}) = 2a,$$
et, en coordonnées rectangulaires,
$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left(e^{n \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}} + e^{-n \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}\right) = 2a.$$

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 68.)

LE RÉSULTANT

Nous abordons maintenant la définition et la recherche du résultant.

Définition. — Étant données deux formes entières et

homogènes $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, on appelle *résultant* de ces formes une fonction de leurs coefficients qui, égalée à zéro, exprime la condition nécessaire et suffisante pour que f et φ admettent un diviseur commun.

La fonction que nous venons de définir et que nous allons déterminer porte aussi le nom d'*éliminant*. Nous donnerons plus loin, quand nous traiterons de l'élimination, diverses méthodes pour trouver le résultant ou l'éliminant ; nous nous bornerons pour le moment à exposer la méthode qui est due à Euler.

RECHERCHE DU RÉSULTANT PAR LA MÉTHODE D'EULER

Posons

$$f(x, y) = A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} y + \ldots + A_0 y^p,$$

et

$$\varphi(x, y) = B_q x^q + B_{q-1} x^{q-1} y + \ldots + B_0 y^q.$$

Les formes f et φ admettent un diviseur commun, nous avons démontré tout à l'heure l'existence de deux polynômes μ, ν,

$$\mu = \beta_p x^{p-1} + \beta_{p-1} x^{p-2} y + \ldots + \beta_1 y^{p-1},$$
$$\nu = \alpha_q x^{q-1} + \alpha_{q-1} x^{q-2} y + \ldots + \alpha_1 y^{q-1},$$

qui vérifient l'identité

$$\varphi\mu + \nu f = 0 \qquad (1)$$

Réciproquement, si cette identité a lieu, nous savons que f et φ admettent un diviseur commun.

Égalons à zéro, dans (1), les coefficients des termes y^{p+q-1}, xy^{p+q-2}, ... x^{p+q-1} et nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll}
A_0\alpha_1 & + B_0\beta_1 & = 0, \\
A_1\alpha_1 + A_0\alpha_2 & + B_1\beta_1 + B_0\beta_2 & = 0, \\
A_2\alpha_1 + A_1\alpha_2 + A_0\alpha_3 & + B_2\beta_1 + B_1\beta_2 + B_0\beta_3 & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
A_{q-1}\alpha_1 + \ldots + A_0\alpha_q & + B_{q-1}\beta_1 + \ldots + B_0\beta_q & = 0, \\
A_q\alpha_1 + \ldots + A_1\alpha_q & + B_q\beta_1 + \ldots & = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
A_p\alpha_q & + B_q\beta_p & = 0.
\end{array}$$

Ces égalités constituent un système de $p + q$, équations linéaires et homogènes qui sont vérifiées par une solution

non nulle. Le déterminant Δ de ces équations, égalé à zéro, donne donc la condition nécessaire et suffisante pour que les formes considérées f et φ admettent un diviseur commun.

Ce déterminant Δ peut s'écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & \cdots & A_p & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & A_0 & A_1 & \cdots & \cdots & A_p & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_0 & A_1 & \cdots & A_p \\ B_0 & B_1 & \cdots & \cdots & B_q & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & B_0 & B_1 & \cdots & \cdots & B_q & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & B_0 & B_1 & \cdots \quad B_q \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant donne lieu aux remarques suivantes :

1° Il est d'ordre $(p + q)$, et ses éléments sont les lettres A et B, coefficients des équations proposées;

2° Les q premières lignes renferment les seules lettres A, coefficients de l'équation qui est du degré p; et les p lignes suivantes les seules lettres B, coefficients de l'équation qui est du degré q;

3° Le terme diagonal est $(A_0)^q\ (B_q)^p$.

Si l'on observe enfin que dans un terme quelconque de Δ toutes les lignes doivent être représentées, on peut encore conclure, du résultat précédent, la propriété suivante:

Théorème. — *Le résultant est homogène et du degré* p *par rapport aux coefficients* B *de la forme* $\varphi(x, y)$; *homogène et du degré* q, *par rapport aux coefficients* A *de la forme* $f(x, y)$.

Remarque. — Nous avons supposé dans tout ce qui précède que les formes f et φ, sur lesquelles nous avons raisonné, n'étaient pas identiquement nulles ; dans cette hypothèse, $\Delta = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que f et φ admettent un diviseur commun. Nous ferons observer ici que si l'une des formes était identiquement nulle, le résultant serait évidemment nul.

Nous abordons enfin, en terminant ce chapitre, une propriété des formes qui est nécessaire à la démonstration que nous avons en vue. *(A suivre.)*

QUESTIONS D'EXAMEN

12. — *On considère l'équation* $f(x) = 0$, *et l'on propose de calculer* U,

$$U = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \ldots + \frac{1}{1+l},$$

a, b, ... l *désignant les racines de l'équation proposée.*

Première solution. — Posons, par un changement de variable naturellement indiqué,

$$1 + x = X;$$

l'équation en X est :

$$f(X-1) = f(-1) + Xf'(-1) + \ldots = 0.$$

En prenant alors l'équation aux inverses, on trouve :

$$U = -\frac{f'(-1)}{f(-1)}. \qquad \text{(A)}$$

Deuxième Solution. — On sait que l'on a :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{1}{x-a}.$$

En remplaçant dans cette identité x par -1, il vient :

$$\Sigma \frac{1}{1+a} = -\frac{f'(-1)}{-f(1)},$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

* Remarques (**A**). — A cette question se rattachent très simplement plusieurs généralisations et, notamment celle de l'exercice (8), résolu précédemment.

Proposons-nous de calculer la quantité

$$U_1 = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \ldots + \frac{l}{1+l},$$

a, b, ... l désignant les racines de l'équation, du degré m,

$$f(x) = 0.$$

Nous avons,

$$m - U_1 = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \ldots + \frac{1}{1+l},$$

et, par suite,

$$m - U_1 = U.$$

La formule qui donne U_1 est donc, d'après l'égalité (A),

$$U_1 = m + \frac{f'(-1)}{f(-1)}.$$

(**B**). On peut d'ailleurs arriver directement à ce résultat, de la manière suivante.

Soit posé,

$$y = \frac{x}{1+x},$$

d'où

$$x = \frac{y}{1-y}.$$

L'équation transformée est donc,

$$f\left(\frac{y}{1-y}\right) = 0,$$

ou

$$f\left(-1 + \frac{1}{1-y}\right) = 0.$$

On en déduit

$$f(-1) + \frac{1}{1-y} f'(-1) + \ldots = 0,$$

et, par suite,

$$(1-y)^m f(-1) + (1-y)^{m-1} f'(-1) + \ldots = 0.$$

Cette relation peut s'écrire

$$(-1)^m y^m f(-1) + (-1)^{m-1}[mf(-1) + f'(-1)]y^{m-1} + \ldots = 0.$$

La somme des racines de cette équation est donc

$$m + \frac{f'(-1)}{f(-1)},$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

(**C**). Prenons maintenant la transformation homographique la plus générale, laquelle correspond à la formule

$$y = \frac{p+qx}{r+x}.$$

et proposons-nous de calculer l'expression

$$U = \Sigma \frac{p+qa}{r+a},$$

le signe Σ s'appliquant aux m racines $a, b, \ldots l$ de l'équation $f(x) = 0$.

Nous trouvons, d'abord, par un calcul tout semblable à celui qui nous a servi à calculer $\Sigma\frac{1}{1+a}$,

$$\Sigma\frac{1}{r+a} = -\frac{f'(-r)}{f(-r)}.$$

Observons maintenant que

$$\frac{p+qa}{r+a} = q + (p-qr)\frac{1}{r+a}.$$

Nous obtenons donc, finalement,

$$\Sigma\frac{p+qa}{r+a} = mq + (qr-p)\frac{f'(-r)}{f(-r)}.$$

(**D**). On peut encore rattacher aux exercices précédents d'autres questions dont la solution découle immédiatement des résultats que nous venons de signaler, en appliquant l'idée si féconde de la décomposition des fractions rationnelles, en fractions simples.

Nous nous bornerons à indiquer ces généralisations.

Observons que

$$\frac{2}{a^2-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1},$$

$$\frac{2i}{a^2+1} = \frac{1}{a-i} - \frac{1}{a+i}$$

$$\frac{2t}{a^2-t^2} = \frac{1}{a-t} - \frac{1}{a+t},$$

$$\frac{2ti}{a^2+t^2} = \frac{1}{a-ti} - \frac{1}{a+ti}.$$

$$\frac{pa^2+q}{a^2+\mathrm{K}} = p + (q-p\mathrm{K})\frac{1}{a^2+\mathrm{K}},$$

et posons :

$$\mathrm{K} = t^2, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{K} = -t^2,$$

suivant que K désigne une quantité positive ou négative. Les calculs analogues à ceux que nous avons donnés tout à l'heure, conduisent, sans qu'il soit nécessaire d'expliciter la forme entière $f(x)$, à l'expression

$$\Sigma\frac{pa^2+q}{a^2+\mathrm{K}}.$$

Les résultats obtenus, et ceci se produit dans plusieurs

questions d'analyse, peuvent être, en apparence, fonctions de la lettre i; mais cette lettre disparaît, nécessairement, les simplifications étant effectuées.

(**E**). On voit, par ce qui précède, comment on peut poursuivre cette généralisation.

De même que nous avons montré comment on ramenait la connaissance de l'expression

$$\Sigma \frac{pa^2 + q}{a^2 + k},$$

à celle, précédemment acquise, de

$$\Sigma \frac{p'a + q'}{a + k'};$$

de même, en partant de l'idendité

$$\frac{3k^2}{a^3 + k^3} = \frac{1}{a + k} + \frac{j}{a + jk} + \frac{j^2}{a + j^2k},$$

dans laquelle j et j^2 représentent les racines cubiques imaginaires de l'unité, on ramènera le calcul de

$$\Sigma \frac{pa^3 + q}{a^3 + k^3},$$

à celui de la fonction

$$\Sigma \frac{p'a + q'}{a + k'};$$

et, ainsi de suite.

(**F**). Enfin nous ferons encore observer que l'identité

$$\frac{a^2 + pa + q}{a + r} = a + p - r + \frac{r^2 - pr + q}{a + r}$$

permet de calculer la fonction

$$\Sigma \frac{a^2 + pa + q}{a + r};$$

en explicitant seulement les deux premiers coefficients de la forme $f(x)$. On trouve, en appelant A_0, A_1 ces deux coefficients,

$$\Sigma \frac{a^2 + pa + q}{a + r} = -\frac{A_1}{A_0} + m(p - r) + (pr - r^2 - q)\frac{f'(-r)}{f(-r)}.$$

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Causse, boursier d'agrégation à la faculté des sciences de Montpellier, une lettre dans laquelle il nous signale la rectification suivante.

La solution de la question proposée au concours d'agrégation de 1879 (question résolue au t. IV, p. 415, 1880) renferme quelques inexactitudes.

1° L'affirmation qu'on trouve à la p. 420 (l. 4, en remontant), *ce cône est évidemment toujours réel*, n'est pas exacte. La surface peut être un ellipsoïde ;

2° Dans la troisième partie, p. 423, le lieu n'est pas, comme on l'a dit, du quatrième degré. Il est constitué par trois coniques situées dans les plans principaux de l'hyperboloïde proposé.

QUESTION 101

Solution par M. E. Fesquet, élève au Lycée de Nîmes.

Construire point par point, au moyen d'une équerre, la courbe qui correspond à l'équation

$$x^{4n} = \frac{y}{h}\left(y - h\right)^{4n},$$

n *désignant un nombre entier positif.* (G. L.)

L'équation (1) peut s'écrire :

$$y = h\left(\frac{x}{y-h}\right)^{4n}.$$

Nous supposons les axes rectangulaires.

Prenons sur Oy, $OA = h$. Le lecteur est prié de faire la figure. Soit M un point de la courbe. Joignons MA et menons par A une parallèle à Ox. Soit ω l'angle de MA avec cette parallèle. On a

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{x}{y-h}.$$

Par suite :

$$y = h \operatorname{cotg}^{4n} \omega.$$

Ainsi pour avoir un point quelconque de la courbe menons

par A une droite quelconque AB rencontrant Ox en B. On a :

$$OB = h \operatorname{cotg} \omega.$$

Menons BC, perpendiculaire à Ox, jusqu'à sa rencontre avec la perpendiculaire menée par O, à AB; on a :

$$BC = h \operatorname{cotg} \omega \,.\, \operatorname{cotg} \omega = h \operatorname{cotg}^2 \omega.$$

De même :

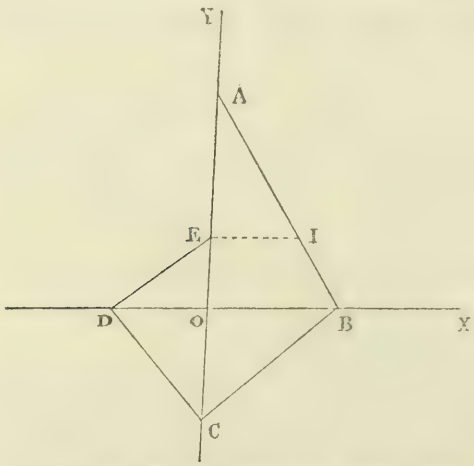
$$CD_1 = h \operatorname{cotg}^3 \omega,$$
$$D_1E_1 = h \operatorname{cotg}^4 \omega,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$D_n E_n = h \operatorname{cotg}^{4n} \omega.$$

Ainsi, on a :

$$y = D_n E_n.$$

Menons par le point D_n ainsi obtenu une parallèle à OC, c'est-à-dire une perpendiculaire à AB, et, par le point de rencontre de cette droite avec Oy, une parallèle à Ox qui rencontre AB en un point M appartenant à la courbe représentée par l'équation (1). On obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra.

Note. On simplifie légèrement la construction indiquée par la remarque suivante, laquelle nous paraît constituer une solution plus simple de la question que nous avons proposée.



Par A, on mène une transversale AB, puis successivement BC perpendiculaire sur AB, CD sur CB, DE sur DC; arrivé au point E, on mène une parallèle EI à OX; le lieu décrit par le point I est la courbe qui correspond à l'équation

$$y(y-h)^4 = hx^4.$$

Si au lieu de s'arrêter au point E, on tourne une fois de plus autour de O, par un circuit analogue au précédent, on aboutit à un point dont le lieu géométrique a pour équation

$$y(y-h)^8 = hx^8;$$

et ainsi de suite. G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

140. — On donne la longueur d'un arc de cercle, le rayon de ce cercle étant variable. D'un point on mène des droites aux extrémités de l'arc, faisant entre elles un angle donné. Conditions de maximum du triangle curviligne ainsi formé.

(E. Cr.)

141. — Si l'on pose $A_0 = \sin x$, $A_1 = \sin x - x \cos x$ puis si l'on calcule A_2 $A_3 \ldots$ par la formule de récurrence

$$A_{n+1} = (2n - 1)A_n - x^2 A_{n-1},$$

A_n est de la forme $U_n \sin x + V_n \cos x$. Démontrer les propriétés suivantes signalées par M. Hermite.

1° On a
$$A'_n = xA_{n-1},$$
$$xA''_n - 2nA'_n + xA_n = 0,$$
les accents indiquant des dérivées;

2° La fonction A_n s'annule pour $x = 0$ ainsi que ses $2n$ premières dérivées. Quelle valeur prend alors la dérivée d'ordre $2n + 1$?

3° Écrivant $U_n + iV_n = P_n$, puis faisant $x = iy$, P_n est un polynôme ou y à coefficients réels et de degré n :

$$P_n = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_p y^{n-p} + \ldots + a_n,$$

on a
$$yP''_n - 2(y + n)\, P'_n + 2nP_n = 0,$$
puis on en conclut
$$a_p = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1.\,2.\,3 \ldots (n+p)}{1.\,2 \ldots (n-p)\,,\ 1.\,2 \ldots p};$$
a_p est entier (*).

142. — En un point M d'une conique on construit le cercle osculateur ; soit N le point où il rencontre une seconde fois la conique. Trouver : 1° le lieu du pôle de la corde MN par rapport au cercle ; 2° l'enveloppe de la tangente en N

(*) M. Poujade, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lyon, en nous communiquant cette question, nous fait observer que les premières formules ont été données par M. Hermite (*Journal de Crelle* 1876, p. 303 et suivantes). M. Poujade a développé les résultats indiqués par M. Hermite.

au cercle ; 3° l'enveloppe du rayon du cercle qui passe par N.

(J. Neuberg.)

143. — En un point M d'une conique on construit le cercle osculateur C ; la seconde tangente commune à ces courbes touchant la conique en N et le cercle en P, on demande : 1° le lieu du point de rencontre des tangentes menées en M et N : 2° le lieu du point P ; 3° l'enveloppe de la corde MN ; 4° l'enveloppe de la corde MP ; 5° l'enveloppe du rayon CP ; 6° l'enveloppe de la droite CN. *(J. Neuberg.)*

144. — Étant donné un nombre N quelconque du triangle arithmétique, si l'on considère : d'une part, la colonne des nombres situés au-dessus de N, et commençant à N ; d'autre part, la ligne où se trouve N et commençant à l'unité ; la somme algébrique des produits deux à deux des nombres de même rang dans ces deux suites, produits affectés tour à tour du signe + et du signe —, est nulle. Si l'on remplace la colonne par la diagonale commençant à N, le théorème est encore vrai. *(H. Picquet.)*

145. — $C_{m,p}$ désignant le nombre des combinaisons de m objets p à p, et P_m le nombre des permutations de m objets, on a

$$m^m - C_{m,1}(m-1)^m + C_{m,2}(m-2)^m - \ldots$$
$$+ (-1)^h C_{m,h}(m-h)^m + \ldots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} \cdot 1^m = P_m.$$

(H. Picquet.)

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 7872-5.

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES

DE QUELQUES PROPOSITIONS SUR LA NON-DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FORMES ARITHMÉTIQUES PAR DES NOMBRES DONNÉS

Par M. **S. Réalis**.

En nous adressant les élégantes démonstrations qu'on va lire, M. Réalis, dans sa lettre d'envoi, nous dit : « Le but du petit article ci-joint n'est autre que d'indiquer les principes qui justifient les énoncés proposés dans ma précédente communication : ces principes, bien qu'exclus des programmes d'enseignement, ne sortent aucunement de la partie la plus élémentaire de la science et sont assurément à la portée de tout élève désireux de jeter un regard au delà des programmes. »

Les énoncés dont il est question dans cette lettre sont ceux que nous proposons dans le présent numéro. Nos lecteurs rapprocheront naturellement l'article ci-dessous que M. Réalis a bien voulu écrire, à notre prière, et les exercices que nous venons de viser. G. L.

1. Lemme. — *La forme quadratique* $u^2 + v^2$, *dans laquelle* u *et* v *sont premiers avec* 3, *ne peut représenter aucun nombre divisible par* 3.

Démonstration. — Les nombres u, v étant premiers avec 3, on peut poser $u = 3a + 1$, $v = 3b + 1$, ou bien $u = 3a + 1$, $v = 3b - 1$, ou enfin $u = 3a - 1$, $v = 3b - 1$, les autres cas se réduisant à ceux-ci ; a, b désignent des entiers positifs.

Dans les trois cas, on a un resultat de la forme

$$u^2 + v^2 = 3A + 2,$$

A étant entier et positif; la somme $u^2 + v^2$, c'est-à-dire la forme quadratique considérée, n'est pas divisible par 3.

Observation. — L'un au moins des nombres u, v étant premier avec 3, la forme $u^2 + v^2$ n'est pas divisible par 3. De là la proposition suivante:

Théorème. — *Les nombres* u, v *étant premiers entre eux, la forme* $u^2 + v^2$ *n'est pas divisible par* 3.

C'est un cas particulier de ce théorème bien connu (et qu'il n'y a pas lieu de démontrer ici) que *la somme de deux carrés premiers entre eux ne peut avoir pour diviseur aucun nombre de la forme* $4x + 3$.

2. Lemme. — *Aucun nombre compris dans la forme* $u^2 + 2v^2$, *où l'on suppose* u *et* v *premiers avec* 5, *ne peut être divisible par* 5.

Démonstration. — Les nombres u, v étant premiers avec 5, nous poserons

$$u = 5a + h; \quad v = 5b + k,$$

h et k, indépendants l'un de l'autre, pouvant avoir l'une quelconque des valeurs ± 1, ± 2. La valeur de $u^2 + 2v^2$ se réduira par là à l'une des quatre formes linéaires

$$5A \pm 1; \quad 5A \pm 2,$$

et ne sera, par conséquent, jamais divisible par 5.

Observation. — L'un au moins des nombres u, v étant premier avec 5, le nombre $u^2 + 2v^2$ est nécessairement premier avec 5.

Théorème. — *Les nombres* u, v *étant premiers entre eux, la forme* $u^2 + 2v^2$ *n'est pas divisible par* 5.

C'est une conséquence de ce qui précède et un cas particulier de cette proposition générale que nous ne pouvons qu'énoncer ici :

Aucun nombre compris dans l'une des formes linéaires $8x + 7$, $8x + 5$ *ne peut être diviseur de la forme quadratique* $u^2 + 2v^2$ (en admettant, bien entendu, que u et v sont premiers entre eux).

3. Lemme. — *Aucun nombre compris dans l'une des formes*

$$u^2 + v^2, \quad u^2 + 2v^2,$$

u *et* v *étant premiers avec* 7, *ne peut être divisible par* 7.

La démonstration se fait comme dans les cas précédents. Posons, pour exprimer que u et v sont premiers avec 7,

$$u = 7a + h; \quad v = 7b + k,$$

les restes h et k, indépendants l'un de l'autre, ayant l'une des six valeurs ± 1, ± 2, ± 3. Chacune des formes quadratiques considérées se réduisant par là à l'une des formes linéaires

$$7A \pm 1; \quad 7A \pm 2; \quad 7A \pm 3,$$

il s'ensuit que, dans aucun cas, les premières ne se réduiront à un multiple de 7.

Il suffit évidemment que l'un au moins des nombres u, v soit premier avec 7. Il s'ensuit ce théorème que

Les nombres u, v *étant premiers entre eux, aucune des formes*

$$u^2 + v^2; \quad u^2 + 2v^2,$$

ne peut admettre le diviseur 7.

4. Théorème. — *Les nombres* u, v *étant premiers entre eux, aucune des formes*

$$u^2 + v^2; \quad u^2 + 3v^2; \quad u^2 + 5v^2$$

ne peut représenter un nombre divisible par 11.

Même mode de démonstration que précédemment, en commençant par le cas où l'on suppose u et v premiers avec 11.

On démontre de même, sans peine, la non-divisibilité des formes

$$u^2 + 7v^2, \quad u^2 + 11v^2, \quad u^2 + 19v^2,$$

par 13. *(A suivre.)*

SUR LA CONVEXITÉ DES COURBES PLANES

Par M. **Édouard Lucas.**

Définition. — On dit qu'un arc de courbe plane est *convexe* ou *concave* en l'un de ses points M vers un autre point P de son plan, lorsque les deux éléments MS et MS' pris aussi petits qu'on voudra de part et d'autre du point M sont situés par rapport à la tangente en M de l'autre côté du point P ou du même côté.

Théorème. — *Un arc de courbe plane est concave ou convexe en l'un de ses points* M, *vers un point* P *de son plan, selon que le résultat des substitutions des coordonnées du point* P

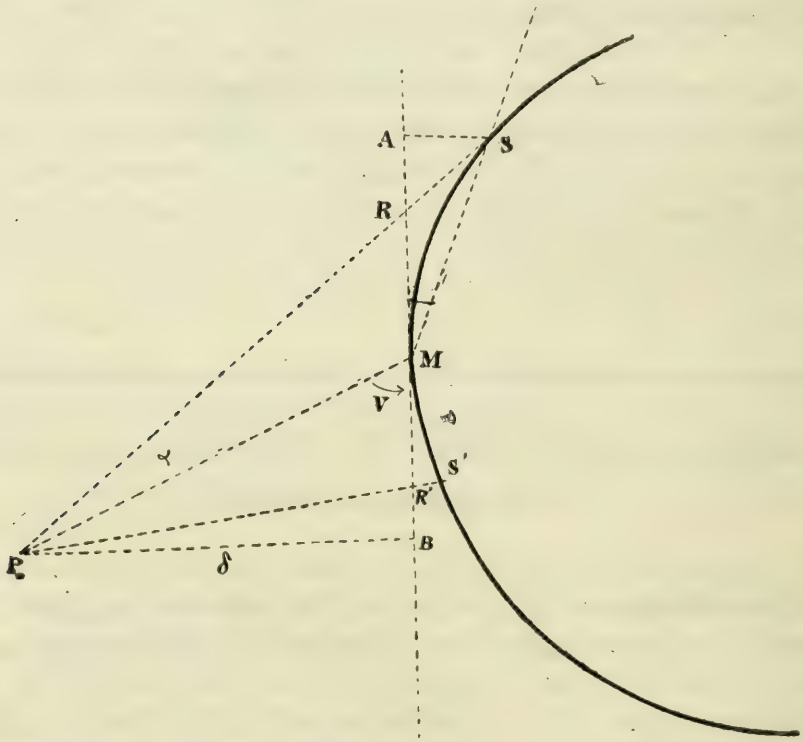
dans le premier membre de l'équation de la tangente en M, *et de celles du po nt* M *dans le premier membre de l'équation de la Hessienne, ont les mêmes signes ou les signes contraires.*

En d'autres termes, si on désigne par (x, y, z) les coordonnées homogènes du point M; par $f(x, y, z)$ le premier membre de l'équation de la courbe d'ordre n, par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point P, et par T_0 et H les expressions :

$$T_0 = x_0 f'x + y_0 f'y + z_0 f'z,$$

$$= \begin{vmatrix} f''xx & f''xy & f''xz \\ f''yx & f''yy & f''yz \\ f''zx & f''zy & f''zz \end{vmatrix}$$

l'arc est concave ou convexe vers le point P, suivant que le produit T_0H est positif ou négatif.



En effet, désignons par λ la longueur MR, par μ le rapport segmentaire $\frac{SR}{P_0S}$, et par N l'expression

$$N = \sqrt{f'x^2 + f'y^2 - 2f'xf'y \cos\theta};$$

les coordonnées du point R de la tangente sont

$$x + \frac{\lambda}{N} f'y, \quad y - \frac{\lambda}{N} f'x, \quad z;$$

et celles du point S

$$x + \frac{\lambda}{N} h, \quad y + \frac{\lambda}{N} k, \quad z + \frac{\lambda}{N} l,$$

en supposant

$$h = f'y + \frac{\mu}{\lambda} Nx_0, \quad k = -f'x + \frac{\mu}{\lambda} Ny_0, \; l = \frac{\mu}{\lambda} Nz_0;$$

portons les coordonnées de S dans l'équation de la courbe et développons par la série de Taylor, nous trouvons

$$0 = \mu T_0 + \frac{\lambda^2}{2N^2} \left\{ h^2 f''xx + \ldots + 2hkf''xy + \ldots \right\} + \ldots$$

Mais nous observons que dans le triangle SRM

$$\frac{SR}{MR} = \frac{\sin SMR}{\sin RSM},$$

ou, d'après les notations de la figure,

$$\frac{SR}{MR} = \frac{\sin SMR}{\sin(V - \alpha)}.$$

Donc lorsque le point S se rapproche indéfiniment du point M, on a : limite $\frac{SR}{MR} = 0$; il en est de même du rapport $\frac{\mu}{\lambda}$. Mais les accroissements h, k, l se composent de deux parties ; l'une fixe, l'autre contenant le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$. On peut donc supposer $\frac{\mu}{\lambda}$ suffisamment petit, de telle sorte que pour cette valeur, et pour toutes les valeurs de plus petit module, la parenthèse ait le signe de

$$f'y^2 f''xx - 2 f'xf'y f''xy + f'x^2 f''yy,$$

ou, par une transformation bien connue, de $\frac{-z^2}{(n-1)^2}$ H; ainsi pour une valeur suffisamment petite de λ, et pour les valeurs plus petites, μ ne change pas de signe; on a donc, à la limite,

$$\frac{\lambda^2}{2\mu} = \frac{(n-1)^2 N^2}{z^2} \frac{T_0}{H}.$$

Ainsi μ est positif et il y a concavité lorsque T_0 et H ont les mêmes signes; il y a convexité dans le cas contraire.

Du cercle de courbure. — Le cercle de courbure est la limite du cercle tangent à la courbe en M et passant par le point S lorsque ce point vient se confondre avec M. En désignant par r son rayon, on a $2r = \lim \frac{\overline{MA}^2}{AS}$. Il est facile de le calculer par ce qui précède. En effet,

$$AS = SR \sin(V - \alpha) = \mu PS \sin(V - \alpha),$$

donc

$$\frac{\overline{AM}^2}{AS} = \frac{\lambda^2}{\mu} \left(\frac{AM}{RM}\right)^2 \frac{1}{PS \sin(V - \alpha)};$$

Mais $\frac{AM}{RM}$ a pour limite l'unité, $PS \sin(V - \alpha)$ a pour limite la distance $PB = \delta$ du point P à la tangente; on a donc

$$r = \frac{N^2(n-1)^2}{z^2} \frac{T_0}{H\delta}.$$

En remplaçant δ par sa valeur $\frac{T_0 \sin\theta}{N}$, on a

$$r = \pm \frac{(n-1)^2}{z^2 \sin\theta} \frac{N^3}{H}.$$

INDICATIONS SUR UN POINT

DE LA

THÉORIE DES SURFACES HOMOFOCALES

Par M. **G. Kœnigs,**

(*Suite*, voir p. 83.)

---

4. — Dire qu'une surface de second ordre est une sphère, c'est-à-dire qu'elle est assujettie à la condition de contenir le cercle imaginaire à l'infini Γ ; dire qu'une surface de second ordre est de révolution, c'est-à-dire qu'elle est bi-tangente à ce même cercle.

Maintenant dans les énoncés précédents, rien ne nous empêche de supposer que l'une des surfaces du second ordre s'aplatit de plus en plus jusqu'à se réduire à la région d'un plan extérieur ou intérieur à une conique décrite dans ce

plan. Il est vrai que dans ce cas les cônes précédents c_1, c_2, c_3, c_4 disparaissent; mais, sans insister davantage sur ce fait, il me suffira de dire qu'en envisageant les surfaces A et B comme des enveloppes de plans, on arrive à définir les coniques e_1, e_2, e_3, e_4 à l'aide des coniques doubles de la développable circonscrite à la fois aux surfaces A et B, en sorte que les résultats précédents subsistent, avec cette particularité que l'une des quatre coniques e_1, e_2, e_3, e_4 s'évanouit.

On voit donc que l'on peut supposer que la surface B se réduit au cercle de l'infini, et alors on arrive à cette proposition que : Soit que l'on cherche le lieu des points de contact avec un plan π des sphères tangentes à ce plan et bi-tangentes à une surface A du second degré, soit que l'on cherche le même lieu pour des surfaces de révolution toujours tangentes au plan π, mais circonscrites à A, on trouve toujours trois mêmes coniques.

Cette proposition comprend évidemment celle que nous avions déjà énoncée dès le début à l'égard du cône du second degré.

5. — Dans les lignes qui précèdent je me suis contenté d'esquisser les traits principaux d'une question que je n'ai pas le loisir de creuser, mais qui mérite peut-être d'être approfondie. Les élèves studieux qui y trouveraient quelque intérêt pourront consulter les travaux de M. Chasles sur les surfaces homofocales, ainsi qu'un mémoire de M. Darboux sur les *Théorèmes d'Ivory* (*) : ils y trouveront une série de propositions fort belles sur les surfaces homofocales, et auxquelles celles qu'on a énoncées ici doivent sans doute se rattacher.

Nota. — Je dois aux lecteurs du Journal une rectification pour une inadvertance qui s'est glissée dans un petit mémoire sur les normales aux surfaces du second degré que j'ai publié, il y a quelques années, dans ce recueil (**). En cher-

(*) *Sur les théorèmes d'Ivory*, par M. G. Darboux. Paris, Gauthier-Villars, 1872.

(**) Voyez Journal, année 1881, p. 31.

chant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe du quatrième ordre tracée sur une surface du second ordre contînt les pieds de six normales issues d'un point de l'espace à la surface, j'ai énoncé qu'il était nécessaire et suffisant que cette courbe fût l'intersection de la surface proposée avec une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre formé par le plan de l'infini et les plans principaux de la première. L'erreur tient à ce que j'ai omis de dire qu'un certain système d'équations linéaires, qui figure dans les formules d'identification, est généralement incompatible : il en résulte que la condition énoncée est nécessaire, mais qu'elle n'est pas suffisante. La condition qu'il faut lui adjoindre appartient à un ordre de considérations que j'ai développées dans un mémoire sur les axes des surfaces du second degré publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* en 1883.

PROPRIÉTÉS

DE

L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS

ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 76.)

13. — Mais il est possible de simplifier ces constructions et de donner une nouvelle et plus élégante détermination des foyers.

Considérons en effet la parabole correspondant au sommet A.

Elle est tangente aux deux droites rectangulaires AI, AI′, bissectrices de l'angle A et aux deux droites OB′, OC′, également inclinées sur les précédentes.

La parabole ainsi déterminée admet alors pour directrice la médiane AE du triangle.

Prenons en effet pour axes de coordonnées rectangulaires les bissectrices AI, AI′ de l'angle A.

Une parabole tangente aux deux axes de coordonnées a pour équation

$$\lambda xy + (y - cx - d)^2 = 0$$

avec $\lambda = 4c$; d'où

$$(y + cx)^2 = 2d(y - cx) - d^2.$$

Il reste à exprimer que cette conique est tangente aux deux droites qui ont pour équations

$$y = mx + n, \quad y = -mx + n'.$$

On trouve ainsi

$$dm - cn = mn, \quad dm + cn' = mn',$$

d'où

$$c = m\frac{n' - n}{n' + n}, \quad d = \frac{2nn'}{n' + n},$$

et par conséquent, si les deux droites ont pour équations

$$y = x \cot\frac{A}{2} - \frac{b}{2\sin\frac{A}{2}}, \quad y = -x\cot\frac{A}{2} + \frac{c}{2\sin\frac{A}{2}},$$

la parabole sera représentée par l'équation

$$\left(y + \frac{c+b}{c-b}\cot\frac{A}{2}x\right)^2 + \frac{2bc}{(c-b)\sin\frac{A}{2}}\left(y - \frac{c+b}{c-b}\cot\frac{A}{2}x\right)$$

$$+ \frac{b^2c^2}{(c-b)^2\sin^2\frac{A}{2}} = 0.$$

Mais, lorsque l'équation d'une parabole est sous la forme

$$(Ax + By)^2 = Dx + Ey + F, \qquad (m)$$

l'axe a pour coefficient angulaire $-\frac{A}{B}$. Ainsi la directrice de la parabole en question a pour équation

$$y = \frac{c-b}{c+b}\operatorname{tg}\frac{A}{2}x$$

et représente par conséquent la médiane AE.

14. — Le paramètre se déduirait de l'équation (m) par la formule

$$2p_1 = \frac{AE - BD}{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on trouverait ainsi

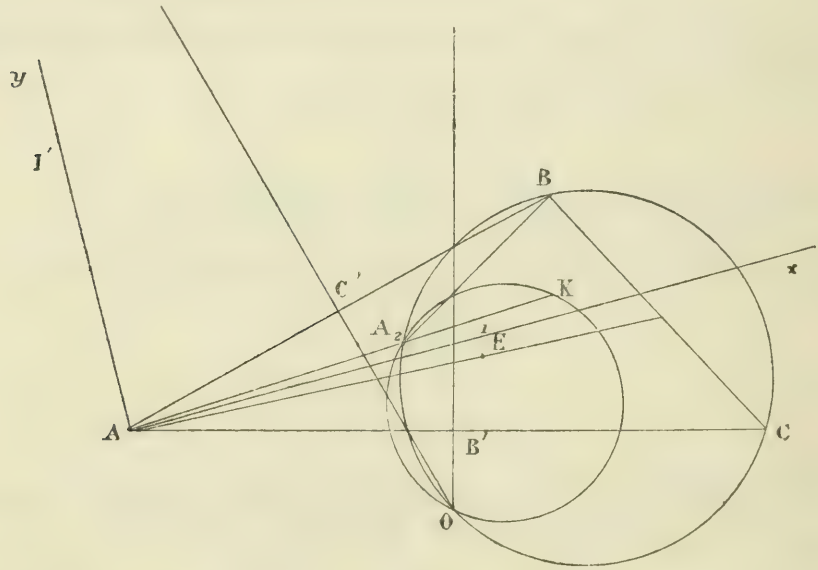
$$2p_1 = \frac{4S\,(b^2 - c^2)}{a^3};$$

mais voici, pour y parvenir, un autre moyen fondé sur des relations obtenues dans les notices déjà publiées.

Soit en effet A_2 le foyer. En vertu d'une propriété de la parabole, l'angle IAA_2 est égal à l'angle IAE. Mais cette égalité définit la position de la droite AK antiparallèle symétrique de la médiane AE par rapport à la bissectrice AI. Ainsi le foyer A_2 se trouve sur la symédiane AK.

On a ensuite, par définition :

$$p_1 = AA_2 \sin EAK.$$



Le point A_2 se trouve sur la droite AK dont l'équation s'obtient en exprimant que les distances de ses points aux côtés AB et AC sont proportionnelles à ces côtés :

$$\frac{y \cos A - x \sin A}{y} = \frac{c}{b}.$$

On en tire

$$y = -\frac{bx \sin A}{a \cos B} = -\frac{2Sx}{ac \cos B} = x \operatorname{tg} \Phi.$$

D'autre part, dans le triangle ABA_2, on a $\widehat{A_2AC} = \widehat{A_2BA}$, donc

$$AA_2 = AB_1 \frac{\sin ABA_2}{\sin BA_2K}$$

(Congrès d'Alger § 17*)*, ou

$$AA_2 = \frac{c}{\sin A} \sin \Phi.$$

Par conséquent,

$$p_1 = \frac{c}{\sin A} \sin \Phi \sin (2\Phi - A).$$

Développant et remplaçant $\sin \Phi$ et $\cos \Phi$ par les expressions en fonction de $\operatorname{tg} \Phi$, il vient

$$p_1 = \frac{2Sc}{\sin A} \frac{[(4S^2 - a^2c^2 \cos^2 B) \sin A - 4Sac \cos A \cos B}{(4S^2 + a^2c^2 \cos^2 B)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$p_1 = \frac{2S^2c\,(2n^4 - p^4 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2 + a^4 + b^4 - c^4)}{a^3c^3 \,.\, bc \sin A},$$

et, toutes réductions faites,

$$p_1 = \frac{2S\,(b^2 - c^2)}{a^3}.$$

On peut donc en conclure, sans autre vérification, pour les paramètres des deux autres paraboles du groupe,

$$p_2 = \frac{2S\,(a^2 - c^2)}{b^3}, \quad p_3 = \frac{2S\,(a^2 - b^2)}{c^3}.$$

15. — Les développements qui précèdent reproduisent les résultats indiqués au § 17 du Mémoire présenté au *Congrès d'Alger*. Le foyer A_2 coïncide, par conséquent, avec le point A_2 d'intersection de la symédiane AK et du cercle de Brocard.

Les éléments de chacune de ces paraboles se trouvent ainsi complètement déterminés, et l'on pourrait se proposer de construire la tangente commune (T) menée sur le point E, sans tracer les coniques.

Nous avons vu que les trois droites OA', OB', OB' sont tangentes chacune à deux des paraboles et que la droite (T) est la tangente commune aux trois paraboles. Le point E d'insersection des trois directrices appartient à cette première tangente commune; mais il est aussi un point du lieu

des angles droits circonscrits à ces coniques. La perpendiculaire à la droite (T) menée par le point E est donc aussi une tangente commune aux trois mêmes paraboles.

Le théorème énoncé précédemment peut donc être complété par les propositions suivantes :

Les directrices des trois paraboles précitées sont les médianes du triangle. Leurs foyers, situés sur le cercle de Brocard, sont les intersections de ce cercle avec les symédianes AK, BK, CK. *Enfin, ces trois coniques admettent une seconde tangente commune* (T′) *perpendiculaire à la première tangente* (T) *et menée aussi par le centre de gravité du triangle.*

La position de cette droite est donc, comme celle de la première, susceptible de plusieurs modes de construction.

16. — L'équation de la tangente (T) est assez facile à obtenir en partant des propriétés que nous venons de lui reconnaître. Il suffit de former l'équation de la droite qui passe par les points E et C qui ont pour coordonnées $a' = \frac{c}{a}$, $b = \frac{c}{b}$, $a'' = \frac{\sin(B - \varphi)}{\sin \varphi}$, $b'' = \frac{\sin A - \varphi}{\sin \varphi}$, ou mieux, de substituer les coordonnées du point A′ par exemple, dans l'équation générale des droites passant par le centre de gravité E, $a\alpha - b\beta + \lambda(b\beta - c\gamma) = 0$.

L'équation à laquelle on parvient n'offre point de symétrie, parce que la droite qu'elle représente n'est pas déterminée par deux points du triangle ayant leur individualité particulière, comme les points remarquables dont on a étudié les propriétés. Ainsi, tandis que l'équation de la droite (T) n'est pas symétrique, les équations d'autres lignes telles que $\omega\omega'$, OK, HD, etc., sont parfaitement symétriques.

On pourrait, malgré le défaut de simplicité du résultat à obtenir, former directement l'équation de la tangente (T) dans le système de coordonnées rectangulaires défini précédemment. Cela tient à cette circonstance, que l'on connaît une relation entre l'angle α et l'angle φ qui sert à déterminer la position des points A′, B′, C′.

17. — La construction que j'ai donnée pour l'angle φ dans la *Nouvelle Corr. math. (loc. cit.)*, peut être remplacée

par une construction plus élégante et plus simple, que j'ai rencontrée en traitant le problème de statique suivant :

Trouver, sur une droite fixe inclinée d'un angle α, la position d'équilibre d'un cercle vertical, dont on suppose le centre de gravité au milieu d'un de ses rayons.

Dans la position d'équilibre cherchée, la verticale du point de contact doit passer par le centre de gravité. La position répond donc à l'une des deux intersections de cette verticale avec une circonférence concentrique à la première et de rayon moitié. Pratiquement, cette position d'équilibre serait modifiée par le frottement. L'application étudiée est donc toute théorique. Sauf cette réserve, si l'on désigne par θ l'angle formé par le rayon du centre de gravité et le rayon aboutissant au point de contact, on a

$$\sin \alpha : \frac{R}{2} = \sin (\theta + \alpha) : R;$$

d'où

$$\sin (\theta + \alpha) = 2 \sin \alpha,$$

et, par conséquent, $\varphi = \frac{\theta}{2}$. Ainsi l'angle φ ou 2φ résulte de l'intersection d'une circonférence par une corde rencontrant, sous un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$, une autre circonférence concentrique et de rayon double.

Comme on le voit, on ne s'attendait guère à rencontrer ici une application mécanique.

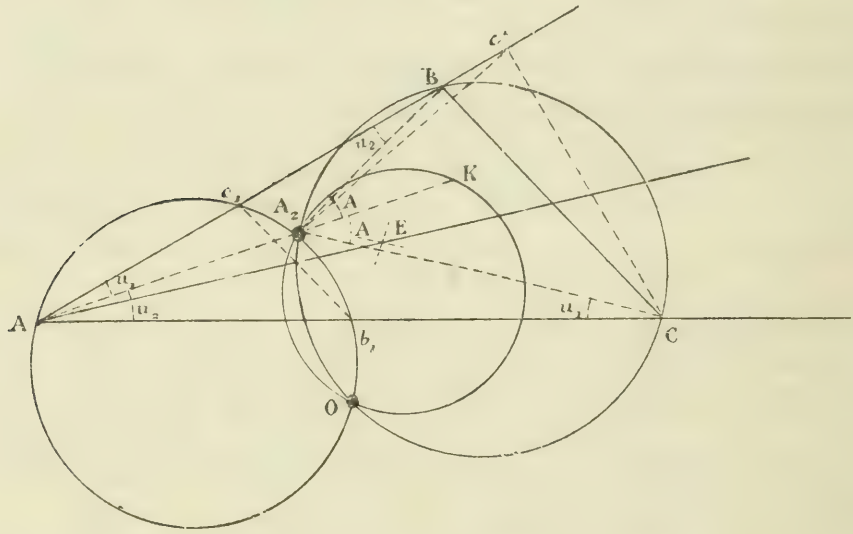
Telles sont les intéressantes propriétés que nous avions à signaler pour les paraboles du premier groupe.

18. — Considérons maintenant les trois paraboles tangentes intérieurement à deux côtés du triangle ABC, aux extrémités du troisième côté. Soit, par exemple, la parabole (BC), qui a pour foyer un certain point A_2.

Cette conique est tangente à la parallèle à la corde de contact BC menée au milieu de la hauteur issue du point A, autrement dit, b_1c_1. Joignons les pieds des médianes BE, CE. La direction conjuguée à la corde BC est la médiane AE.

C'est donc la direction de l'axe de la parabole (BC). La directrice est donc perpendiculaire à la médiane.

Comme la parabole est inscrite au triangle b_1c_1A, son foyer A_2 doit se trouver sur la circonférence circonscrite au même triangle b_1c_1A. Mais le quadrilatère Ob_1Ac_1 est rectangle en b_1 et en c_1; la circonférence circonscrite au triangle passe donc par le point O et a pour diamètre OA. Pour avoir le foyer, il suffit maintenant de tracer la ligne AK, qui rencontre la circonférence au point cherché A_2. En effet AE est la direction de l'axe ; donc, en vertu du théorème énoncé précé-



demment (voir § 12 de cette note), l'angle CAA_2 doit être égal à l'angle BAE. Mais cette condition définit une médiane antiparallèle ou symédiane. Donc AA_2 passe bien par le point K.

La position du foyer est donc déterminée; cependant, l'on n'a pas encore établi que ce foyer est aussi un point de la circonférence décrite sur OK comme diamètre.

C'est ce que nous allons maintenant démontrer.

A cet effet, joignons A_2B, A_2C. En vertu d'une propriété de la parabole, les deux triangles A_2AB, A_2AC sont semblables. L'angle BA_2C est donc égal au double de l'angle A, et par conséquent son sommet A_2 se trouve sur la circonférence circonscrite au triangle COB, qui rencontre la cir-

conférence décrite sur OK comme diamètre (cercle de Brocard) en un point A_2 de la médiane antiparallèle AK (*Congrès d'Alger*, § 17). Le foyer A_2 est donc à l'intersection commune de la circonférence OCB, des circonférences décrites sur OA et sur OK comme diamètres et de la médiane antiparallèle AK.

19. — En coordonnées trilinéaires, et en prenant le triangle donné ABC pour triangle de référence, l'équation de la parabole (BC), par exemple, doit être de la forme $\lambda\alpha^2 + \beta\gamma = 0$; et, en éliminant γ entre cette équation et $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, puis écrivant la condition des racines égales, on trouve $4\lambda bc + a^2 = 0$. Les équations des trois paraboles sont donc :

$$(BC) \ldots\ldots a^2\alpha^2 - 4bc\beta\gamma = 0,$$
$$(AC) \ldots\ldots b^2\beta^2 - 4ac\alpha\gamma = 0,$$
$$(AB) \ldots\ldots c^2\gamma^2 - 4ab\alpha\beta = 0.$$

Pour avoir l'intersection de ces coniques, il suffit de retrancher chaque équation des deux autres. On trouve ainsi

$$(BC) - (AC) = (a\alpha - b\beta)(a\alpha + b\beta + 4c\gamma) = 0.$$

L'équation $a\alpha - b\beta = 0$ représente la médiane CE. Les deux paraboles se rencontrent donc sur la médiane CE, et il est facile de voir que toutes ces coniques, prises deux à deux, divisent les médianes dans un rapport constant, au huitième de leur longueur à partir de leur base. Ces deux propriétés ont été signalées par M. E. Lemoine (*Mathesis*, t. IV, 1884. Question 350, p. 143. L'énoncé 341, donné p. 142 par M. Barbarin, se rapporte à des recherches sur le même sujet d'études.)

L'on reconnaîtra aussi très facilement qu'aux points où les paraboles rencontrent chacune des médianes, les tangentes sont parallèles aux deux autres médianes du triangle, et que les six points d'intersection de ces groupes de tangentes se trouvent sur les côtés du triangle.

Enfin, si l'on transforme ces paraboles par droites symétriques, on en conclut immédiatement cet intéressant théorème :

Une ellipse tangente à deux côtés d'un triangle aux extrémités du troisième côté BC *est également tangente au cercle circonscrit*

si elle passe par l'extrémité P''_a *de la corde symédiane du sommet opposé; et réciproquement.*

Ces ellipses ont pour équations : $a^2\beta\gamma - 4bc\alpha^2 = 0$, $b^2\alpha\gamma - 4ac\beta^2 = 0$, $c^2\alpha\beta - 4ab\gamma^2 = 0$. Ces coniques ont leurs centres sur les médianes et se rencontrent sur les symédianes. Si L, M, N représentent les points de Lemoine des triangles BCP''_a, ACP''_b, ABP''_c, ces points se trouvent sur les symédianes AK, BN, CK; de plus, les triangles ABC, LMN ont le point K pour centre d'homologie et leur axe d'homologie coïncide avec la polaire du point K par rapport au cercle circonscrit ou avec l'axe radical de ce cercle et du cercle de Brocard. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

LA PREMIÈRE LEÇON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 86.)

Théorème. — *Lorsque dans une forme entière* f(x), *du degré* 2p, *on remplace* x *par* y + z, *si l'on pose*

$$f(y + z) = f_1(z^2) + zf_2(z^2),$$

le résultant des deux formes f_1 *et* f_2 *est du degré* p(2p — 1) *en* y.

Soit $m = 2p$, le degré de l'équation proposée, dans laquelle nous représenterons le premier terme par x^m. Nous avons

$$f_1(z^2) = f(y) + \frac{z^2}{2!}f''(y) + \ldots + \frac{z^m f^m(y)}{m!},$$

et

$$f_2(z^2) = f'(y) + \frac{z^2}{3!}f'''(y) + \ldots + \frac{z^{m-2}}{(m-1)!}f^{m-1}(y).$$

On observera que les formes $f_1(z^2)$, $f_2(z^2)$ sont, par rapport à la lettre z^2, de degrés respectifs p et $(p - 1)$.

Le résultant R (y) est, d'après la formule établie plus haut, un déterminant d'ordre $2p - 1$:

$$R(y) = \begin{vmatrix} f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \dots & \frac{f^m(y)}{m!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \dots & \frac{f^m(y)}{m!} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & f(y) & \frac{f''(y)}{2!} & \dots & & \frac{f^m(y)}{m!} \\ f'(y) & \dots & \dots & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f'(y) & \dots & \dots & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & f'(y) & \dots & & \frac{f^{m-1}(y)}{(m-1)!} \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant sont des polynômes entiers en y; et le terme du degré le plus élevé de R s'obtiendra en prenant, dans chacun de ses éléments, le terme qui est du plus haut degré, si nous montrons toutefois que le déterminant ainsi formé n'est pas nul.

Posons donc

$$\theta(y) = \begin{vmatrix} y^m & C_m^2 y^{m-2} & \dots & C_m^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y^m & C_2^m y^{m-2} & \dots & C_m^m & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & y^m & C_m^2 y^{m-2} & \dots & C_m^m \\ C_m^1 y^{m-1} & \dots & \dots & \dots & C_m^{m-1} y & 0 \dots & 0 \\ 0 & C_m^1 y^{m-1} & \dots & \dots & \dots & C_m^{m-1} y & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & C_m^1 y^{m-1} & \dots & C_m^{m-1} y \end{vmatrix}$$

Je dis que $\theta(y)$ ne renferme qu'un terme en y, et que ce terme est du degré $p(2p-1)$.

Multiplions, en effet, comme l'a indiqué M. Crétin, les colonnes, respectivement, par

$$y^0,\ y^2,\ y^4,\ \dots\ y^{2m-4};$$

les lignes deviennent homogènes et, respectivement, d'un degré égal à :

$$m,\ m+2,\ m+4,\ \ldots\ 2m-4;$$
$$m-1,\ m+1,\ \ldots\ 2m-3.$$

Ainsi, après la multiplication par une certaine puissance de y, on reconnaît que $\theta(y)$ est une forme homogène de la lettre y ; d'où nous pouvons conclure qu'elle jouissait aussi de cette propriété avant la multiplication que nous venons d'imaginer.

D'autre part, le terme diagonal de $\theta(y)$ est

$$(y^m)^{p-1}\ (C_m^{m-1}\ y)^p,$$

ou

$$m^p\ y^{2p(p-1)+p},$$

ou encore

$$m^p y^{p(2p-1)}.$$

Ainsi $\theta(y)$ est du degré $p(2p-1)$, et l'on peut poser

$$\theta(y) = Hy^{p(2p-1)},$$

Il reste à vérifier que le coefficient numérique H est différent de zéro. On a en effet

$$H = \theta(1);$$

si l'on avait $H = 0$. les deux formes :

$$\frac{(t+1)^m + (t-1)^m}{2},$$

$$\frac{(t+1_m) + (t-1)^m}{2t},$$

qui ont précisément pour résultant $\theta(1)$, admettraient un diviseur commun δ. Ce diviseur serait donc aussi commun aux formes :

$$(t+1)^m,\quad (t-1)^m,$$

et ceci est impossible, car $t+1$, et $t-1$ étant premiers entre eux, nous savons que $(t+1)^m$, et $(t-1)^m$ sont aussi premiers entre eux (*).

(*) Pour la suite de cette démonstration voyez notre traité d'Algèbre.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. S. Réalis, ingénieur à Turin.

... Après les substantiels travaux sur l'analyse indéterminée qui figurent dans les derniers volumes du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, je crois que quelques propositions très simples sur la non-divisibilité de certaines formes quadratiques binaires par certains nombres premiers, peuvent maintenant être invoquées sans inconvénient comme moyen de solution pour une classe de questions se rattachant à la fois à l'arithmologie et à la théorie des équations. Les propositions particulières sur lesquelles reposent les énoncés ci-joints ne sont pas rapportées, à la vérité, dans les articles cités; mais elles sont si aisées à démontrer directement, sans avoir recours à la théorie générale exposée par Lagrange dans ses *Recherches d'Arithmétique* (t. III des *Œuvres*), qu'elles ne sauraient réellement pas faire objet de difficulté, même dans les éléments. C'est sur quoi je pourrai revenir au besoin, dans un article spécial.

D'après cela, je crois pouvoir vous adresser les quelques *questions* ci-jointes (*), pour être insérées, s'il y a lieu, dans votre utile recueil. Si l'on parvient à résoudre ces questions par une voie différente de celle qui les a amenées (ce dont il y a lieu de douter), ce sera autant d'acquis au point de vue de la méthode. Dans le cas contraire, et en admettant chez vos jeunes lecteurs la connaissance des lemmes préliminaires, la recherche des différentes solutions ne laissera pas que de leur offrir un utile sujet d'exercice.

Des résultats de ce genre peuvent assurément être multipliés, et variés de beaucoup de manières (**)...

(*) Voyez les questions proposées à la fin du présent numéro.

(**) On peut ajouter à l'énoncé 159, par exemple, que, pour β premier avec 3, aucune des équations

$$x^4 + \alpha x^3 + 2\alpha^2 x^2 - \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0$$

$$x^4 + \alpha x^3 + 2(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière.

Additions analogues pour les autres énoncés.

QUESTIONS D'EXAMENS

* **13.** — *Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à la cubique* Γ *qui correspond à l'équation*

$$y^2 = x^3,$$

deux tangentes rectangulaires.

En exprimant que la droite ($y = mx + n$) rencontre Γ en trois points dont deux sont coïncidents, on trouve que l'équation générale des tangentes à Γ est

$$y = mx - \frac{4m^3}{27}.$$

En considérant x, y comme les coordonnées d'un point du lieu, on voit que l'équation

$$m^3 - \frac{27x}{4} m + \frac{27y}{4} = 0$$

admet trois racines parmi lesquelles deux (m' m'') ont un produit égal à -1; soit m la troisième racine, on a

$$mm'm'' = -\frac{27y}{4},$$

ou

$$m = \frac{27y}{4}.$$

Finalement, l'équation du lieu est

$$y^2 = \frac{4}{27}\left(x - \frac{4}{27}\right).$$

Le lieu est donc une parabole; on vérifiera que cette parabole est doublement tangente à la cubique proposée.

* **14.** — *Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe qui correspond à l'équation*

$$xy^2 = 1,$$

deux tangentes rectangulaires.

La méthode ordinaire, rappelée dans l'exercice précédent, conduit à un résultat remarquable; on trouve que le lieu demandé est un cercle.

* **15.** — *Mener une tangente commune à deux coniques confocales.*

Lorsque deux coniques sont confocales, elles admettent d'abord deux tangentes communes imaginaires. Ce sont les parallèles aux directions isotropes, issues du foyer commun. Pour ce motif, le problème proposé est quadratique; et si l'on désigne par F le foyer commun, par A et B les points d'intersection des cercles principaux des deux coniques, les deux autres tangentes communes sont les perpendiculaires élevées aux points A et B, aux rayons vecteurs FA et FB.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Exercices de Géométrie descriptive, par F. I. C. (deuxième édition; Mame et fils, Poussielgue frères, éditeurs, 1884). — Il y a presque un demi-siècle, en 1837, Chasles (*) écrivant son *Aperçu historique*, après avoir rappelé les ouvrages de Lacroix et de Hachette, les traités de Leroy, de Vallée, et de Lefébure de Fourcy, disait, en parlant des mémoires de Th. Olivier qui paraissaient alors dans le *Journal de l'École Polytechnique :* « La Géométrie descriptive est encore en voie de progrès ». Cette parole de Chasles est revenue plus d'une fois à notre mémoire en lisant les nombreux traités de Géométrie descriptive qui ont été publiés dans ces dernières années et qui marquent, d'une façon si nette, la marche en avant de la science de Monge. Les Exercices de Géométrie descriptive publiés par l'homme modeste et savant qui ne se révèle à nous que par les initiales citées plus haut, nous paraissent bien dignes de prendre place à côté des livres auxquels nous venons de faire allusion ; et, comme eux, il contribuera pour sa large part au progrès incessant que nous avons rappelé.

Ce livre que nous voudrions analyser en détail s'adresse tout particulièrement aux candidats à l'Ecole de Saint-Cyr, à l'Ecole Polytechnique et à l'Ecole Centrale. Il nous a bien agréablement surpris par la clarté de son exposition, l'abondance et la variété des questions qu'il développe. « Les idées générales, dit l'auteur, avec tant de raison, dès les premières pages de son livre, ont toujours une grande importance; or ces idées se développent surtout par l'étude des méthodes applicables à un grand nombre de questions, et non par la connaissance d'une multitude de problèmes résolus directement ou traités par des procédés d'un usage trop restreint. » Il y a dans ces quelques mots l'expression d'une idée qui nous paraît profondément sage et juste, conforme en tous ses points à celle qu'un professeur ne doit jamais perdre de vue. Elle s'applique remarquablement bien à toutes les branches de l'enseignement, mais, peut-être, plus particulièrement à la Géométrie Descriptive, science dans laquelle il est si facile, par l'abus des petits problèmes et par l'examen excessif et trop multiplié des cas particuliers, de perdre de vue les principes généraux et les idées fondamentales.

(*) Chasles, *Aperçu historique*, p. 356.

Dans la citation que nous avons faite tout à l'heure, on peut trouver le résumé très exact du plan que l'auteur s'est imposé et qu'il n'a pas un seul instant perdu de vue dans la rédaction de son ouvrage. Nous regrettons vivement de ne pouvoir entrer, faute d'espace, dans l'examen détaillé de ce livre. Nous citerons pourtant, parmi les chapitres qui nous ont plus particulièrement frappé, les problèmes relatifs au paraboloïde et à la sphère; ceux, très originaux, qui traitent de l'enroulement des courbes sur les surfaces; les plans cotés, qui donnent lieu à des questions nombreuses, fréquemment posées, sous des formes diverses, aux examens de Saint-Cyr et de l'Ecole Centrale ; enfin, les problèmes de récapitulation tirés, pour la plupart, des compositions données dans les différents concours.

L'impression du livre, et ce n'est pas une quantité négligeable dans un ouvrage où la figure joue un rôle presque prépondérant, est remarquablement soignée. Les épures accompagnent le texte; leur exécution et leur clarté ne laissent rien à désirer. C'est, en résumé, un ouvrage bien conçu, bien rédigé et très heureusement exécuté. Il est d'ailleurs écrit avec une grande netteté et l'on y rencontre des traces constantes d'originalité et d'érudition.

Peut-être n'est-il pas assez répandu dans l'enseignement universitaire; ses qualités qui nous ont vivement frappé nous font désirer que le jugement élogieux que nous venons de porter sur lui et qu'il nous paraît mériter si bien, contribue à le faire connaître et apprécier. G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES (*)

159. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 3, aucune des deux équations

$$x^4 + \alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + \alpha x^3 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - 2\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. *(S. Réalis.)*

160. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 5, aucune des équations

$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^3 + \beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^8 + (\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 3\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - \beta^4 = 0;$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 \pm 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x_3 + (\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 3\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 + 3\alpha\beta^2 x - 4\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. *(S. Réalis.)*

(*) Les questions 138 à 145 proposées dans les numéros de mars et avril derniers ont été mal désignées. Elles doivent, en réalité, porter les numéros 151 à 158.

161. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 7, aucune des équations

$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm \beta^2)x^2 + 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 4\beta^2)x^2 - 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 5\beta^2)x^2 \pm 3\alpha\beta^2 x - 3\beta^4 = 0;$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm 2\beta^2)x^2 - \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 3\beta^2)x^2 \pm \alpha\beta^2 x - 5\beta^4 = 0;$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 - 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 \pm 4\beta^2)x^2 + 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 5\alpha x^3 + (\alpha^2 + 6\beta^2)x^2 \mp 5\alpha\beta^2 x - 6\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. *(S. Realis.)*

162. — Démontrer que, α étant un entier quelconque, et β un entier premier avec 13, aucune des équations

$$x^4 + 4\alpha x^3 + 17\alpha^2 x^2 + 9\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 17\alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 + 9\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 9\alpha x^3 + 17\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0,$$
$$x^4 + 9\alpha x^3 + 4\alpha^2 x^2 + 17\alpha\beta^2 x - 12\beta^4 = 0$$

ne peut avoir une racine entière. *(S. Realis.)*

163. — Étant données trois droites dans l'espace, il n'est pas, en général, possible de construire un triangle ayant ses sommets respectivement sur les droites données, et tel que chacun de ses côtés soit orthogonal à la droite passant par le sommet opposé. Faire voir que dans le cas où le problème est possible, il est indéterminé et trouver alors le lieu du centre de gravité du triangle et l'enveloppe de son plan. *E. Cr.)*

164. — ABRACADABRA (*)

On écrit un mot en triangle, comme il suit, en prenant pour exemple le mot *abracadabra :*

(*) La théorie du triangle arithmétique provient peut-être de l'étude des propriétés de ce triangle cabalistique.

ABRACADABRA
ABRACADABR
ABRACADAB
ABRACADA
ABRACAD
ABRACA
ABRAC
ABRA
ABR
AB
A

Dans ce triangle les mêmes lettres sont placées sur une même diagonale, et l'on voit qu'en partant d'une ligne quelconque on peut lire le mot dans le sens de gauche à droite et de bas en haut.

Démontrer que si l'on part de la première lettre à gauche dans la ligne de rang $(q + 1)$ du triangle formé par un mot de $(p + 1)$ lettres, le nombre des manières de lire le mot est C_p^q, et que le nombre total, pour toutes les lignes, est 2^p. *(Édouard Lucas.)*

Erratum. — Dans le précédent numéro, p. 79, ligne 6; au lieu de *les bissectrices intérieures*, lisez *les perpendiculaires aux milieux des côtés.*

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS — 10716-5.

DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES

DE QUELQUES PROPOSITIONS SUR LA NON-DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FORMES ARITHMÉTIQUES PAR DES NOMBRES DONNÉS

Par M. **S. Réalis.**

(*Suite*, voir p. 97.)

5. — On voit assez de quelle manière on parvient à mettre en évidence la non-divisibilité de certaines formes quadratiques par des nombres donnés, lorsque les diviseurs sont peu considérables. Tout se réduit effectivement, d'après le procédé indiqué, à constater la chose pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots, 2p$ des indéterminées qui entrent dans la forme proposée, $2p + 1$ étant le diviseur considéré.

Aux exemples qui précèdent, et où il n'est question que de formes du deuxième degré, nous ajouterons encore les suivants, se rapportant à des formes d'un degré plus élevé. Nous sous-entendons que les nombres u, v sont positifs et premiers entre eux.

Théorèmes. — 1° *Aucune des formes*

$$u^3 \pm 3v^3; \quad 3u^3 - v^3$$

ne peut représenter un nombre divisible par 7.

2° *Aucune des formes*

$$u^5 \pm 5v^5; \quad 5u^5 - v^5$$

ne peut représenter un nombre divisible par 11.

Ces propositions n'ont peut-être pas encore été énoncées d'une manière explicite; on les vérifie immédiatement en procédant comme ci-dessus, c'est-à-dire en exprimant u et v par des formes linéaires où ils soient premiers avec le diviseur considéré.

6. Note. — Les fondements de la théorie concernant les diviseurs des formes quadratiques à deux indéterminées ont été posés par Euler dans différents mémoires qui font partie

des *Novi Commentarii Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, Mémoires où se trouvent démontrées plusieurs propositions dont Fermat n'avait laissé que les énoncés. L'exposition méthodique de la théorie générale a fait ensuite l'objet d'un mémoire très substantiel de Lagrange, intitulé *Recherches d'arithmétique* (t. III des *Œuvres*). La même théorie a été reprise depuis, avec de nouveaux développements, par Euler, dans le mémoire *Novæ demonstrationes circa divisores numerorum formæ* $x^2 + ny^2$ (Voir *Nova Acta Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, t. I) (*). Dans ces importants écrits, les deux grands géomètres parviennent, par des voies différentes, à la détermination des formes quadratiques, et des formes linéaires correspondantes, dans lesquelles doivent être renfermés les diviseurs dont il s'agit, et d'où l'on conclut ensuite les formes linéaires qui se rapportent aux non-diviseurs.

Nous n'avons pas besoin de rappeler, en terminant d'après l'ordre chronologique, les célèbres *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, où la théorie des formes quadratiques fait l'objet de la section IV *(De congruentiis secundi gradus)*.

Les principaux résultats renfermés dans les ouvrages cités ont été consignés par Legendre dans la *Théorie des nombres* (t. I, seconde partie). A défaut des sources originales, on consultera aussi avec fruit les *Exercices d'analyse numérique*, par Le Besgue; on y trouve (§ XIII, n°s 63 et 64) la démonstration, d'après Gauss, des théorèmes généraux auxquels se rapportent les n°s 1 et 2 ci-dessus.

Dans aucun de ces écrits, disons-le tout de suite, l'exposition n'est de nature à être introduite dans l'enseignement courant.

7. — Les démonstrations tout à fait élémentaires dont nous avons ci-dessus indiqué le principe, ont pour but de mettre à la portée des élèves, indépendamment des doctrines arithmologiques, un grand nombre de propositions dont la

(*) Ce mémoire d'Euler se trouve reproduit dans l'édition : *Leonhardi Euleri commentationes arithmeticæ collectæ*, publiée à Saint-Pétersbourg, 1849; Voy. t. II, p. 159. G. L.

connaissance peut être utile en différentes questions d'analyse. Le procédé employé n'est pas particulier aux théorèmes considérés, et peut mettre sur la voie de résultats entièrement nouveaux; il fournit en outre le moyen de s'assurer de l'exactitude ou de la fausseté de certaines conclusions auxquelles on pourrait être conduit par l'induction, ou autrement; il est enfin d'une extrême simplicité. C'est ce qui peut donner quelque intérêt à cet essai de contribution, de notre part, à l'œuvre si bien initiée par le *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, et qui a pour objet la vulgarisation des principes de l'analyse indéterminée et de la théorie des nombres.

PROPRIÉTÉS
DE
L'HYPERBOLE DES NEUF POINTS
ET DE SIX PARABOLES REMARQUABLES

Par M. **H. Brocard.**

(*Suite*, voir p. 104.)

20. — Si les paraboles sont rapportées à AC pris pour axe des x et à la perperdiculaire Ay, l'équation de la parabole (BC) est de la forme

$$\lambda y(y - mx) + \left[y + m'(x - b)\right]^2 = 0$$

en posant pour abréger, tg A $= m$, et tg C $= m'$. On aura pour déterminer λ la condition

$$(2m' - m\lambda)^2 - 4m'^2(1 + \lambda) = 0;$$

d'où

$$\lambda = \frac{4m'(m + m')}{m^2}.$$

et l'équation de la parabole (BC) deviendra

$$\left(m'x - \frac{m + 2m'}{m}y\right)^2 - 2bm'(y + m'x) + b^2m'^2 = 0.$$

De même, la parabole (AC) aura pour équation

$$[(m' - m)y - 2mm'x]^2 + 4bmm'^2(y - mx) = 0,$$

et la parabole (AB),

$$[m'x + y(m' + 2m)]^2 - 8b(m + m')y = 0.$$

Le paramètre de la première parabole aura alors pour expression

$$2p = \frac{2bm'^2\left[1 + \frac{m + 2m'}{m}\right]}{\left[m'^2 + \left(\frac{m + 2m'}{m}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

et en profitant des relations

$$m' = \frac{mc \cos A}{a \cos C}, \quad \frac{m + 2m'}{m} = \frac{b + c \cos A}{a \cos C};$$

l'on trouve, en définitive,

$$2p = \frac{4a^2b^2 \sin^2 C}{\left[a^2 \sin^2 C + b^2 + c^2 \cos^2 A + 2bc \cos A\right]^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$p_a = \frac{8S^2}{a^3}.$$

Les deux autres paraboles auront donc pour paramètres :

$$p_b = \frac{8S^2}{b^3}, \quad p_c = \frac{8S^2}{c^3}.$$

21. — Chacune des paraboles considérées dans ce qui précède admet cinq tangentes particulières, savoir : pour la parabole (BC), les côtés AB, AC, du triangle, la droite qui joint leurs milieux, et les parallèles à une des médianes BE, CE, menées par les points qui divisent l'autre médiane au huitième de sa longueur à partir de la base. L'existence d'une sixième tangente a été signalée par M. E. Lemoine, dans deux mémoires que l'auteur m'a obligeamment communiqués (*).

Désignons par μ, μ', ν, ν', les points de rencontre des côtés

(*) Ces deux Mémoires ont paru dans les numéros de mai 1885 de *Mathesis* et des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

du triangle avec les droites BO, BO′, CO, CO′. L'une des droites $\mu\nu'$, $\nu\mu'$, est tangente à la parabole (BC).

En effet, les coordonnées des points O et O′ étant respectivement proportionnelles à $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{a}{b}$ et à $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{a}$, l'équation de $BO\mu$ est $\alpha + m\gamma = 0$, avec $\frac{b}{c} + m\frac{a}{b} = 0$ ou $b^2\gamma - ac\alpha = 0$. On trouverait de même $c^2\beta - ab\alpha = 0$ pour équation de $CO'\nu'$. On en conclut aisément, pour équation de $\mu\nu'$, $c^3\beta + b^3\gamma - abc\alpha = 0$ et cette droite est bien tangente à la parabole (BC); mais il n'en est plus de même de la droite $\nu\mu'$, car cette droite a pour équation $ac^3\gamma + ab^3\beta - b^2c^2\alpha = 0$, et l'on voit qu'elle n'est pas tangente à la parabole proposée.

L'analogie semblait autoriser cette déduction; mais, comme l'a fait remarquer M. E. Lemoine, les deux droites $\mu\nu'$, $\nu\mu'$, ne sont pas comparables. Si l'on se reporte, en effet, à la corrélation nouvelle indiquée par M. E. Lemoine entre les points K, O et O′, l'une des droites considérées joint les extrémités des deux parallèles à deux côtés différents, tandis que l'autre joint les extrémités de deux parallèles à un même côté. La première seule est tangente à la parabole.

A chaque point M du plan du triangle correspondent deux points m, m', obtenus comme il suit.

Les lignes AM, BM, CM rencontrent les côtés du triangle en trois points α_1, β_1, γ_1, par lesquels on mène des parallèles aux deux autres côtés, ce qui détermine six points λ, λ', μ, μ', ν, ν', disposés dans l'ordre direct ou inverse des sommets du triangle ABC. Les droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ se rencontrent en un point m, les droites $A\lambda'$, $B\mu'$, $C\nu'$ en un point m'. Lorsque le point M est le point de Lemoine, les points m, m' deviennent les points de Brocard.

22. — Ainsi, en résumé, nous avons établi la proposition suivante :

Théorème. — *Dans tout triangle, les deux bissectrices de chaque angle et les perpendiculaires aux milieux des côtés qui comprennent cet angle forment un groupe de quatre droites tan-*

gentes à une parabole dont la directrice est la médiane partant du sommet de l'angle considéré.

Les trois paraboles ainsi déterminées admettent deux tangentes communes rectangulaires passant par le centre de gravité du triangle, point commun à leurs directrices (*).

L'une de ces tangentes rencontre les perpendiculaires aux milieux des côtés en trois points, sommets de triangles isoscèles semblables, intérieurs au triangle donné, et dont l'angle φ *à la base est déterminé par l'équation*

$$\cot^2 \varphi - 2 (\cot A + \cot B + \cot C) \cot \varphi + 3 = 0.$$

Les foyers A_2, B_2, C_2 *de ces trois paraboles sont les intersections des médianes antiparallèles du triangle avec le cercle de Brocard.*

Ces points sont aussi les foyers des trois paraboles tangentes à deux côtés du triangle aux extrémités du troisième côté.

Ces paraboles admettent pour axes des parallèles aux médianes du triangle et pour cordes communes ces médianes, qu'elles divisent dans un rapport constant, au huitième à partir de leurs bases.

Il est, enfin, à rappeler que ces points A_2, B_2, C_2 ont été déjà considérés dans une des précédentes études, et tout ce que nous venons de dire peut être regardé comme le développement de certains paragraphes du Mémoire précité (*Congrès d'Alger*, §§ 15, 16, 17, 18). La notion de ces points a été donnée dans ce Mémoire d'après les résultats obtenus à cette époque par M. G. Tarry, puis rappelés au *Zeitschrift* (questions 314, 315, t. XIV, 1883, p. 357) et leurs principales

---

(*) Voici un autre groupe de trois paraboles remarquables présentant plusieurs analogies avec les paraboles précitées.

Les deux bissectrices de chaque angle d'un triangle et les deux hauteurs correspondant aux côtés de cet angle forment un système de quatre tangentes à une parabole.

Les trois paraboles ainsi déterminées admettent pour directrices les symédianes et pour foyers les intersections des médianes avec la circonférence décrite sur la distance du centre de gravité à l'orthocentre comme diamètre.

De plus, ces trois paraboles sont tangentes à deux droites rectangulaires passant par le centre des symédianes, point de rencontre des directrices.

Cette proposition offre un intéressant exemple d'un genre peut-être nouveau de réciprocité dans les propriétés de certains points du triangle, transformés les uns des autres par droites symétriques.

propriétés ont été démontrées dans le Mémoire d'Alger (*loc. cit.*) et dans le *Zeitschrift* (t. XV. 1884, p. 121-122).

Ainsi, les points A_2, B_2, C_2 se trouvent aux intersections du cercle de Brocard avec les circonférences OAB, OAC, OBC, ou plus simplement avec les droites AK, BK, CK, symédianes du triangle. Les triangles ABC, $A_2B_2C_2$ sont homologiques. Leur centre d'homologie est donc le point K, centre des symédianes ou point de Lemoine. Leur axe d'homologie est une certaine droite dont on n'a pas encore étudié les propriétés.

23. — Pour terminer, nous allons brièvement indiquer la traduction analytique des divers résultats exposés plus haut pour les points A_2, B_2, C_2.

L'équation du cercle $A_2B_2C_2$ (cercle de Brocard) a été donnée pour la première fois, dans le *Quart. J. of pure and appl. math.* (t. XIX, 1883, n° 76), par M. R. Tücker, en coordonnées trilinéaires, sous la forme très simple et très symétrique

$$abc\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^3\beta\gamma + b^3\alpha\gamma + c^3\alpha\beta.$$

Il est facile de reconnaître l'identité de cette équation avec celle que M. Stoll a indiquée dans le *Zeitschrift* (t. XV, 1884, p. 121 et 354) :

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}\left(\frac{\alpha}{\sin A} + \frac{\beta}{\sin B} + \frac{\gamma}{\sin C}\right)$$
$$(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = \alpha\beta \sin C + \alpha\gamma \sin B + \beta\gamma \sin A,$$

au moyen de laquelle on reconnaît facilement que l'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit est la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit, propriété énoncée par M. Casey et par M. Fuhrmann (*Zeits.*, *loc. cit.* t. XV, pp. 125 et 435-436).

Cette droite (d) qui a pour équation

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0$$

(Stoll, *loc. cit.* t. XV, p. 354), est donc la polaire du point de Lemoine par rapport au cercle circonscrit (Fuhrmann, *loc. cit.*) : mais, d'après une intéressante remarque de M. G. de Longchamps, elle est susceptible d'une élégante construction que l'on peut ainsi définir :

Les tangentes menées par les sommets d'un triangle ou cercle circonscrit rencontrent, comme l'on sait, les côtés correspondants en trois points situés en ligne droite (*). Cette droite (d) est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle de Brocard.

En voici d'ailleurs une démonstration.

Le cercle circonscrit a pour équation

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 0.$$

Les tangentes aux sommets A, B, C ont respectivement pour équations

$$\frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0, \quad \frac{\gamma}{c} + \frac{\alpha}{a} = 0, \quad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 0.$$

Elles rencontrent donc les côtés correspondants en trois points situés sur une même droite (d) ayant pour équation

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 0.$$

De même, ces trois tangentes forment un triangle circonscrit A″B″C″ et les droites AA″, BB″, CC″ ont respectivement pour équations

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\beta}{b}, \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{\gamma}{c}, \quad \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b}.$$

Elles concourent donc en un même point K, centre d'homologie des deux triangles ABC, A″B″C″,

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c},$$

c'est-à-dire dont les distances sont proportionnelles aux côtés, ce qui définit le centre K des symédianes ou point de Lemoine. Ce point est le pôle de la droite (d) par rapport au cercle circonscrit, et l'on retrouve ainsi une construction connue de ce point K. (Voir l'étude de M. J. Neuberg dans *Mathesis*, t. I, p. 173.)

24. Quant aux points A_2, B_2, C_2, leurs coordonnées peuvent s'obtenir facilement par ce qui précède. Le point A_2, par

(*). Cette propriété est un cas particulier de celle qui s'observe sur les coniques circonscrites à un triangle.

exemple, résulte de l'intersection des lignes représentées par les équations

$$abc\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^3\beta\gamma + b^3\alpha\gamma + c^3\,\alpha\beta, \qquad (1)$$

$$\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Divisant la première par γ^2 et remplaçant $\frac{\beta}{\gamma}$ par $\frac{b}{c}$, il vient

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{a}{c}\right)\left(\frac{\alpha}{\gamma} - b\,\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}\right) = 0,$$

équation qui représente le faisceau des deux droites BB_2 et BA_2.

Ainsi les coordonnées du point A_2 ont pour expressions

$$\frac{\alpha}{\dfrac{2bc\,\cos A}{a}} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Ces résultats peuvent être obtenus directement. En effet, d'après les propriétés indiquées au Mémoire du *Congrès d'Alger* (*loc. cit.* § 17), si l'on désigne, pour abréger, AA_2, BB_2, CC_2, par ξ, η, ζ et les angles $ACA_2 = BAA_2$ et $CAA_2 = ABA_2$ par u_1 et u_2, la similitude des triangles A_2AC, A_2AB donne

$$\xi^2 = \eta\zeta.$$

De plus, $CA_2K = BA_2K = u_1 + u_2 = A$. Le point A_2 se trouvant sur la symédiane AK, l'on a

$$\frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}.$$

Mais la relation

$$\frac{\xi}{\sin u_1} = \frac{b}{\sin A}$$

peut s'écrire, successivement,

$$\sin A \cos A = \frac{b \sin u_1 \cos A}{\xi}, \quad \frac{\eta\zeta \sin 2A}{2} = b\xi \sin u_1 \cos A,$$

$$\text{aire } CA_2B = 2 \,.\, \text{aire } AA_2C'',$$

C'' étant la projection du point C sur AB. On a donc

$$a\alpha = 2b\gamma \cos A.$$

Pour avoir les expressions définitives des coordonnées α, β, γ du point A_2, il n'y a qu'à ajouter la condition

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2S,$$

et l'on trouve

$$\alpha = \frac{2S\,(m^2 - 2a^2)}{a(2m^2 - 3a^2)}, \quad \beta = \frac{2Sb}{2m^2 - 3a^2},$$

$$\gamma = \frac{2Sc}{2m^2 - 3a^2}. \qquad (A_2)$$

Les coordonnées des points B_2 et C_2 s'en déduisent par symétrie, et ont alors pour expressions :

$$\alpha = \frac{2Sa}{2m^2 - 3b^2}, \quad \beta = \frac{2S\,(m^2 - 2b^2)}{b(2m^2 - 3b^2)},$$

$$\gamma = \frac{2Sc}{2m^2 - 3b^2}; \qquad (B_2)$$

$$\alpha = \frac{2Sa}{2m^2 - 3c^2}, \quad \beta = \frac{2Sb}{2m^2 - 3c^2},$$

$$\gamma = \frac{2S\,(m^2 - 2c^2)}{c(2m^2 - 3c^2)}. \qquad (C_2)$$

Il est évident que l'équation (1) est identiquement vérifiée par les coordonnées de tous les points remarquables ω, ω', O, K, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. Il n'y a qu'à y substituer les expressions trouvées, préalablement débarrassées des facteurs constants qu'elles pourraient renfermer. Ainsi, pour le point A_2, par exemple, il suffirait de remplacer α, β, γ, respectivement par $\frac{m^2 - 2a^2}{a}$, b, c.

25. — Le calcul barycentrique de Möbius s'appliquerait également avec succès aux mêmes recherches, et donnerait plus de simplicité encore à certains résultats, ainsi que j'ai pu en juger par de nombreuses communications que je dois à l'obligeance d'un des géomètres qui ont le plus brillamment développé l'étude de ces intéressantes questions, M. J. Neuberg.

Enfin, il n'est pas jusqu'à des ellipses remarquables dont il y aurait encore à étudier les propriétés. Ces ellipses, indiquées aussi par M. A. Artzt, passent par le centre de gravité du triangle et touchent deux autres côtés aux extrémités du troisième. Leur détermination graphique se ramène à celle des ellipses circonscrites au triangle et dont le centre coïncide avec le centre de gravité, ellipses que l'on

rencontre dans d'autres recherches (*) et sur lesquelles s'est fixée déjà la curiosité de Steiner (**). Mais nous ne voulons pas abuser de la patience du lecteur, et nous croyons devoir en rester là, pour le moment, quitte à y revenir quelque jour, et saisir alors cette occasion de donner une bibliographie assez détaillée des travaux relatifs à l'étude des curieuses propriétés remarquées dans la géométrie du triangle.

SUR LES COURBES PARALLÈLES,

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps** (***).

1. — On sait que si l'on imagine une courbe (ou une surface) Γ et que, sur les normales à celle-ci, à partir du pied de la normale, on porte constamment, du même côté, une longueur donnée h; le lieu décrit par l'extrémité du segment ainsi obtenu est une courbe (ou une surface) Γ' dite *parallèle* à Γ.

La raison de cette dénomination ressort du théorème suivant:

Aux points correspondants les courbes parallèles ont leurs tangentes parallèles.

Voici, de cette propriété, une démonstration basée sur l'idée des transversales réciproques et qui paraîtra peut-être assez simple.

(*) On peut citer, par exemple, les ellipses et triangles provenant de la projection cylindrique d'un cercle et d'un triangle équilatéral inscrit ou circonscrit. Voir aussi Steiner, *Gesammelte Werke*, t. II, p. 431 et *J. de Crelle*, t. 45, p. 177-180.

(**) En projetant la figure formée par un triangle équilatéral, le cercle circonscrit et les cercles tangents à deux côtés aux extrémités du troisième, on conclut immédiatement cette propriété :

Les quatre ellipses dont il vient d'être question sont égales et ont leurs axes parallèles.

(***) Les courbes et les surfaces parallèles ont été remarquées et étudiées depuis longtemps. L'un des premiers mémoires sur cette question, le premier du moins à notre connaissance, a été écrit par Crelle (*Annales de Gergonne*, t. XII, 1821-1822; p. 1). Ce mémoire est intitulé : *Sur le parallelisme des lignes et surfaces courbes*, par M. Crelle, docteur en philosophie. Crelle, dans ce mémoire, démontre entre autres choses, mais par l'analyse, la propriété fondamentale des courbes parallèles, savoir que *le parallelisme est généralement réciproque pour toutes les courbes*, propriété que nous établissons ici par des considérations géométriques.

Prenons sur Γ deux points voisins M, N; soient M′ et N′ les points correspondants sur les normales OM, ON. Nous avons

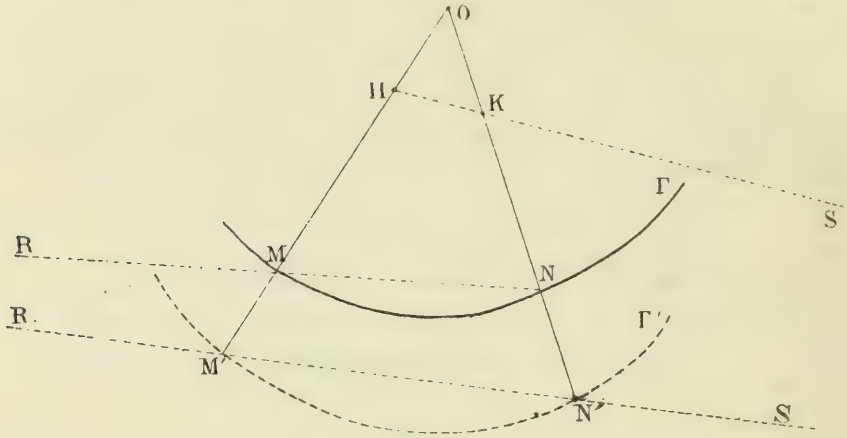


Fig. 1.

donc $MM' = NN' = h$. Si, à partir du point O, nous portons

$$OH = OK = h,$$

nous pouvons considérer les droites HK et MN comme deux transversales réciproques du triangle OM′N′. Conséquemment, les points R et S, points de rencontre de ces transversales avec le troisième côté M′N′ du triangle OM′N′, sont deux points symétriques, relativement au milieu de M′N′.

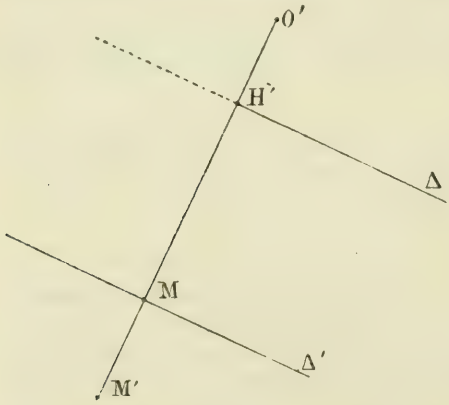


Fig. 2.

Cette remarque étant faite, supposons que le point N se rapproche de M, et vienne se confondre avec lui; HK a pour position limite une droite Δ perpendiculaire à OM, au point H; MN devient la tangente en M à Γ, c'est-à-dire une perpendiculaire Δ à OM au point M; enfin M′N′, à la limite, est la tangente à Γ′, au point M′.

Par suite, ayant pris *(fig. 2)* $O'H' = MM' = h$, pour obtenir la tangente au point M′ à Γ′, il faudra mener par M′ une droite partagée en deux parties égales par les parallèles Δ, Δ′. preuve donc que la tangente à Γ′, au point M′, est parallèle à Δ′.

De là résulte immédiatement que *les points correspondants de deux courbes parallèles ont le même centre de courbure ou, en d'autres termes, que deux courbes parallèles admettent la même développée* (*).

2. — Nous signalerons aussi, pendant que nous sommes sur ce sujet, d'autres applications des transversales réciproques au tracé des tangentes. Ces applications touchent de très près à la précédente, elles nous ont été inspirées par elle.

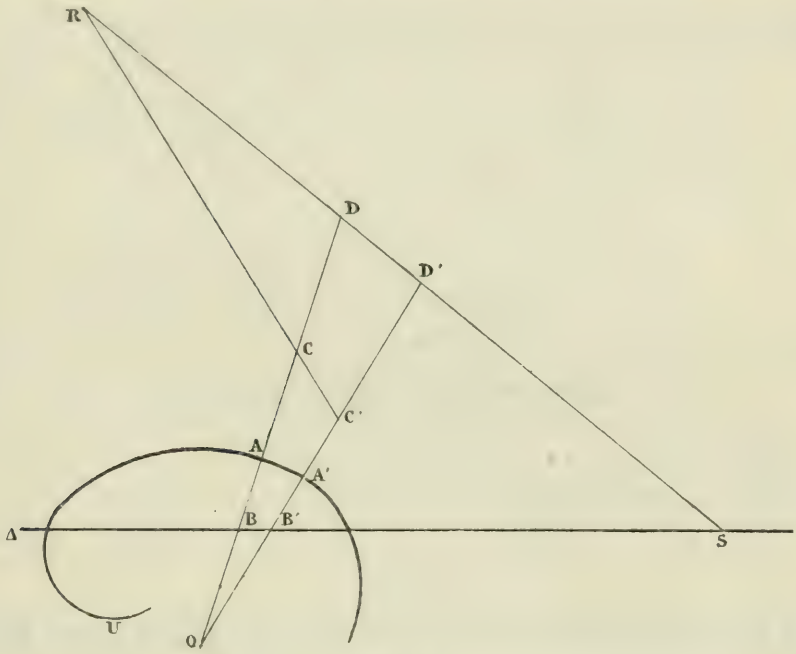


Fig. 3.

Imaginons une courbe U et une droite Δ; prenons sur U un point quelconque A et construisons la normale en ce point. Cette droite rencontre Δ en B; prenons AC = AB. Le lieu décrit par C est une certaine courbe V; proposons-nous de trouver la tangente à V, au point C.

A cet effet considérons sur U un point A′, voisin de A, et soient B′, C′ les points analogues de B et de C. Prenons maintenant CD = OB, et C′D′ = OB′; les droites BB′, CC′ sont deux transversales réciproques au triangle ODD′; par

(*) Voyez Bertrand, *Calcul différentiel*, pp. 12 et 83.

suite CC′ et BB′ rencontrent DD′ en deux points R, S symétriquement placés par rapport au milieu de DD′. Il faut aussi observer que, d'après la construction indiquée, DD′ est parallèle à AA′; enfin que AD = OA.

Passons à la limite; et supposons que A′ vienne se confondre avec A. Le point O a pour position limite le point ω, centre de courbure de U, au point A. Prenons Aδ = ωA; et, par δ, menons une parallèle à la tangente AT. Nous obtenons

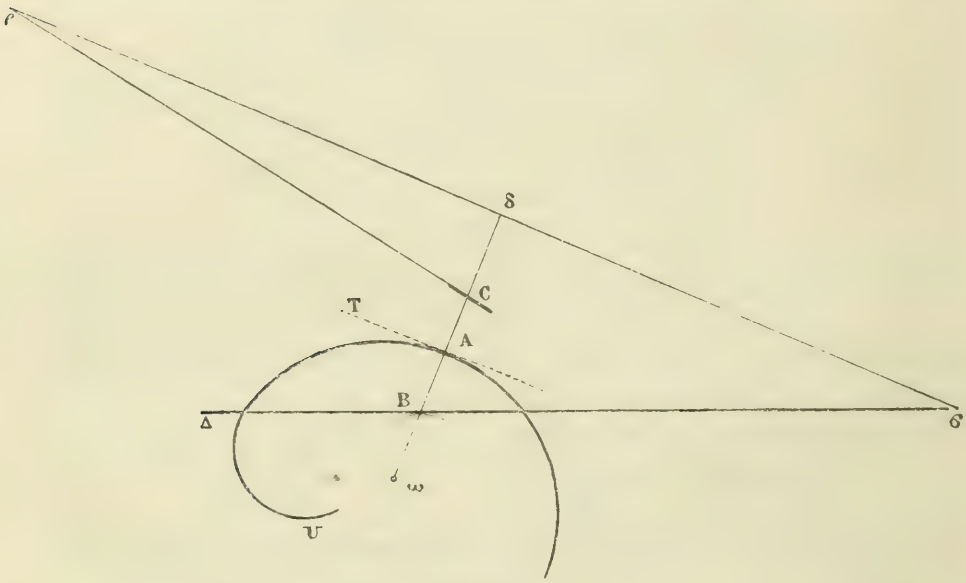


Fig. 4.

ainsi un certain point σ; et la tangente cherchée passe par ρ, point symétrique de σ, par rapport à δ.

On voit aisément comment il faut modifier la construction précédente quand la droite Δ est remplacée par une courbe quelconque. *(A suivre.)*

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. **A. Calinon,** ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous nous proposons d'indiquer dans ce nouveau travail comment on peut établir, conformément aux principes déve-

loppés précédemment (*), la théorie des aires et des volumes. Ce travail s'adressant plus spécialement aux personnes versées dans les mathématiques, nous nous bornerons, dans la plupart des cas, à énoncer les théorèmes; nous ne donnerons la démonstration que dans les passages un peu délicats.

§ 1. — *Moment des contours fermés.*

Soient dans un plan un segment AB, défini en grandeur, direction et sens, et un point F; le moment de AB par rapport à F est le produit AB $\times$ FH, FH étant la perpendiculaire abaissée de F sur AB; c'est la définition même donnée en mécanique; le moment peut être positif ou négatif; il est nul, soit quand AB est nul, soit quand AB passe par le point F.

Fig. 1.

Soit, dans un plan, une ligne polygonale AB ... G décrite dans le sens de A à G; le moment de cette ligne par rapport à un point F de ce plan est la somme algébrique des moments de ses divers côtés par rapport à F.

Théorème I. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments du segment* AB *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* ab *la projection de* AB *sur la direction* OZ *normale à* FF_1, *on a* $\mu_1 - \mu = FF_1 \times ab$.

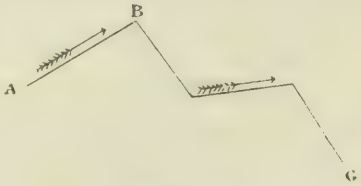


Fig. 2.

Théorème II. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de la ligne polygonale* AB *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* ab *la projection de* AB *sur la normale* OZ *à* FF_1, *on a* $\mu_1 - \mu = FF_1 \times ab$.

(*) Voyez *Journal de Mathématiques élémentaires*, 1884.

Théorème III. — *Le moment d'une ligne polygonale fermée est constant pour un point quelconque du plan.*

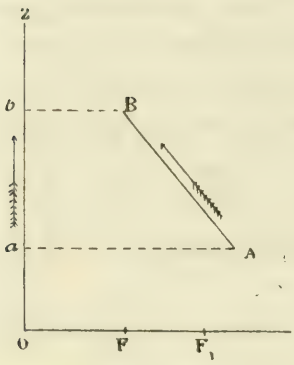


Fig. 3.

Si en effet le contour se ferme on a dans le théorème précédent $ab = 0$ et par suite $\mu_1 = \mu$.

Nous appellerons ce moment constant moment du contour.

Théorème IV. — *Si un contour fermé résulte du groupement de plusieurs contours fermés partiels, le moment du contour total est la somme des moments des contours partiels.*

Soient par exemple deux contours partiels adjacents par la partie AB, on voit immédiatement qu'en prenant les moments par rapport à un point quelconque du plan, la partie commune AB donne des moments égaux et le signe contraire dans les contours partiels; par suite ces moments disparaissent dans la somme.

Fig. 4.

Théorème V. — *Soient μ et μ_1 les moments des segments* AB *et* A_1B_1, *inscrits dans un même angle* AFB, *par rapport au sommet* F *de cet angle, on a :*

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{FA.FB}{FA_1.FB_1}.$$

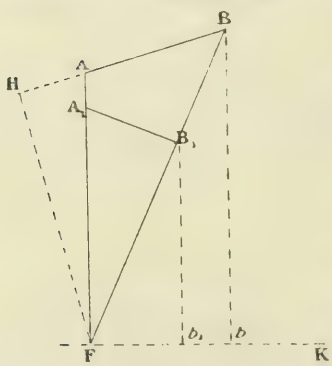


Fig. 5.

Projetons en effet B et B_1 en b et b_1 sur la normale FK à FA, le moment μ ou AB $\times$ FH de AB est aussi égal à $Fb \times FA$; on a de même

$$\mu_1 = Fb_1 \times FA;$$

on en déduit

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{FA}{FA_1} \cdot \frac{Fb}{Fb_1} = \frac{FA}{FA_1} \cdot \frac{FB}{FB_1}.$$

Corollaire. — *Si les points* A_1 *et* B_1 *sont plus voisins de* F *que* A *et* B, *on a* $\mu > \mu_1$.

Théorème VI. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de deux lignes polygonales* AMB *et* ANB *par rapport à un point* F ; *si la ligne* ANB *est intérieure à la ligne* AMB *par rapport à ce point* F, *on a* $\mu > \mu_1$.

On le voit immédiatement en décomposant les deux lignes par des rayons vecteurs issus de F et passant par les sommets des deux lignes; il suffit alors d'appliquer le corollaire précédent aux éléments du contour compris entre deux rayons consécutifs.

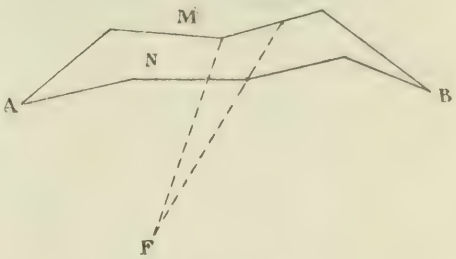


Fig. 6.

Le théorème est encore vrai pour deux contours fermés, l'un contenant l'autre ; le moment du contour intérieur est plus petit que le moment du contour extérieur ; il n'importe pas que les contours soient concaves ou convexes.

Théorème VII. — *Soient un arc de courbe* AMB *et une ligne polygonale* ANB *à côtés infiniment petits et infiniment voisine de l'arc, c'est-à-dire telle que chaque côté en s'annulant devienne un point de cet arc ; le moment de la ligne polygonale par rapport à un point* F *a une limite constante, quelle que soit la manière dont cette ligne se déforme pour se confondre avec l'arc.*

1° Si en effet nous considérons deux positions successives de la ligne ANB, la position la plus voisine de l'arc est enveloppante par rapport à l'autre et a par suite un moment plus grand (Th. VI) ; donc le moment augmente quand la ligne se rapproche de l'arc; ce moment est d'ailleurs toujours inférieur à celui d'une ligne polygonale AN'B enveloppant l'arc : donc, ce moment a une limite.

2° Soient maintenant deux lignes différentes ANB et AN_1B tendant toutes deux à se confondre avec l'arc : on peut toujours considérer ces deux lignes comme composées d'élé-

ments rectilignes correspondants ab et a_1b_1; si μ et μ_1 sont les moments de ces éléments on a (Th. V)

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{Fa \,.\, Fb}{Fa_1 \,.\, Fb_1};$$

or les deux éléments venant à la limite se confondre en un même point de l'arc, on a

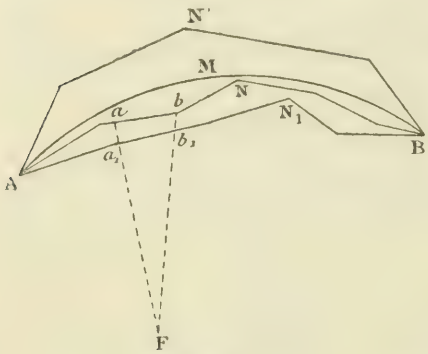


Fig. 7.

$$\lim. \frac{Fa}{Fa_1} = 1 \text{ et } \lim. \frac{Fb}{Fb_1} = 1$$

et par suite

$$\lim. \frac{\mu}{\mu_1} = 1 :$$

dès lors, les moments des lignes ANB et AN_1B étant les sommes respectives des éléments μ et μ_1, ces moments ont même limite.

Cette limite constante du moment des lignes polygonales infiniment voisines de l'arc AB est, par définition, le moment de l'arc.

Remarque I. — Il n'est pas nécessaire que, dans les lignes polygonales en question, les côtés prennent la direction de la tangente à la courbe, ainsi qu'on le suppose dans la définition de la longueur de l'arc.

Remarque II. — Le moment d'un arc étant ainsi défini, nous étendrons immédiatement à l'arc les théorèmes précédents II, III, IV et VI, relatifs aux lignes polygonales.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

16. — *Soit l'équation*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0, \qquad (1)$$

dont les trois racines sont a, b, c; *calculer la fonction symétrique* U,

$$U = (a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab).$$

Première solution. — On peut d'abord observer que

$$U \,.\, abc = (a^3 + r)(b^3 + r)(c^3 + r),$$

relation qui peut encore s'écrire

$$-U = (pa + q)(pb + q)(pc + q).$$

On trouve, finalement,

$$U = -q^3 + p^3 r.$$

Deuxième solution. — Proposons-nous de transformer l'équation (1), la formule de transformation étant

$$y = a^2 - bc.$$

Nous avons

$$ay = a^3 - abc = a^3 + r = -pa^2 - qa,$$

ou

$$-a = \frac{y + q}{p}.$$

En substituant cette valeur de a, dans la relation

$$a^3 + pa^2 + qa + r = 0,$$

nous obtenons, tout calcul fait, l'équation suivante :

$$y^3 + (3q - p^2)y^2 + q(3q - p^2)y + q^3 - rp^3 = 0.$$

17. — *On donne le quotient* Q *et le reste* A *obtenus en divisant un polynôme* P *par* $x - a$; *soient, de même,* Q′ *le quotient et* B *le reste de la division de* P *par* $x - b$. *Trouver le quotient* Q″ *et le reste* $mx + n$, *donnés par la division de* P *par le produit* $(x - a)(x - b)$. *On suppose* $a - b \neq 0$.

Les identités :

$$P = (x - a)Q + A,$$
$$P = (x - b)Q' + B,$$

donnent, par combinaison,

$$P(x - b) - P(x - a) = (x - a)(x - b)(Q - Q') + x(A - B) + Ba - Ab.$$

On en conclut

$$P = (x - a)(x - b)\frac{Q - Q'}{a - b} + x\,\frac{A - B}{a - b} + \frac{Ba - Ab}{a - b},$$

et, par suite,

$$Q'' = \frac{Q - Q'}{a - b},$$

$$m = \frac{A - B}{a - b},$$

$$n = \frac{Ba - Ab}{a - b}.$$

18. — *Résoudre l'équation*

$$3x^3 - 3x + 1 = 0.$$

En appliquant la méthode trigonométrique on trouve sans difficulté que les trois racines sont :

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 10^\circ,$$

$$-x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 50^\circ,$$

$$-x_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 70^\circ.$$

Parmi les conséquences qui découlent naturellement de ce résultat, on peut remarquer la suivante :

$$\sqrt{3} = 8 \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ.$$

Remarque. — On rencontre quelques équations du troisième degré dont les racines peuvent, comme dans celle qui précède, être exprimées par les sinus ou cosinus d'arcs renfermant un nombre exact de degrés.

Nous citerons, à ce propos, l'équation

$$x^3 - 3x - 1 = 0,$$

qui a été résolue par F. Viète.

Les racines sont :

$$2 \cos 20^\circ, \quad 2 \cos 40^\circ, \quad 2 \cos 80^\circ.$$

Elles donnent l'égalité, facile à vérifier,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \text{ (*)}.$$

Nous indiquerons aussi l'équation

$$x^3 - 3x + 2 \sin \alpha = 0,$$

dont les racines sont :

$$2 \sin \frac{\alpha}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 2\pi}{3}, \quad 2 \sin \frac{\alpha + 4\pi}{3}.$$

(*) L'Annuaire du Congrès de Montpellier (1879), d'où nous avons extrait cette relation, renferme, par erreur, cos 50° au lieu de cos 40°.

Cette dernière équation a été considérée par M. Hermite dans son mémoire relatif à la résolution de l'équation du cinquième degré.

19. — *Construire la courbe qui correspond à l'équation*

$$x^3 + y^4 = 1.$$

Cette courbe est constituée par une branche unique, parabolique. Elle offre la particularité intéressante d'avoir *quatre points d'inflexion réels*. Les tangentes inflexionnelles ont pour équation, respectivement :

$$y = \pm 1, \quad x \pm y\sqrt{3} - 1 = 0.$$

Les points d'inflexion qui correspondent à cette dernière équation ont une abcisse commune égale à -2.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Coordonnées parallèles et axiales. Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique, déduits de la considération des coordonnées parallèles, par *Maurice d'Ocagne*, élève ingénieur des ponts et chaussées, vice-secrétaire de la Société mathématique de France. (Paris, Gauthier-Villars, 1885; prix 3 francs.)

Si nous imaginons deux droites fixes Δ, Δ' dans un plan P, et, sur ces droites, deux origines O, O'; une droite D du plan P rencontre Δ et Δ' en des points A, A'. En posant

$$OA = u, \quad OA' = v,$$

on peut dire que u et v, valeurs prises en grandeur et en signe, déterminent la position de AA' dans le plan P; en d'autres termes, u et v sont les coordonnées de D. C'est le système bien connu des coordonnées tangentielles. On peut observer pourtant que, dans cette définition, un peu plus générale que celle qu'on donne habituellement, rien n'empêche de supposer que les droites fixes Δ, Δ' soient parallèles. On obtient ainsi le système de coordonnées parallèles de M. Maurice d'Ocagne.

Dans les coordonnées axiales, on détermine la position d'une droite dans le plan P de la manière suivante. Imaginons un axe fixe Δ et, sur cette droite, une origine fixe O; une droite D est déterminée par l'angle qu'elle fait avec Δ et par la distance de l'origine au point commun à D et à Δ.

Ces coordonnées axiales constituent d'ailleurs un cas particulier des coordonnées tangentielles qui ont été étudiées par M. l'abbé Aoust (*).

Ainsi, les deux systèmes de coordonnées étudiés par M. Maurice d'Ocagne sont simplement des cas particuliers de systèmes plus généraux de coordonnées tangentielles. L'examen de ces cas particuliers offre pourtant, le plus souvent, un intérêt personnel et le livre que nous signalons à nos lecteurs en est bien la preuve. En effet, dans les questions si diverses que soulève l'analyse, l'emploi des coordonnées qui leur conviennent plus particulièrement varie sans cesse. A chacune d'elles correspondent ce que l'on pourrait appeler, en généralisant le mot même de M. l'abbé Aoust, *des coordonnées naturelles;* ces coordonnées permettant de mettre en évidence, le plus simplement possible, les éléments qui jouissent de la propriété qui sert de définition à la courbe.

Le livre de M. Maurice d'Ocagne contient un grand nombre d'exercices pouvant intéresser les élèves de mathématiques spéciales; d'ailleurs, sa lecture n'exige que les connaissances mathématiques qu'ils possèdent. Ils y trouveront l'exposition des deux systèmes de coordonnées tangentielles que nous avons résumés plus haut et qui donnent lieu à de nombreuses applications, en choisissant de préférence celles-ci dans un champ convenable, et parmi celles qui admettent les coordonnées en question pour coordonnées naturelles.

Nous signalerons encore, en terminant cette analyse, le chapitre qui est consacré au calcul graphique.

On sait quel procédé on indique, dans nos cours de mathématiques spéciales, pour construire graphiquement les racines d'une équation du troisième degré :

$$x^3 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Après avoir posé $x^2 = y$, on obtient, par combinaison, l'équation

$$x^2 + y^2 + (p - 1)y + qx = 0.$$

Mais, au point de vue pratique, une difficulté se présente ici; c'est la construction du cercle qui correspond à cette équation. Dans cet ordre d'idées, et en prenant l'équation plus générale visée par M. d'Ocagne (**),

$$x^n + px + q = 0. \qquad (1)$$

Nous pensons qu'il est préférable de prendre pour *solutive* la courbe qui correspond à l'équation

$$y + x^n = 0.$$

On obtiendrait alors les racines de l'équation (1) au moyen d'une courbe tracée une fois pour toutes, et d'une droite Δ ayant pour équation

$$y = px + q.$$

Pour construire cette droite Δ, on pourrait imaginer les parallèles U, V ($x = 1$, $x = -1$) à l'axe oy. Ces droites étant cotées, comme le sont les axes parallèles de M. d'Ocagne, on tracerait Δ en prenant sur U la cote $p + q$, et sur V la cote $p - q$. Comme vérification, la droite doit couper oy à la cote q.

Dans cette manière de faire, on pourra utiliser la remarque faite par

---

(*) *Analyse infinitésimale des courbes planes*, par M. l'abbé Aoust; Gauthier-Villars, 1873; p. 65.

(**) M. d'Ocagne a choisi ce type parce que c'est celui (pour $n = 2$ et $n = 3$) qui intéresse le plus la pratique; mais sa méthode est applicable à une équation trinôme quelconque $x^m + px^n + q = 0$, ce qui n'a pas lieu pour le procédé indiqué ici en coordonnées cartésiennes.

M. d'Ocagne (p. 77) et dans laquelle il observe qu'*après avoir construit le tableau graphique, on doit le compléter par un transparent sur lequel une droite est marquée par un trait fin.*

Telle nous paraît être, appliquée au système cartésien, l'idée que M. d'Ocagne a rencontrée dans le système des coordonnées parallèles; au point de vue pratique, elle réalise un progrès notable sur les méthodes ordinaires.

Nous signalerons enfin quelques notes intéressantes placées à la fin du livre et, particulièrement, la note III relative à la transformation orthotangentielle, transformation dont M. d'Ocagne a fait connaître le principe dans ce Journal (*).

CALENDRIER PERPÉTUEL A ROULETTE, par M. *Ed. Lucas*, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. E. Belin, éditeur, 52, rue de Vaugirard, prix 0 fr. 75 c.

M. Ed. Lucas a exposé au Congrès de Rouen, de l'Association française pour l'avancement des sciences, l'ingénieuse théorie qui a présidé à la confection du calendrier perpétuel que nous signalons à l'attention des lecteurs de ce Journal. L'auteur distingue, dans une date donnée, *quatre éléments :*

1° Le QUANTIÈME, ou numéro du jour dans le mois;

2° Le nom du MOIS;

3° Le numéro du SIÈCLE : ce nombre est obtenu en supprimant les deux derniers chiffres de la date

4° Le numéro de l'ANNÉE: celui-ci est formé, au contraire, par les deux derniers chiffres.

Avec ces éléments, en se reportant à une règle rapide et simple indiquée par M. Ed. Lucas, on peut retrouver sans effort le *nom* du jour qui correspond à a date proposée (**). G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

165. — On considère une ellipse Γ et la tangente Δ en un sommet A extrémité du grand axe de cette courbe; on trace une tangente mobile Δ', puis une seconde tangente Δ'' parallèle à celle-ci. La droite Δ'' rencontre Δ en un point M et l'on projette enfin M sur Δ'. Soit I cette projection.

On propose de trouver le lieu décrit par I.

Ce lieu est une courbe du cinquième ordre ayant sur l'axe

(*) V. Journal, p. 33.

(**) Les appareils à calculs exacts et instantanés de MM. Genaille et Lucas paraîtront incessamment à la librairie classique E. Belin, où l'on peut demander, dès maintenant, le prospectus.

AA′ deux points doubles; l'un d'eux est réel, l'autre imaginaire. On discutera la forme générale de la courbe qui correspond à l'équation trouvée. On fera voir notamment qu'elle est renfermée tout entière entre les droites ($x + a = 0$, $x - 3a = 0$), et qu'elle est doublement tangente au cercle qui est circonscrit au rectangle formé par l'axe oy, la droite Δ et les parallèles à ox menées par les sommets B et B′.

(G. L.)

166. — Résoudre les équations:

$$yz - u^2 = a, \qquad vw - ux = d,$$
$$zx - v^2 = b, \qquad wu - vy = e,$$
$$xy - w^2 = c. \qquad uv - w^2 z = f.$$

WALECKI.

167. — Une conique étant définie par les points ABCDE et une autre conique par les points ABFGH, construire par la règle et le compas les autres points d'intersection de ces deux coniques. AMIGUES.

168. — On donne deux points A et A′ et le milieu O de la droite qui les joint. On imagine toutes les surfaces de révolution du second ordre qui passent en A et en A′ et dont toutes les méridiennes ont pour foyer le point O.

1° Lieu du point de contact du plan tangent perpendiculaire à A A′;

2° Lieu des pôles d'un plan donné par rapport à ces surfaces;

3° En supposant l'excentricité de la méridienne donnée, on demande le lieu des pôles précédents, le lieu des sommets de la surface, le lieu du centre de la surface.

Vérifier géométriquement les résultats simples que l'on trouvera. AMIGUES.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13430-5.

NOTE SUR L'ÉQUATION EN λ

Par **E. Amigues.**

I. — *Cas général.*

L'équation en λ, qui donne les couples de sécantes communes à deux coniques et les plans des sections homothétiques de deux quadriques, s'obtient en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique

$$\varphi(x, y, z) + \lambda\, \varphi_1(x, y, z).$$

De cette origine découlent naturellement ses deux propriétés fondamentales.

1° Si l'équation en λ admet des racines imaginaires, les deux coniques représentées par les équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \varphi_1(x, y, z) = 0,$$

se coupent en deux points réels et deux points imaginaires.

Soit en effet $\alpha + \beta i$ une de ces racines imaginaires. On a

$$\varphi(x, y, z) + (\alpha + \beta i)\varphi_1(x, y, z) = (P + Qi)(R + Si),$$

P, Q, R, S étant des formes linéaires à coefficients réels. Le second membre s'annule pour deux solutions réelles et deux seulement. Il en est donc de même du premier. Or les solutions réelles qui annulent le premier membre sont les solutions réelles du système

$$\varphi(x, y, z) + \alpha\varphi_1(x, y, z) = 0,$$
$$\beta\varphi_1(x, y, z) = 0,$$

ou du système équivalent

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Ce système a donc deux solutions réelles, et pas davantage.

2° Si l'équation en λ n'a pas de racines imaginaires, les deux coniques se coupent : ou en quatre points réels, ou en quatre points imaginaires.

En effet, toute racine réelle de l'équation en λ donnera une identité telle que

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) = \pm P^2 \pm Q^2,$$

P et Q étant des formes linéaires à coefficients réels.

Supposons en premier lieu que deux au moins des racines donnent des carrés de signes contraires. Alors on aura, pour deux des racines,

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) = PQ,$$
$$\varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_1(x, y, z) = RS,$$

P, Q, R, S étant à coefficients réels.

Les deux seconds membres s'annulent simultanément pour quatre solutions réelles et quatre seulement. Il en est donc de même des deux premiers; donc le système d'équations

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_1(x, y, z) = 0,$$

admet quatre solutions réelles, et il en est de même du système équivalent

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi_1(x, y, z) = 0.$$

Supposons en second lieu que deux au moins des racines donnent des carrés de même signe, on aura pour ces deux racines :

$$\varphi(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) = \pm (P^2 + Q^2),$$
$$\varphi(x, y, z) + \lambda_2\varphi_1(x, y, z) = \pm (R^2 + S^2)$$

on voit alors comme tout à l'heure que le système

$$\left\{ \begin{array}{l} P^2 + Q^2 = 0, \\ R^2 + S^2 = 0, \end{array} \right. \qquad (1)$$

est équivalent au système

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y, z) = 0, \\ \varphi_1(x, y, z) = 0. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Nous allons montrer que les coniques se coupent en quatre points imaginaires, ou bien que le système (2) n'a pas de solution réelle, ou bien que le système (1) n'en a pas.

En effet, si le système (1) admettait des solutions réelles, ces solutions annuleraient P, Q, R, S. Mais alors les deux couples de sécantes communes ayant le même centre, les coniques seraient donc tangentes et l'on ne serait plus dans le cas général.

(A suivre.)

SUR LES

POINTS MULTIPLES DES COURBES PLANES

Par M. **Porchon**, professeur au Lycée de Versailles.

La note que nous présentons ici n'ajoute rien d'essentiel à la théorie des points multiples des équations algébriques, développée dans de récents ouvrages classiques, mais il nous paraît qu'elle en simplifie l'exposition et l'application. Nous supposons connue la distinction entre les infiniments petits des différents ordres.

Supposons qu'un point multiple, d'ordre de multiplicité p, ait été pris pour origine des coordonnées. Désignons par $x^i\varphi_i\left(1, \frac{y}{x}\right)$ l'ensemble des termes de degré i et considérons l'équation de la courbe sous la forme

$$\varphi_p\left(1, \frac{y}{x}\right) + x\varphi_{p+1}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots + x^{m-p}\varphi_m\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0. \quad (1)$$

Soit a une des p racines de l'équation en $\frac{y}{x}$:

$$\varphi_p\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0, \quad (2)$$

et par conséquent, le coefficient angulaire d'une des tangentes au point multiple. Posons $\frac{y}{x} = a + \lambda$; en développant chaque terme de l'équation (1), et en désignant par A^r la p^e dérivée de $\varphi_i(1, a)$, nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
A_p & + A^1_p & \lambda + A^2_p & \frac{1}{2}\lambda^2 \ldots \\
+ A_{p+1}\, x & + A^1_{p+1}\, x & + A^2_{p+1} x & \\
+ A_{p+2}\, x^2 & + A^1_{p+2}\, x^2 & + A^2_{p+2} x^2 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
+ A_{p+1}\, x^i & \ldots & & \\
\ldots & \ldots & & \\
\ldots & \ldots & & \\
A_m\, x^{m-p} & + A^1_m x^{m-p} & &
\end{array}\right\} = 0 \quad (3)$$

A_p est nul par hypothèse, et λ tend vers zéro en même temps que x. Il s'agit, pour résoudre le problème, de trouver le premier terme, ou, au besoin, les premiers termes de cette quantité ordonnée suivant les puissances croissantes de x. C'est ce qui se fera par la règle suivante.

Les termes de l'équation (3) *ayant été ordonnés en rangées horizontales et en colonnes verticales équidistantes, suivant les indices inférieurs et supérieurs des coefficients, c'est-à-dire suivant les puissances de* x *et de* λ, *on forme la ligne brisée convexe qui, ayant pour sommets les premiers termes non nuls de certaines rangées horizontales, tourne sa convexité vers l'angle supérieur gauche du tableau. Alors, on néglige tous les termes placés en dedans de cette ligne brisée, et en égalant à zéro la somme des termes placés sur chacun des côtés de la ligne brisée convexe, on aura des équations en* λ *dont chaque racine sera le premier terme d'une des valeurs cherchées de cette inconnue.* Cette première approximation sera suffisante sauf le cas où quelqu'une de ces équations aura des racines égales.

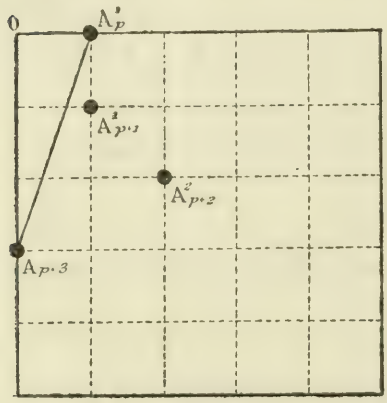


Fig. 1.

Par exemple, si les premiers coefficients qui ne s'annulent pas sont : A^1_p, A^1_{p+1}, A^2_{p+2}, A_{p+3} (*fig. 1*), la ligne brisée convexe se réduit à la droite $A^1_p\,A_{p+3}$ (en n'écrivant que les coefficients), et il n'y a qu'une équation en λ,

$$A^1_p\lambda + A_{p+3}x^3 = 0. \quad (4)$$

Si les premiers termes qui ne s'annulent pas sont A^5_p, A^3_{p+1}, A^2_{p+2}, A^1_{p+3}, A^2_{p+4}, A^1_{p+5}, A_{p+6} (*fig. 2*), la ligne brisée convexe se compose des trois droites $A^5_p\,A^3_{p+1}$, $A^3_{p+1}\,A^1_{p+3}$, $A^{1+3}_p\,A_{p+6}$, et les équations en λ (première approximation) sont :

$$A^5_p \cdot \frac{\lambda^5}{1.2.3.4.5} + A^3_{p+1}x \cdot \frac{\lambda^3}{1.2.3} = 0, \quad (5)$$

$$A^3_{p+1}x \cdot \frac{\lambda^3}{1.2.3} + A^2_{p+2}x^2 \cdot \frac{\lambda^2}{1.2} + {}^1{}_{+3}x^3\lambda = 0, \quad (6)$$

$$A^1_{p+3}x^3\lambda + A_{p+6}x^6 = 0, \quad (7)$$

dont les deux premières devront être divisées respectivement par λ^3 et λ.

Pour démontrer cette règle, il suffit d'observer que λ étant regardé comme infiniment petit de l'ordre θ par rapport à x, le terme $A^q_{p+i}\lambda^q x^i$ est de l'ordre $q\theta + i$. Ainsi, les termes de même ordre sont ceux par lesquels il y a entre q et i une relation de la forme

$$q\theta + i = \text{constante}. \qquad (8)$$

C'est l'équation d'une droite si l'on regarde i et q comme l'ordonnée et l'abscisse du point où ce terme est écrit, la première colonne verticale à gauche et la ligne horizontale supérieure comme axes des ordonnées et des abscisses. Tous les termes non situés sur la droite sont d'un ordre supérieur, puisque la fonction $q\theta + i$ a pour chacun d'eux une valeur plus grande que pour un point de la droite.

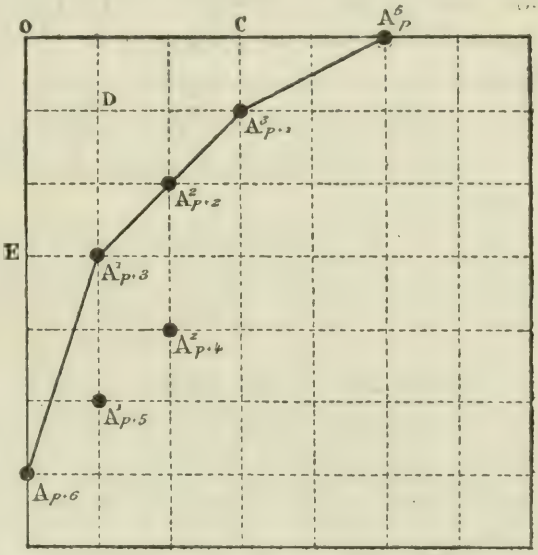


Fig. 2.

Ainsi le rapport $\dfrac{\lambda}{x^\theta}$ a pour limite une quantité finie b, et si l'on pose $\lambda = bx^\theta$, l'équation entre les termes placés sur la même droite, divisée par x^θ, est une équation en b. Comme b n'est pas nul, par hypothèse, on divise l'équation par la puissance de b qu'elle peut contenir en facteur. Alors la question est tranchée par la résolution de chacune des équations en b, à moins que l'une d'entre d'elles n'ait des racines égales.

En effet, pour chaque valeur de b, on trouve

$$y = ax + bx^\theta + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit par rapport à bx^θ. La quantité θ,

coefficient angulaire de la droite représentée par l'équation (8), est évidemment rationnelle. Supposons que la fraction θ, réduite à sa plus simple expression, ait un dénominateur impair; écrivons-la sous la forme $\frac{f}{2g+1}$. Le terme bx^θ peut s'écrire $b\sqrt[2g+1]{x^f}$. Alors, si b est réel, on peut donner à x des valeurs positives ou négatives indifféremment et il en résulte pour $y - ax$ des valeurs qui changent de signe avec x si le numérateur de θ est impair, et qui conservent le signe de b si ce numérateur est pair. A la valeur de b correspond une branche de courbe tangente à la droite $y = ax$; elle est située au-dessus de cette tangente si bx^θ est positif, au-dessous dans le cas contraire. Elle présente donc ou non une inflexion à l'origine, suivant que le numérateur de θ est impair ou pair.

Si θ a un dénominateur pair, écrivons-le sous la forme $\frac{f}{2g}$, f étant impair. Alors nous écrirons bx^θ sous la forme $\pm\sqrt[2]{b^{2g}x^f}$. Si b^{2g} est réelle, on peut donner à x des valeurs de même signe que b^{2g}, et il en résulte deux branches de courbe tangentes à la droite $y = ax$, de part et d'autre de cette tangente et s'arrêtant au point de contact de manière à former un point de rebroussement de première espèce.

D'après ces remarques, les caractères de la branche de courbe dans son voisinage avec l'origine dépendent de la parité du numérateur et du dénominateur de θ, qui n'est autre que le coefficient angulaire de la droite sur laquelle sont disposés les termes considérés de l'équation.

Par exemple pour la droite $A^1_pA_{p+3}$ (*fig. 1*), θ est représenté par le rapport $\frac{OA_{p+3}}{OA^1_p}$ égal à $\frac{3}{2}$; pour les droites $A^5_pA^3_{p+1}$, $A^3_{p+1}A^1_{p+3}$, $A^1_{p+3}A_{p+}$ (*fig. 2*), par $\frac{CA^3_{p+1}}{CA^5_p}$, $\frac{DA^1_{p+3}}{DA^3_{p+1}}$, $\frac{EA_{p+6}}{AE^1_{p+3}}$, égaux respectivement à $\frac{1}{2}$, 1, 3. Ainsi, la simple inspection de l'équation fait apprécier la forme de la branche de courbe sauf le cas

des racines multiples de l'équation en λ. Cette particularité exceptée, deux cas peuvent se présenter :

1° Si θ est de forme $\frac{f}{2g+1}$, à chaque valeur réelle de b correspond une branche de courbe, infléchie ou non à l'origine suivant que f est impair ou pair.

2° Si θ est de forme $\frac{f}{2g}$, ce qui suppose f impair, à chaque valeur réelle de b^{2g} correspondent deux branches formant un point de rebroussement de première espèce.

(A suivre.)

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE

DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

Par M. **Poujade**, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon.

La méthode de résolution indiquée dans ce Journal (année 1883, p. 102) repose sur ces deux propriétés :

1° Le premier membre de l'équation est décomposable en la somme des cubes de deux fonctions linéaires ; 2° ces deux fonctions linéaires sont les facteurs du premier degré du Hessien (à un coefficient numérique près). Nous nous proposons de démontrer ces deux propriétés simultanément, par une substitution linéaire.

Soit $f(x, t)$ le premier membre rendu homogène.

Posons

$$y = \frac{x - \alpha}{x - \beta},$$

d'où

$$x = \frac{\beta y - \alpha}{y - 1}.$$

Développant $f(\beta y - \alpha, y - 1)$ par la formule de Taylor, puis annulant les coefficients de y^2 et de y, l'équation devient

$$y^3 f(\beta, 1) - f(\alpha, 1) = 0.$$

avec les conditions :

$$\alpha f'_\beta + f'_t = 0, \qquad (1)$$

$$\alpha^2 f''_{\beta^2} + 2\alpha f''_{\beta t} + f''_{t^2} = 0, \qquad (2)$$

[dérivées prises sur $f(\beta, t)$].

Ces deux conditions écrites sous la forme

$$\alpha[\beta f''_{\beta^2} + f''_{\beta t}] + \beta f''_{\beta t} + f''_{t^2} = 0,$$

$$\alpha[\alpha f''_{\beta^2} + f''_{\beta t}] + \alpha f''_{\beta t} + f''_{t^2} = 0,$$

entraînent l'égalité

$$\begin{vmatrix} \beta f''_{\beta^2} + f''_{\beta t} & \beta f''_{\beta t} + f''_{t^2} \\ \alpha f''_{\beta^2} + f''_{\beta t} & \alpha f''_{\beta t} + f''_{t_2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\beta - \alpha)\begin{vmatrix} f''_{\beta^2} & f''_{\beta t} \\ f''_{\beta t} & f''_{t^2} \end{vmatrix} = 0.$$

L'hypothèse $\beta = \alpha$, qui exige encore $f(\alpha, 1) = 0$, doit être écartée; elle ramène d'ailleurs l'équation à la forme identique $0 = 0$.

L'hypothèse

$$\begin{vmatrix} f''_{\beta^2} & f''_{\beta t} \\ f''_{\beta t} & f''_{t^2} \end{vmatrix} = 0,$$

exprime que β est une racine du Hessien égalé à zéro. Prenant pour β l'une de ses deux racines, les deux valeurs de α données par (2) deviennent égales à celle donnée par (1). D'autre part, le système des conditions (1) et (2) étant symétrique par rapport à α et β, cette valeur de α est l'autre racine du Hessien égalé à zéro.

Dès lors, ce Hessien est, à un facteur numérique près, identique au produit $(x - \alpha)(x - \beta)$ et puisque l'équation devient, quand on remplace y,

$$(x - \alpha)^3 f(\beta, 1) - (x - \beta)^3 f(\alpha, 1) = 0,$$

les deux propositions sont établies.

Remarque I. — On a

$$(\beta - \alpha)^3 f(x, 1) = (x - \alpha)^3 f(\beta, 1) - (x - \beta)^3 f(\alpha, 1),$$

ce qui permet d'effectuer la décomposition sur un *polynôme* du troisième degré.

Remarque II. — En éliminant α entre (1) et (2), le résultant indique encore l'identité

$$f''_{\beta^2}(f'_t)^2 - 2f''_{\beta t}f'_\beta f'_t + f''_{t^2}(f'_\beta)^2 = -\frac{3}{2}f^{(\beta,1)}[f''_{\beta^2}f_{t^2} - (f''_{\beta t})^2].$$

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 131.)

3. — Considérons maintenant deux courbes quelconques U et V; prenons sur U un point A. La normale à U, en A, coupe V au point B; le lieu décrit par le milieu I de AB est une certaine courbe W et nous nous proposons de trouver la tangente à W, au point I.

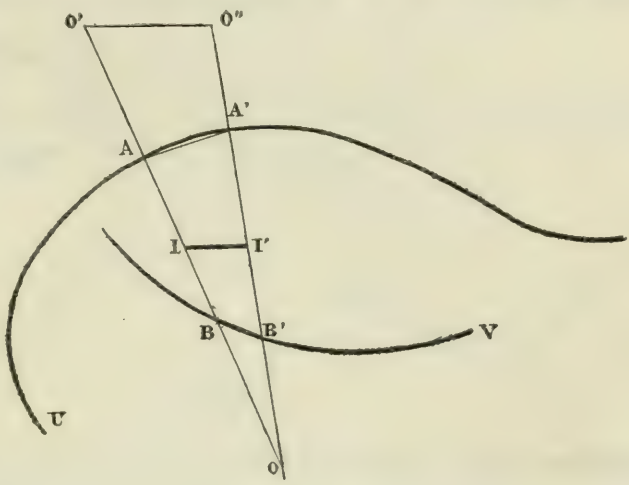


Fig. 5.

Soit A'B' une normale à U, voisine de AB; ayant pris AO' = BO et A'O'' = B'O, nous obtenons un triangle OO'O'' dans lequel AA' et BB' sont deux transversales réciproques. En passant à la limite, le point O devient le centre de courbure de la courbe U au point A et un tracé tout semblable à celui que nous avons indiqué (§ 2) fait connaître la position limite de O'O'' et, par suite, celle de sa parallèle II'.

4. — Parmi les applications que l'on peut faire de la construction précédente, nous signalerons la suivante.

Prenons pour U une parabole ($y^2 - 2px = 0$), pour V un

diamètre ($y = h$) ; le lieu décrit par le point I est une cubique Γ ayant pour équation

$$x = \frac{(2y - h)^3 + 2p^2(y - h)}{2p(2y - h)}.$$

Cette courbe, qui a la forme indiquée par la figure ci-

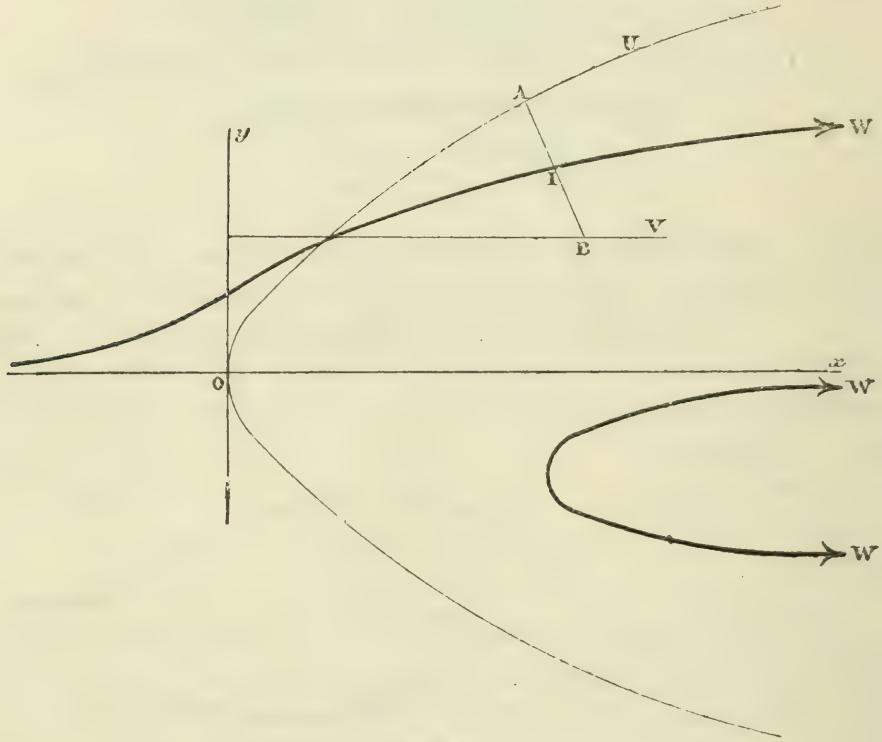


Fig. 6.

dessous est *le trident de Newton*. On peut donc construire cette courbe, point par point et tangente par tangente.

5. — Voici d'autres exemples de courbes qui se construisent très simplement, point par point, et tangente par tangente.

Soient prises d'abord trois courbes quelconques U_1, U_2, U_3 ; dans un même plan, bien entendu. Dans ce plan, parallèlement à une direction fixe, on leur mène une transversale $A_1A_2A_3$ sur laquelle on prend $A_3I = A_2A_1$; nous nous proposons de déterminer la tangente à la courbe, lieu du point I.

Considérons une transversale voisine $B_1B_2B_3$; des égalités :

$$\frac{tA_1}{tB_1} = \frac{A_1A_2}{B_1B^2}, \qquad \frac{\theta A_3}{\theta B_3} = \frac{A_3I}{B_3I'}.$$

on déduit

$$\frac{tA_1}{tB_1} = \frac{\theta A_3}{\theta B_3}.$$

La droite $t\theta$ étant, d'après cela, parallèle à la direction fixe donnée, on tire de cette remarque une construction très simple pour fixer la droite II', dans sa position limite.

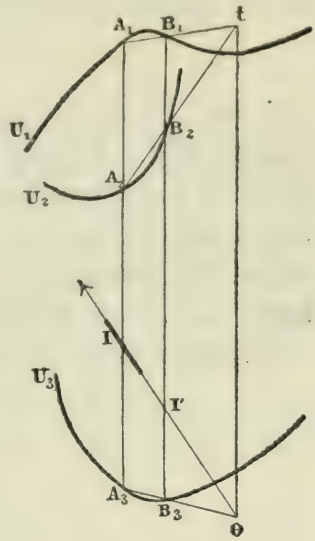


Fig. 7.

6. — Soient U et V deux courbes quelconques; parallèlement à une direction fixe on leur mène une transversale AP et, sur cette droite, on prend un point A' tel que

$$AP \,.\, A'P = c^{te};$$

cherchons la tangente en A', au lieu W décrit par ce point.

L'égalité $\qquad AP \,.\, A'P = BQ \,.\, B'Q,$

donne

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{B'Q}{A'P},$$

et, par suite,

$$\frac{tP}{tQ} = \frac{\theta Q}{\theta P}.$$

Les deux points t et θ sont donc symétriques par rapport au milieu de PQ. En passant à la limite, en supposant par conséquent que BQ se rapproche indéfiniment de AP, on déduit de cette position remarquable des points t. θ le tracé de la tangente à la courbe W, au point I.

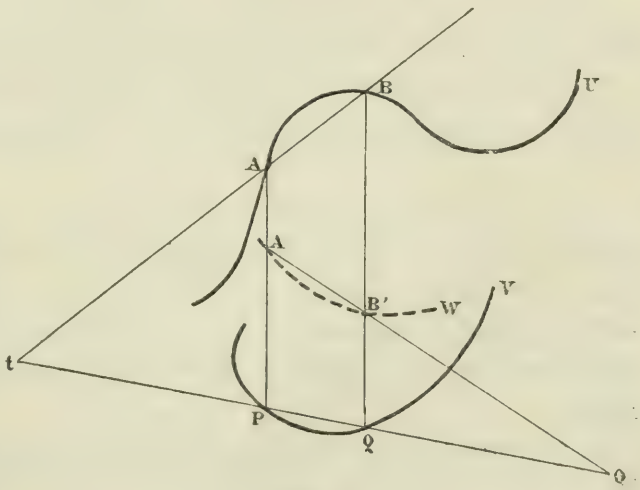


Fig. 8.

(A suivre.)

SUR LA CONSTRUCTION DE CHASLES

1. — On sait comment, deux diamètres conjugués d'une ellipse étant donnés de grandeur et de position, on détermine la grandeur et la situation des axes de la courbe par une construction que Chasles a fait connaître (*). Cette construction permet de trouver la somme et la différence des axes, d'où l'on conclut la grandeur même de ces axes.

M. Mannheim a, récemment (**), indiqué une modification

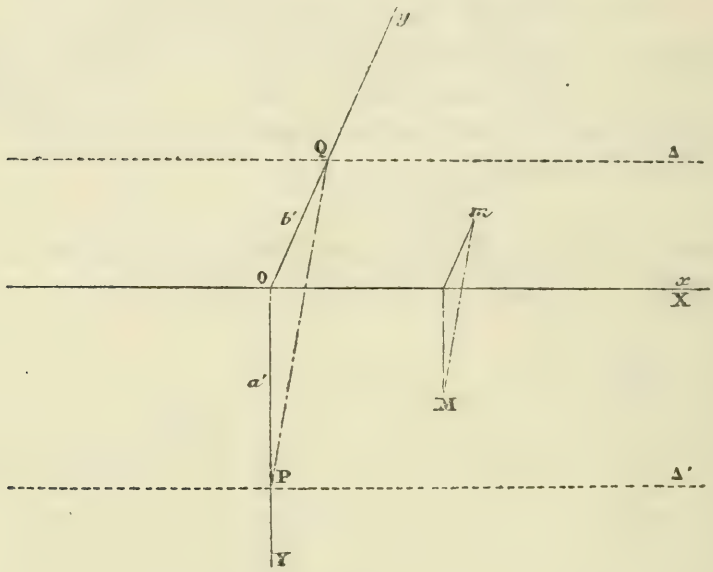


Fig. 1.

avantageuse à la construction de Chasles; en adoptant cette modification, on obtient *directement* les demi-axes de l'ellipse.

Il existe, dans le traité des sections coniques de L'Hospital (***), une façon de présenter la construction de Chasles

(*) Aperçu historique, p. 362.

(**) *Nouvelles Annales*, 1885, p. 150.

(***) *Traité analytique des sections coniques et de leur usage*, etc., par M. le marquis de l'Hospital. — Paris, MDCCXX.

qui met en évidence non seulement les demi-axes, mais les sommets mêmes de l'ellipse, et ceci ajoute encore quelque chose au perfectionnement proposé par M. Mannheim. Voici la construction indiquée par L'Hospital.

2. — Imaginons que dans deux systèmes d'axes yox, YOX, disposés comme l'indique la figure (le premier oblique, l'autre rectangulaire) deux points m et M se correspondent de telle façon : 1° que les parallèles menées par ces points aux axes respectifs oy, OY, se coupent sur l'axe commun oxX; 2° que la droite qui joint les points correspondants soit constamment parallèle à une droite PQ, donnée de position.

Dans cette transformation homographique les coordonnées (x, y), (X, Y) des deux points correspondants m, M vérifient les relations

$$x = X, \quad \frac{y}{b'} = \frac{Y}{a'}. \qquad \text{(A)}$$

Telles sont les formules de transformation; elles permettent de passer directement de l'équation de l'ellipse, rapportée à deux directions conjuguées, à celle d'un cercle.

3. — On vérifie sans peine les propriétés suivantes :

1° A une droite correspond une droite et ces deux droites correspondantes coupent l'axe oxX au même point; en particulier, les tangentes aux points correspondants concourent sur cet axe;

2° A l'ellipse Γ qui a pour centre le point Q et qui admet pour diamètres conjugués 1° QO $= b'$, 2° une parallèle à oxX menée par Q et d'une longueur égale à a', ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{2y}{b'} = 0,$$

correspond, d'après les formules (A), un cercle dont l'équation est

$$X^2 + Y^2 - 2a'Y = 0;$$

3° A deux diamètres conjugués de l'ellipse

$$y - b' = tx, \quad y - b' = t'x \quad \left(tt' = -\frac{b'^2}{a'^2}\right)$$

correspondent deux diamètres rectangulaires du cercle

$$Y - a' = t\frac{a'}{b'}X, \qquad Y - a' = t'\frac{a'}{b'}X.$$

Ces principes suffisent à la démonstration que nous avons en vue.

4. — Soient QA, QB les axes de Γ; PA′, PB′ les diamètres correspondants. Les droites PA′, QA d'une part, PB′, QB d'autre part, étant correspondantes, se coupent sur l'axe oxX. De plus l'angle A′PB′ est droit puis que les diamètres qui correspondent à deux diamètres conjugués sont rectangulaires.

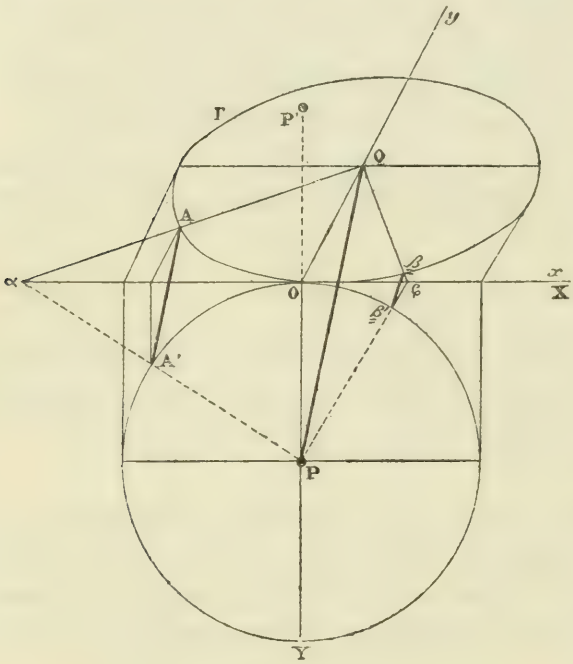


Fig. 2.

Ainsi, le quadrilatère PQαβ est inscriptible et le centre du cercle U en question est situé sur αβ. D'après cela, si nous prenons le point P′ symétrique de P par rapport à oxX, ce point P′ appartient à U. En faisant passer le cercle U par les trois points P, P′, Q, on obtiendra les points α, β et par suite la direction des axes Qα, Qβ; on retrouve bien la construction de Chasles.

Mais, et c'est ici que nous touchons au perfectionnement que nous voulions signaler, les sommets de la courbe, par exemple les points A et B, correspondant aux points A′ B′, se déduisent de ceux-ci en menant simplement, par A′ et par B′, des parallèles à la droite PQ. On obtient donc, par cette remarque les axes *dans leur situation même.*

Les propriétés diverses sur lesquelles est basée cette construction peuvent aussi s'établir, comme on en fera évidem-

ment la remarque, sans introduire l'idée de la transformation homographique, mais en considérant l'ellipse comme l'ombre portée sur un plan par un cercle donné.

G. L.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Concours du 16 juin 1885.

Par les deux foyers d'une ellipse fixe on fait passer une circonférence variable.

1° A quelle condition doit satisfaire cette ellipse pour que la circonférence puisse réellement la rencontrer en quatre points et dans quelle portion du petit axe doit-on placer le centre du cercle pour qu'il y ait effectivement quatre points réels d'intersection;

2° En chacun des points d'intersection on mène les tangentes à l'ellipse; ces quatre droites forment un quadrilatère; lieu des sommets de ce quadrilatère, quand le cercle varie;

3° Quel est le lieu d'intersection des côtés de ce quadrilatère avec ceux d'un autre quadrilatère symétrique du premier par rapport au centre de l'ellipse;

4° On considère les tangentes communes au cercle et à l'ellipse. Lieu de leurs points de contact avec le cercle.

1. — L'ellipse étant rapportée à ses axes, son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Celle du cercle est

$$x^2 + y^2 - 2yy' - c^2 = 0.$$

y' désignant l'ordonnée du centre.

L'élimination de x^2 entre ces deux équations donne

$$y^2 \frac{c^2}{b^2} + 2yy' - b^2 = 0. \qquad (1)$$

Pour $y = 0$, on trouve le signe $-$. Les quatre points seront réels si, en substituant successivement $+b$ et $-b$, on obtient deux résultats positifs. On doit donc avoir

$$c^2 - b^2 + 2by' > 0,$$
$$c^2 - b^2 - 2by' > 0.$$

Si l'on suppose $c < b$, quel que soit le signe de y' l'une de ces inégalités n'est pas vérifiée et deux points d'intersection seulement sont réels.

Les inégalités, en supposant $y' > 0$ pour fixer les idées, ne sont vérifiées que si l'on suppose simultanément

$$c, > b, \quad \text{et} \quad 0 < y' < \frac{c^2 - b^2}{2b}.$$

2. — Soient AA′ et BB′ les deux cordes qui correspondent à l'équation (1). Les tangentes aux points A et B se coupent en un point I dont on demande le lieu géométrique.

Désignons par α, β les coordonnées du point I; la conique aplatie formée par les droites AB, A′B′ a pour équation:

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(-\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Le cercle AA′BB′ pourra donc être représenté par

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(-\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) \tag{2}$$
$$+ \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

En exprimant que cette équation représente un cercle, on a

$$\frac{\lambda c^2}{a^2 b^2} = \frac{\beta^2}{b^4} + \frac{\alpha^2}{a^4}\ ; \tag{3}$$

écrivons maintenant que l'équation (2) est vérifiée par $y = 0$, $x = \pm c$, et nous avons

$$\frac{\alpha^2 c^2}{a^4} - 1 = \lambda \frac{b^2}{a^2}. \tag{4}$$

L'élimination de λ entre (3) et (4) donne

$$\beta^2 + \frac{\alpha^2}{a^2}(b^2 - c^2) + c^2 = 0. \tag{A}$$

Comme nous supposons $b < c$, cette équation, dans laquelle α, β désignent des coordonnées courantes, représente une hyperbole rapportée à ses axes.

Autrement. — En cherchant les points d'intersection de la polaire de I avec la courbe on trouve immédiatement l'équation

$$\frac{y^2}{b^2}\left(1 + \frac{a^2\beta^2}{b^2\alpha^2}\right) + \ldots + \frac{a^2}{\alpha^2} - 1 = 0. \tag{5}$$

D'après (1) le produit des racines doit être égal à $-\frac{b^4}{c^2}$. On obtient ainsi l'équation (A).

3. — Soit B″ le symétrique de B′ par rapport au centre; la tangente en B″ rencontre la tangente en A en un point I′; soient α', β' ses coordonnées.

Si, dans l'équation (5) on change α en α', β en β' et si l'on écrit que le produit des racines est égal à $+\frac{b^4}{c^2}$, on a, après simplification,

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = c^2.$$

Ainsi, *le lieu décrit par le point* I′ *est le cercle décrit sur la distance focale comme diamètre.*

Nous indiquons plus loin une démonstration géométrique de ce résultat.

4. — Soit Δ une tangente commune à l'ellipse et à la circonférence considérées (1); soit M_0 le point de contact.

En désignant par x_0, y_0 les coordonnées de M_0, l'équation de Δ est.

$$xx_0 + y\,(y_0 - y') - y_0y' - c^2 = 0.$$

Identifions-la avec l'équation générale des tangentes :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Nous avons

$$m = \frac{x_0}{y' - y_0},$$

$$\sqrt{a^2m^2 + b^2} = \frac{c^2 + y'y_0}{y_0 - y'}.$$

L'élimination de m donne d'abord

$$a^2x_0^2 + b^2\,(y' - y_0)^2 = (c^2 + y'y_0).^2$$

D'autre part,

$$y' = \frac{x_0^2 + y_0^2 - c^2}{2y_0}.$$

et finalement, le lieu cherché a pour équation (x_0, y_0 étant prises pour coordonnées courantes)

$$4a^2x^2 + \frac{b^2}{y^2}(x^2 - y^2 - c^2)^2 = (x^2 + y^2 + c^2)^2.$$

Cette équation peut s'écrire

$$4(b^2 + c^2)\, y^2x^2 + b^2(x^2 - y^2 - c^2)^2 = y^2\,(x^2 + y^2 + c^2)^2,$$

ou

$$b^2\{(x^2 - y^2 - c^2)^2 + 4x^2y^2\} = y^2\,\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4\,c^2x^2\},$$

ou encore

$$b^2\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2\} = y^2\,\{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2\}.$$

Cette égalité peut encore s'écrire

$$(y^2 - b^2)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 - 2cx) = 0.$$

Le lieu se compose donc

1° *Des tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe;*

2° *Des quatre droites isotropes passant par les deux foyers.*

On pouvait prévoir *à priori* l'existence de ces droites dans la recherche proposée, en imaginant le cercle imaginaire qui est constitué par une droite isotrope de l'un des foyers ($y - ix - ic = 0$) associée avec une des droites isotropes de l'autre foyer ($y + ix - ic = 0$) et en rappelant que les tangentes issues d'un foyer à l'ellipse sont les droites isotropes de ce point.

5. Démonstrations géométriques. – On peut d'ailleurs démontrer géométriquement les résultats précédents de la manière suivante.

1° Prenons d'abord le dernier. La tangente Δ rencontre ff' en un point R et l'on a

$$\overline{RM_0}^2 = Rf \,.\, Rf'.$$

Projetons M_0 sur ff' en P et pareillement les foyers f, f' sur Δ aux points H et H'. Les triangles semblables donnent :

$$\frac{fH}{M_0P} = \frac{Rf}{RM_0}, \quad \text{et} \quad \frac{f'H'}{M_0P} = \frac{Rf'}{RM_0}.$$

On a donc

$$\frac{fH \,.\, f'H'}{\overline{M_0P}^2} = \frac{Rf \,.\, Rf'}{\overline{RM_0}^2} = 1.$$

D'autre part, une propriété connue donne

$$fH \,.\, f'H' = b^2,$$

ainsi

$$M_0P = b.$$

2° Revenons maintenant au résultat du § (3). Le lieu pro-

posé revient à celui-ci : *sur une ellipse de foyers* f, f′ *on prend deux points*, A, B″ *tels que les angles* fAf′, fB″f′ *soient supplémentaires, trouver le lieu décrit par le point* I′ *pôle de* AB″.

En posant :

$$Af B'' = 2x, \quad fAf' = \alpha, \quad AI'f = B''I'f' = z,$$

puis en désignant par y l'angle formé par I′B″ avec le prolongement de AI′, des propriétés connues donnent :

$$\alpha + 2x - y = \frac{\pi}{2},$$

et

$$2z + \alpha + 2x = \pi.$$

D'où l'on tire

$$y + 2z = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi l'angle $fI'f'$ est droit; le lieu géométrique de I′ est donc le cercle décrit sur ff' comme diamètre.

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. **A. Calinon,** ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite* voir p. 134.)

§ II. — *Aires planes et courbes.*

Nous avons montré comment l'aire du carré se rattachait aux grandeurs de la première famille; nous avons vu également que, si l'on prend pour carré unité celui dont le côté est l'unité de longueur, l'aire du carré est mesurée par le carré du nombre qui mesure son côté.

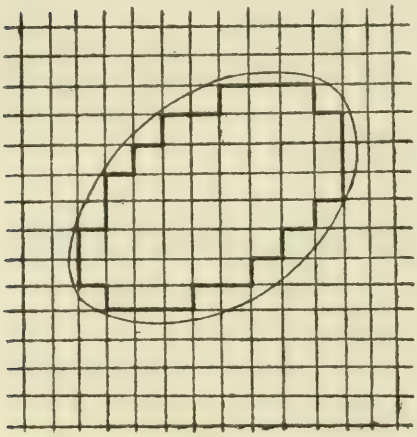
Théorème VIII. — *Le moment du carré est double de sa surface.*

Pour avoir le moment d'un contour fermé il suffit évidemment d'ajouter les moments de tous ses côtés par rapport à un point quelconque du plan.

Soit donc un carré de côté a, prenons les moments de ses côtés par rapport à l'un des sommets de ce carré; les deux côtés qui aboutissent à ce sommet ont des moments nuls et les deux autres côtés ont pour moment a^2, ce qui fait, comme somme, $2a^2$ ou le double de l'aire.

Théorème IX. — *Soit un contour fermé quelconque de moment μ : on trace sur ce contour un réseau de carrés égaux infiniment petits, la somme s' des aires de tous les carrés compris dans le contour a une limite constante quelles que soient la loi de variation et l'orientation des carrés; cette limite est toujours égale à $\frac{\mu}{2}$.*

En effet, l'ensemble des carrés compris dans le contour est terminé à une ligne polygonale fermée dont le moment μ' est la somme des moments de tous ces carrés (th. IV) ou le double de la somme des aires de ces carrés (th. VIII); on a donc $\mu' = 2s'$, s' étant la somme de ces aires; d'autre part le contour polygonal étant infiniment voisin du contour curviligne, μ' a pour limite μ (th. VII); si donc s est la limite de s' on a $\mu = 2s$ ou $s = \frac{\mu}{2}$, ce qui démontre le théorème.



Cette limite s s'appelle, par définition, l'aire du contour. L'aire étant la moitié du moment, on en déduit le théorème suivant :

Théorème X. — *Lorsqu'un contour fermé total résulte du groupement de plusieurs contours fermés partiels, l'aire du contour total est la somme des aires des contours partiels* (th. IV).

Théorème XI. — *L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de sa base par sa hauteur.*

Si en effet on cherche le moment du contour par rapport à un sommet on trouve pour moment le produit du côté opposé à ce sommet par la hauteur correspondante : l'aire est donc la moitié de ce produit.

Les aires des autres figures planes se déduisent de celle du triangle par application du théorème X : nous ne nous étendrons donc pas davantage sur ce point.

On passe des aires planes aux aires courbes par la méthode connue exposée en géométrie infinitésimale ; nous rappellerons seulement le théorème qui sert de base à cette théorie :

Théorème XII. — *Une surface courbe fermée ou non étant donnée, on prend une surface polyédrale variable satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

1° Chaque face est un polygone infiniment petit qui a pour limite un point de la surface courbe ;

2° Cette face a pour direction limite la direction du plan tangent en ce point à la surface courbe.

L'aire polyédrique a une limite constante quelle que soit la loi de sa déformation.

C'est cette limite qu'on appelle par définition l'aire de la surface courbe.

Cette définition donnée, on en déduit très simplement l'aire du cylindre, du cône et de la sphère : comme surface polyédrique, il est souvent commode de partir d'un polyèdre circonscrit à la surface courbe. *(A suivre.)*

QUESTIONS D'EXAMENS

20. — *Trouver directement la dérivée de arc tg* x.

On sait que l'on a :

$$\text{arc tg } a - \text{arc tg } b = \text{arc tg } \frac{a-b}{1+ab}.$$

(On suppose que l'expression *arc tg x* désigne une quan-

tité *bien déterminée*, dont la valeur est égale au plus petit arc positif dont la tangente ait une longueur égale à x).

D'après cela, l'égalité

$$\frac{k}{h} = \frac{\text{arc tg } (x+h) - \text{arc tg } x}{h},$$

peut s'écrire

$$\frac{k}{h} = \frac{\text{arc tg } \dfrac{h}{1 + x(x+h)}}{h},$$

ou encore,

$$\frac{k}{h} = \frac{\text{arc tg } \dfrac{h}{1 + xh + x^2}}{\dfrac{h}{1 + xh + x^2}} \cdot \frac{1}{1 + xh + x^2}.$$

En passant à la limite, on obtient le résultat connu:

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Remarque. — On peut trouver, par un calcul analogue, les dérivées des autres fonctions circulaires inverses.

Soit proposé, par exemple, l'établissement direct de la dérivée de

$$y = \text{arc sin } x.$$

On prendra pour point de départ l'identité :

$$\text{arc sin } a - \text{arc sin } b$$
$$= \text{arc sin } (a\sqrt{1 - b^2} - b\sqrt{1 - a^2});$$

de laquelle on déduit,

$$\text{arc sin } (x + h) - \text{arc sin } x$$
$$= \text{arc sin } \left\{(x + h)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2 - 2hx - h^2}\right\}.$$

On est ainsi ramené à trouver la vraie valeur, pour $h = 0$, de

$$\frac{(x + h)\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2 - 2hx - h^2}}{h}.$$

Pour obtenir celle-ci, on multiplie, haut et bas, par

$$(x + h)\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - x^2 - 2hx - h^2},$$

et l'on a finalement;

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

21. — *Trouver le développement, suivant les puissances croissantes de* x, *de la fonction* y,

$$y = \mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}.$$

On peut d'abord observer que

$$y = \mathrm{L}\,(1+x) - \mathrm{L}\,(1+x).$$

On déduit de là

$$y' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2},$$

ou, en supposant $x^2 < 1$,

$$y' = 2(1 + x^2 + x^4 + \ldots).$$

On a donc, d'après cela,

$$y = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

22. — *Démontrer que pour toutes les valeurs de* x *comprises entre* $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$ *on ne peut pas avoir*

$$\sqrt{1+x} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

f et φ *désignant des fonctions entières.*

On peut observer que l'équation

$$(1+x)\,\varphi^2(x) - f^2(x) = 0$$

aurait alors une infinité de racines, ce qui est impossible, si l'on ne suppose pas que cette équation soit identique. Mais on ne peut avoir

$$(1+x)\,\varphi^2(x) \equiv f^2(x),$$

parce que le premier membre est d'un degré impair, l'autre membre étant au contraire d'un degré pair.

CONCOURS GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(10 juin 1885.)

Composition en mathématiques.

Etant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère toutes les cordes D de cette surface qui sont vues du centre sous un angle droit et l'on demande :

1° L'équation du cône lieu géométrique des cordes D qui passent par un

point donné S, ainsi que les positions du point S pour lesquelles ce cône est de révolution;

2° La courbe à laquelle sont tangentes toutes les cordes D situées dans un plan donné P, ainsi que les positions du plan P pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle.

QUESTIONS PROPOSÉES

169. — On considère une parabole P inscrite, aux points A et B, dans l'angle ACB; si l'on désigne par M un point mobile sur P, on a constamment

$$\overline{MBA}^2 = 4MCB \,.\, MCA.$$

(G. L.)

170. — Soit BC un diamètre d'une ellipse E; on considère l'extrémité A d'un demi-diamètre conjugué de BC, puis on prend sur E (explicitement sur l'arc AC, pour éviter toute ambiguïté sur les signes) un point M; démontrer que l'on a constamment

$$\frac{1}{MAC} - \frac{1}{MAB} = \frac{2}{MBC}.$$

(G. L.)

171. — Soit BC un diamètre fixe dans une hyperbole donnée H; par les extrémités B et C on mène des parallèles aux asymptotes, parallèles qui se coupent en A.

Démontrer que si M est un point mobile sur H, le rapport

$$\frac{MAB.\ MAC}{MBC},$$

a une valeur constante. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15840-5.

NOTE SUR L'ÉQUATION EN λ

Par **E. Amigues.**

(*Suite* voir p. 145.)

II. — *Cas particuliers.*

Dans ce qui suit, j'aurai recours à des considérations géométriques, en vue de la simplicité.

Il est clair d'abord que si les coniques se coupent en quatre points distincts, l'équation en λ ne peut avoir de racines égales; et que dans le cas contraire elle en a nécessairement. Il nous reste à étudier ce cas-là.

1° Si les deux coniques ont un point de contact et un seul, il est réel ; l'équation en λ a une racine double. La racine simple donne un couple de droites réelles; la racine double, un couple de droites distinctes, réelles ou imaginaires suivant que les deux autres points communs sont réels ou imaginaires.

2° Si les coniques sont bitangentes, les deux points de contact sont : ou réels, ou imaginaires conjugués; l'équation en λ a une racine double, la racine simple donne les tangentes aux deux points de contact, qui ne sont réelles qu'autant que ces points sont réels. La racine double donne deux cordes confondues avec la corde des contacts, c'est-à-dire une corde double réelle ; elle annule les mineurs du discriminant, ce qui n'a pas lieu dans le cas du contact simple.

3° Si les coniques ont trois points confondus, ces points sont réels ; l'équation en λ a une racine triple, qui donne deux cordes communes réelles et distinctes. La racine triple n'annule pas les mineurs du discriminant.

4° Si les coniques ont quatre points confondus, ces points sont réels. L'équation en λ a une racine triple, qui donne deux cordes réelles confondues avec la tangente en ces quatre points.

Comme on a examiné tous les cas et qu'ils ont conduit à des résultats différents, les réciproques sont vraies. Donc :

1° Si l'équation en λ a une racine double, les coniques sont tangentes ou bitangentes suivant que cette racine annule ou non les mineurs du discriminant.

2° Si l'équation en λ a une racine triple, les deux coniques ont un contact du second ou du troisième ordre, suivant que la racine triple annule ou non les mineurs du discriminant.

Pour une solution purement analytique, on pourra consulter une note de la Géométrie analytique de M. Pruvost, ou un Mémoire de M. Darboux sur les formes quadratiques *(Journal de mathématiques)*.

SUR LES

POINTS MULTIPLES DES COURBES PLANES

Par M. **Porchon**, professeur au Lycée de Versailles.

(*Suite*, voir p. 131.)

II. — *Cas des racines égales.*

Supposons maintenant que l'une des équations en λ ait des racines égales. Par exemple, admettons que dans l'équation (3), les premiers coefficients qui ne s'annulent pas soient A_p^2, A_{p+i}^1, A_{p+2i}; ils sont en ligne droite et l'équation qui donne λ, à la première approximation, est :

$$\frac{1}{2} A_p^2 \lambda^2 + A_{p+i}^1 \lambda + A_{p+2i} = 0. \qquad (9)$$

Supposons enfin que les racines de cette équation aient une valeur commune bx^i. Posons alors :

$$\lambda = bx^i + \mu, \qquad (10)$$

μ étant un infiniment petit de degré supérieur à i.

Comme l'équation (3) est de forme

$$\frac{1}{2} A_p^2 (\lambda - bx^i)^2 + F = 0,$$

F comprenant des termes infiniment petits tous d'un ordre

supérieur à $2i$, cette substitution lui fait prendre la forme

$$\frac{1}{2} A_p^2 \mu^2 + B\mu x_i + Cx^{2i+1} + \ldots = 0. \qquad (11)$$

On la discute exactement comme l'équation en λ.

La ligne brisée régulière analogue à celle de l'équation en λ se compose de deux droites distinctes ou d'une seule droite. Dans le premier cas, on trouve deux valeurs de μ de forme

$$\mu = cx^{\theta_1} + \varepsilon_1, \qquad (12)$$

c désignant successivement deux nombres réels, θ_1 deux nombres entiers et positifs supérieurs à i, ε_1 deux infiniments petits d'ordre supérieur à θ_1. Il en résulte

$$y = ax + bx^i + cx^{\theta_1} + \varepsilon_1, \qquad (13)$$

et pour chacune de ces deux valeurs de y deux branches de courbe tangentes à la droite $y = ax$, avec ou sans inflexion suivant la parité de i, et sans rebroussement. Les deux branches sont situées du même côté de la tangente tant pour les valeurs positives que pour les valeurs négatives de x. Dans le deuxième cas, celui où la ligne brisée régulière se réduit à une droite, μ est donné à la première approximation, par une équation du deuxième degré. Supposons que cette équation ait ses racines distinctes. Elles sont de la forme (12), mais θ_1 n'a plus qu'une seule valeur, qui est ou entière ou de forme $\frac{2f+1}{2}$. Si elle est entière, même conclusion que dans le premier cas, pourvu que c soit réel; si elle est de forme $\frac{2f+1}{2}$, y prend la forme

$$y = ax + bx^i \pm \sqrt{c^2 x^{2f+1}} + \varepsilon_1.$$

Dans le cas où c^2 est réel, condition nécessaire pour que cette valeur de y réponde à des points réels, on ne peut donner à x que des valeurs de même signe que c^2, et il y a pour chaque valeur de c, deux branches de courbe formant un rebroussement de seconde espèce : car la différence entre l'ordonnée de la courbe et l'ordonnée de la tangente, savoir

$$bx^i \pm \sqrt{c^2 x^{2f+1}}$$

prend le signe de bx^i, puisque le terme suivant est infini-

ment petit d'un ordre supérieur; ce signe est donc indépendant de celui qu'on prend devant le radical.

Si les valeurs de c sont égales, on posera de même

$$\mu - cx^{\theta_1} = \nu,$$

et ainsi de suite. On finira par trouver une équation dont les racines soient distinctes, à moins que l'équation en y n'ait deux racines égales, c'est-à-dire ne soit décomposable en facteurs.

On discutera de la même manière le cas où l'une des équations en λ a une racine d'un ordre quelconque de multiplicité.

Nota. — En terminant cette note et en me reportant au précédent article je m'aperçois qu'une erreur de notation s'y est glissée. La formule de la p. 149 (l. 2, en remontant) doit s'écrire :

$$y = ax + bx^{\theta+1} + \varepsilon,$$

et, dans ce qui suit, il faut mettre θ_{+1}, à la même place de θ. Il en résulte que (p. 150, l. 8 en remontant) il faut dire : la parité du numérateur de θ_{+1} et du dénominateur θ, etc... Quelques incorrections typographiques pouvant nuire à la clarté de la rédaction doivent aussi être relevées. 1° p. 147, l. 11 en remontant, au lieu de A^r, lisez A^r_{ij}, et, à la ligne suivante, au lieu de p^e, lisez r^e; 2° p. 148, l. 2 en remontant, au lieu de A^{1+3}_p lisez A^1_{p+3}; enfin dans l'équation 6, le dernier terme est $A^1_{p+3}\ x^3\lambda$.

SUR LES COURBES SECTRICES

Par M. **Schoute**, professeur à l'Université de Groningue.

1. — Dans le plan d'un angle BAP et par le sommet A de cet angle on ne peut mener qu'une seule droite AQ, qui forme avec AB un angle BAQ égal à n fois l'angle BAP, si toutefois n représente un nombre entier et que l'on fasse attention au signe de l'angle. Au contraire, ce plan contient n droites différentes AP par A, qui forment avec AB des angles BAP, qui méritent tous d'être considérés comme la n^{me} partie de l'angle BAQ, si, sous l'idée de l'angle des deux droites AB et AQ, on entend l'angle ordinaire BAQ augmenté ou diminué de $2K\pi$. Ces n droites AP_k déterminent avec AB des angles BAP^k, dont l'expression $\dfrac{BAQ + 2k\pi}{n}$ représente les valeurs.

Elles constituent donc une « *étoile à* n *rayons* », si, par cette expression, on désigne la figure composée de n droites passant par un même point A, centre de l'étoile, de manière qu'elles divisent l'espace, autour du point A, en $2n$ angles égaux. J'appelle cette étoile *l'étoile sectrice d'ordre* n *de l'angle* BAQ.

Si le côté AB de l'angle BAQ est fixe et que l'autre côté AQ tourne autour du point A, l'étoile sectrice d'ordre n de l'angle BAQ tourne en même temps autour du point A. Et il est clair que les positions successives du côté mobile AQ et celles de l'étoile sectrice tournante se correspondent une à une, l'une à l'autre, si à une position quelconque de la droite AQ on associe cette position de l'étoile tournante qui forme l'étoile sectrice de l'angle BAQ correspondant. Donc, les différentes positions de l'étoile tournante constituent un faisceau de rayons d'ordre n, en involution. A la vérité, un point quelconque P du plan détermine une seule position de l'étoile, celle dans laquelle un des rayons de l'étoile passe par ce point P. Et cette involution est mise en rapport projectif avec le faisceau de rayons AQ, par l'accouplement de chaque rayon AQ à l'étoile sectrice de son angle BAQ.

Si la droite mobile AQ passe par un des points cycliqnes l'angle BAQ a une valeur infinie et purement imaginaire; de plus, les deux valeurs infinies et purement imaginaires des angles BAQ, qui correspondent aux deux points cycliques différents sont égales mais de signe contraire, de manière qu'il y a échange mutuel de ces deux valeurs aussitôt que l'on change le sens de rotation, dans lequel on compte positivement l'angle BAQ. Cela prouve que l'étoile sectrice d'un angle BAQ, dont le côté mobile passe par un point cyclique n'est composée que d'un seul rayon passant par ce point et que, dans cette étoile, ce rayon compte n fois. On trouve donc que l'involution de l'étoile tournante contient deux groupes particuliers, chacun d'eux se composant de n droites coïncidantes avec les deux droites, qui joignent A aux points cycliques (*).

(*) Pour le cas $n = 3$. l'involution de l'étoile tournante se trouve incidemment chez Dr Emile Weyr dans son étude : « *Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen* » (Prag, 1874).

Pour simplifier le langage, je représenterai l'involution d'ordre n et à centre A, dont il était question tout à l'heure, par le symbole J_A^n.

2. — Si l'on a mis en rapport projectif deux involutions données J_A^n et $J_{A'}^{n'}$, on a établi en même temps un rapport projectif entre les faisceaux de rayons correspondants AQ et A'Q', qui font avec les droites AB et A'B', choisies arbitrairement, des angles BAQ et B'A'Q' dont les éléments correspondants des involutions forment les étoiles sectrices d'ordre n et n'. Et, réciproquement, la manière la plus simple pour établir un rapport projectif entre deux involutions données J_A^n et $J_{A'}^{n'}$, c'est de mettre en rapport projectif les deux faisceaux correspondants des droites AQ et A'Q', par rapport à deux axes AB et A'B' choisis à volonté. Je suppose dans les pages suivantes, que les nombres entiers n et n', qui représentent les ordres des involutions données, sont premiers entre eux, que n est plus grand que n' et qu'on a mis en rapport projectif les deux involutions données J_A^n et $J_{A'}^{n'}$ en faisant correspondre l'un à l'autre les rayons AQ et A'Q', qui forment avec les droites AB et A'B', menées arbitrairement par A et A', des angles égaux, ou égaux mais en sens contraire. Car c'est de ces cas particuliers que découlent les résultats généraux, que je désire faire connaître.

Suivant les recherches connues de M. Cremona, le lieu des points d'intersection des éléments correspondants des involutions projectives J_A^n et $J_{A}^{n'}$ est une courbe $C^{n+n'}$ de l'ordre $n+n'$, qui passe n fois par A et n' fois par A' En A, cette courbe est touchée par les n rayons de l'étoile contenue en J_A^n qui correspond à cette étoile de $J_{A'}^{n'}$ dont un des rayons passe par A. De même, les tangentes à la courbe en A' forment l'étoile de $J_{A'}^{n'}$ qui correspond à l'étoile de J_A^n, dont un des rayons passe par A'.

Mais, tandis que ces résultats ne varient pas, quand on passe du cas des angles BAQ et B'A'Q' égaux et de même signe au cas des angles BAQ et B'A'Q' égaux et de signe contraire, la signification des points cycliques pour la courbe

$C^{n+n'}$ est tout à fait différente dans les deux cas mentionnés. Si, comme dans ce premier cas, les étoiles tournantes se correspondent en tournant dans le même sens, les éléments qui passent par le même point cyclique sont des éléments correspondants, de manière que la courbe $C^{n+n'}$ passe n' fois par chacun des points cycliques et que les n' tangentes de la courbe en un point cyclique coïncident avec la droite qui joint ce point au point A' et coupent chacune la courbe en ce point cyclique en n points coïncidants. Et si, comme dans le second cas, les étoiles tournantes se correspondent en tournant en sens contraire, l'élément de J_A^n qui passe par un des points cycliques correspond à l'élément de $J_{A'}^{n'}$ qui passe par l'autre point cyclique, de manière que dans ce cas la courbe ne passe pas par les points cycliques.

On trouve l'ordre de multiplicité des points cycliques sur les courbes en question d'une autre manière par la recherche des points réels de la courbe résultante situés à distance infinie. Dans le cas des angles BAQ et B'A'Q' égaux et de même sens, les points P à distance infinie de la courbe $C^{n+n'}$ sont déterminés par la condition $n\varphi = n'(\varphi + \alpha)$, où φ représente l'angle BAP et $\varphi + \alpha$ l'angle B'A'P'. Car des deux expressions $n\varphi$ et $n'(\varphi + \alpha)$ la première est égale à l'angle BAQ et la seconde à l'angle B'A'Q'. Donc le nombre des points infinis réels P de $C^{n+n'}$ est égal au nombre $n - n'$ des solutions différentes de la congruence $(n - n')\varphi \equiv n'\alpha$ (mod. π) et la courbe doit posséder un nombre de $n + n' - (n - n') = 2n'$ points infinis imaginaires. Dans le cas où les anelsg BAQ et B'A'Q' sont égaux et de sens contraire les points infinis réels P sont en nombre $n + n'$, nombre des solutions de la congruence $(n + n')\varphi + n'\alpha \equiv 0$ (mod. π) la courbe n'admet pas des points infinis imaginaires.

La considération précédente fait connaître en même temps la distribution des points infinis réels. Car la série des solutions de la première congruence montre que les droites qui joignent un point quelconque du plan aux $n - n'$ points infinis réels de la première courbe $C^{n+n'}$ forment une étoile à $n - n'$ rayons. Et, de la même manière, on démontre que les droites menées par un point, parallèlement aux

$n + n'$ asymptotes de la seconde courbe $C^{n+n'}$, forment une étoile à $n + n'$ rayons.

La courbe engendrée peut abaisser son ordre d'une unité. C'est ce qui arrive quand la droite AA', qui joint les centres des involutions correspond à elle-même, c'est-à-dire quand, selon une expression due à M. Schröter, les deux involutions projectives se trouvent en position partiellement perspective. Et quand la droite AA' se détache de la courbe $C^{n+n'}$, la courbe restante $C^{n+n'-1}$ ne passera que $n - 1$ fois par A et $n' - 1$ fois par A' et en même temps les étoiles des tangentes en A et en A' et l'étoile des droites menées par un point quelconque de AA', parallèlement aux asymptotes de la courbe, perdent leur rayon qui coïncide avec AA'.

(A suivre.)

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 153.)

La trisectrice de Mac-Laurin.

7. — Prenons une courbe U et deux points fixes O, O'; puis effectuons la construction suivante.

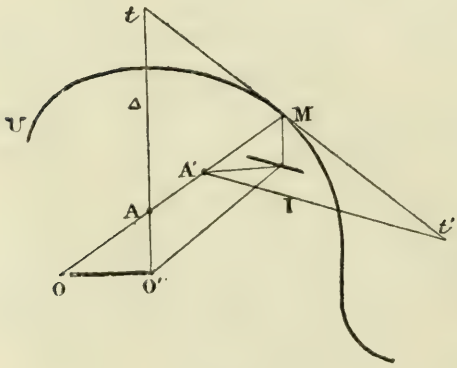


Fig.9.

Par O menons une droite rencontrant U en M, du point M abaissons une perpendiculaire sur OO'; enfin, par O' traçons une parallèle a MO. Nous obtenons ainsi un point I qui décrit une certaine courbe V, quand M parcourt la courbe donnée U. Nous nous proposons d'indiquer le tracé de la tangente à V, au point I.

Élevons au point O′ une droite Δ perpendiculaire à OO′; Δ rencontre OM en un certain point A; menons aussi IA′ parallèlement à OO′. Nous avons OA = MA′ et en considérant deux rayons vecteurs infiniment voisins, le théorème des *transversales réciproques*, appliqué à cette figure, prouve que la tangente en A′, au lieu W décrit par A′ et la droite Δ rencontrent la tangente tt' au point M en deux points t, t' symétriques par rapport à ce point.

D'ailleurs, la courbe W, lieu décrit par A′, n'est autre chose que V transportée parallèlement à elle-même dans la direction OO′, à une distance égale à OO′. D'après cette remarque, si l'on prend $Mt' = Mt$, la tangente demandée est parallèle à $A't'$.

8. — Appliquons cette construction à la trisectrice. On appelle *trisectrice* (*) une courbe qui sert à résoudre le problème de la trisection de l'angle. Il y a naturellement beaucoup de trisectrices; en voici une dont la génération est très simple (**).

Imaginons sur une droite des points équidistants :

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_5 = a;$$

menons par O_1 une transversale arbitraire O_1M, puis abaissons O_3M perpendiculairement à cette droite; soit O_2I parallèle à O_1M et soit MI perpendiculaire à O_1O_5. Le lieu de I est une courbe V_1 qui rentre, comme cas très particulier, dans les courbes que nous avons engendrées point par point, au moyen de la construction indiquée dans le paragraphe précédent. Le tracé de la tangente à V_1 se fera donc comme

(*) Ce nom a été proposé par M. Godefroy; voyez : *Archives Néerlandaises*, t. XX, 1885 (sur la construction de courbes unicursales, par points et tangentes, par P. H. Schoute, professeur à l'Université de Groningue).

L'article de M. Schoute dont la publication est commencée ci-dessus, renferme diverses considérations sur la trisectrice, que l'on trouvera dans le prochain numéro.

(**) Cette courbe, d'après une communication que je dois à l'obligeance de M. Schoute, se trouve dans *le Traité des fluxions de Mac-Laurin* (1749, pl. X, fig. 134, p. 198).

Elle a été retrouvée récemment, par une génération très différente, par M. João d'Almeida Lima, primeiro tenente de artilheria; *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* publié par le Dr F. Gomes Teixeira (Coimbra).

nous l'avons dit et bien simplement puisque la droite tt', considérée dans le cas général, n'est autre chose dans la *fig. 10* que la perpendiculaire élevée au point M à O_3M.

9. — Mais il nous reste à montrer pourquoi la courbe V_1 est une trisectrice.

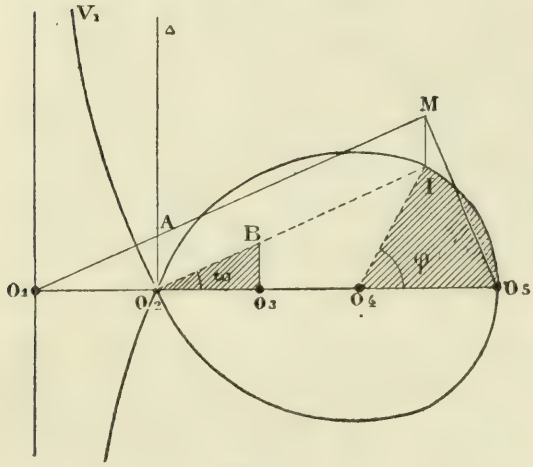


Fig. 10.

Nous avons

$$O_2I = AM = O_1M - O_1A$$

$$= 4a \cos \omega - \frac{a}{\cos \omega}$$

et

$$\frac{O_2I}{\text{in } \varphi} = \frac{2a}{\sin(\varphi - \omega)}.$$

Les angles φ et ω vérifient donc, pour tous les points de V_1, la relation :

$$2 \sin \varphi \cos \omega = (4 \cos^2 \omega - 1) \sin(\varphi - \omega).$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\sin \varphi \cos \omega (3 - 4 \cos^2 \omega) = \sin \omega \cos \varphi (1 - 4 \cos^2 \omega),$$

ou encore

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4 \sin^3 \omega - 3 \sin \omega}{3 \cos \omega - 4 \cos^3 \omega},$$

ou enfin

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 3\omega.$$

Ainsi l'angle IO_2O_5 est le tiers de l'angle IO_4O_5; V_1 est donc bien une trisectrice.

10. — L'équation cartésienne de la courbe V_1 est

$$x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2),$$

elle rentre dans la famille des cubiques circulaires unicursales et, comme je l'ai montré ailleurs (*), ces courbes peuvent

(*) *Congrès de Grenoble*, 1885. Je reviendrai d'ailleurs sur ce point dans ma *Géométrie de la règle et de l'équerre (Journal de mathématiques élémentaires)* et je donnerai, à ce propos, une construction plus simple que celle que j'ai indiquée tout à l'heure, pour mener une tangente à la trisectrice. Je laisse au lecteur le soin de vérifier la propriété suivante :

On donne un cercle C, *un diamètre* AB *et une droite* Δ *perpendiculaire sur* AB, *en un point* D *intérieur, tel que* BD = 3DA; *si par* A *on mène une*

être considérées comme des conchoïdales de cercle, courbes qui se prêtent très aisément au tracé des tangentes.

11. — Je ne quitterai pas cette courbe remarquable sans faire connaître une très curieuse propriété qui a été signalée par M. Godefroy; cette propriété peut s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Dans la trisectrice le secteur curviligne* IO_4O_3 *est égal au triple du triangle* O_2BO_3.

Comme on a

$$\varphi = 3\omega,$$

et, par conséquent,

$$d\varphi = 3d\omega,$$

tout revient à démontrer que

$$O_4I = O_2B.$$

Or, on a

$$\frac{O_4I}{\sin\omega} = \frac{O_2I}{\sin 3\omega} = \frac{a(4\cos^2\omega - 1)}{\cos\omega\sin 3\omega};$$

on en déduit

$$O_4I = a\frac{4\cos^2\omega - 1}{\cos\omega(3 - 4\sin^2\omega)} = \frac{a}{\cos\omega}.$$

D'ailleurs, le triangle O_2O_3B donne

$$O_2B = \frac{a}{\cos\omega};$$

on a donc bien

$$O_4I = O_2B,$$

égalité qui entraîne le théorème de M. Godefroy.

(A suivre.)

---

transversale mobile rencontrant C *en* M, Δ *en* N *et si l'on prend* AI = NM, *le lieu de* I *est la trisectrice de Mac-Laurin.*

Ainsi la trisectrice s'engendre point par point comme la cissoïde et la strophoïde; pour la cissoïde Δ est en B, pour la strophoïde Δ passe par le milieu de AB; enfin, pour la trisectrice, Δ doit passer par le point qui partage AB dans le rapport de 1 à 3.

La tangente à la trisectrice se construit donc par le procédé des transversales réciproques de la même façon que pour la cissoïde et la strophoïde.

Menez la tangente à C *au point* M *jusqu'à sa rencontre en* μ *avec* Δ, *prenez* Mμ' = μM; μ'I *est la tangente à la trisectrice.*

ÉCOLE NORMALE

CONCOURS DE 1885

Solution de la 1re question proposée aux candidats (*).

Soit F′ le second foyer ; abaissons de F et F′ des perpendiculaires FH, F′H′ sur la tangente P_1P_2 ; les pieds H et H′ de ces perpendiculaires sont sur le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre. Joignons FP_1 et HF′, on a :

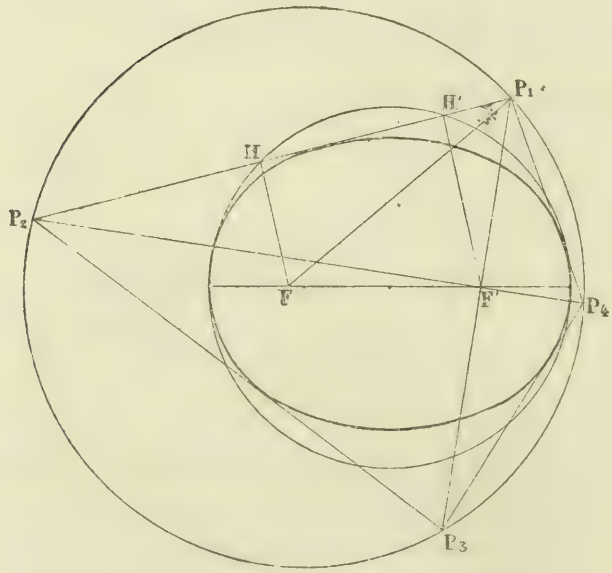
$$\overline{HP_1}^2 = \overline{FP_1}^2 - \overline{FH}^2 = 2a^2 + 2c^2 - \overline{FH}^2,$$

ensuite :

$$\overline{HF'}^2 = \overline{HH'}^2 + \overline{F'H'}^2.$$

Mais dans le trapèze rectangle HH′FF′ on a :

$$\overline{HH'}^2 = \overline{FF'}^2 - (F'H' - FH)^2 = 4c^2 - \overline{FH}^2 - \overline{F'H'}^2 + 2FH \,.\, F'H'.$$



Donc, en remarquant que FH . F′H′ = b^2, $\overline{HF'}^2 = 4c^2 + 2b^2 - \overline{FH}^2 = 2a^2 + 2c^2 - \overline{FH}^2$, par conséquent $HF' = HP_1$. Il en résulte immédiatement que l'angle $P_2F'P_1$ est droit, car H est le milieu de P_1P_2 ; donc, les angles $P_2F'P_3$, $P_3F'P_4$ étant également droits, les droites P_1P_3, P_2P_4 sont rectangulaires et se coupent au foyer F′. Enfin, si de P_4 on mène une quatrième

(*) Voyez plus loin l'énoncé de cette question.

tangente à l'ellipse, elle rencontrera le cercle en un point situé sur la perpendiculaire à P_1F' menée par F', donc en P_1.

Remarques. — 1° Il est facile, étant donnée une ellipse, de tracer un cercle remplissant les conditions de l'énoncé. Il suffit, en effet, de mener deux parallèles telles que FH et F'H', de joindre HH' et de prendre $HP_1 = HF'$; le rayon du cercle sera précisément égal à FP_1.

2° On sait par les travaux de Poncelet sur les polygones circonscrits et inscrits à deux coniques, qu'il suffit de vérifier le théorème proposé, pour une position particulière de P_1. On obtient une vérification très simple en considérant les tangentes à l'ellipse aux sommets du grand axe et rencontrant le cercle en des points que nous appellerons C, C' et D, D'. On voit facilement que les droites CD et C'D', symétriques par rapport au grand axe, sont tangentes à l'ellipse. B. N.

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite* voir p. 163.)

§ III. — *Aires projetées.*

Il est souvent utile d'attribuer un signe aux aires planes : un contour pouvant être décrit dans deux sens différents, le moment de ce contour est susceptible de deux signes : nous adopterons pour l'aire qui est la moitié du moment le signe du moment.

On sait que, dans ces conditions, les aires planes se représentent par des perpendiculaires à leur plan : ces perpendiculaires commencent au point où elles rencontrent le plan en question et ont ainsi un sens bien déterminé qui représente le sens de l'aire : des perpendiculaires situées d'un

même côté du plan représentent de cette façon des aires de même signe. L'angle de deux aires planes est l'angle unique que forment les deux perpendiculaires, ces deux perpendiculaires de sens déterminé ne formant en effet qu'un angle.

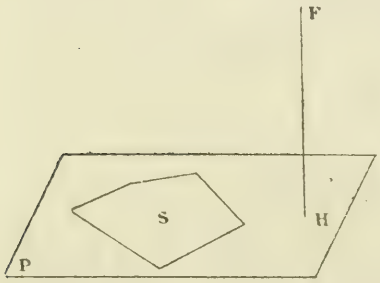
On déduit de là que la projection d'une aire plane sur un plan P est représentée par la projection sur la normale OZ à P de la perpendiculaire qui représente cette aire.

Enfin si l'on considère un polyèdre et qu'on suppose les aires de toutes ses faces comme représentées par des normales toutes intérieures au polyèdre, ce qui détermine le sens de ces aires, on a le théorème suivant analogue au théorème des projections en géométrie plane.

Théorème XII. — *Deux surfaces polyédrales limitées à un même contour ont même projection sur un plan quelconque Une surface polyédrale fermée a une projection nulle sur un plan quelconque.*

§ IV. — *Moment des surfaces polyédrales et courbes.*

Soit une aire S située dans le plan P, nous appellerons moment de S par rapport au point F le produit S $\times$ FH, FH étant la perpendiculaire abaissée du point F sur le plan P. L'aire S est, bien entendu, définie en signe : le moment S $\times$ FH est nul, soit quand S est nul, soit quand le plan P contient le point F.



Le moment d'une aire polyédrale est la somme algébrique des moments de ses diverses faces.

Ces définitions posées, la théorie des moments dans l'espace et des volumes s'établit de la même façon que la théorie correspondante en géométrie plane ; les théorèmes et leur démonstration sont presque identiques.

Théorème XIII. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de l'aire lane* S *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* s *la projection de*

S *sur le plan normal à* FF_1 *on a*

$$\mu_1 - \mu = FF_1 \times s.$$

Théorème XIV. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de l'aire polyédrale* S *par rapport aux points* F *et* F_1 *et* s *cette aire projetée sur le plan normal à* FF_1 *on a*

$$\mu_1 - \mu = FF_1 \times s.$$

Théorème XV. — *Le moment d'une aire polyédrale fermée est constant pour un point quelconque de l'espace.*

Ce moment constant est le moment de la surface fermée.

Théorème XVI. — *Si une surface fermée résulte du groupement de plusieurs surfaces fermées partielles, le moment de la surface totale est la somme des moments des surfaces partielles.*

Théorème XVII. — *Soient* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *deux sections triangulaires d'un trièdre* F *et* μ *et* μ_1 *les moments de ces deux sections par rapport au sommet* F, *on a*

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{FA \,.\, FB \,.\, FC}{FA_1 \,.\, FB_1 \,.\, FC_1}.$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle donnée en géométrie plane.

Théorème XVIII. — *Soient* μ *et* μ_1 *les moments de deux surfaces polyédrales* S *et* S_1, *terminées à un même contour, par rapport à un point* F; *si la surface* S_1 *est intérieure à la surface* S *par rapport au point* F *on a* $\mu > \mu_1$.

Il suffit pour cette démonstration de décomposer les deux surfaces en triangles correspondants par des angles trièdres ayant leur sommet en F et d'appliquer le théorème précédent à ces triangles.

Théorème XIX. — *Soient une portion de surface courbe* S *et une surface polyédrale* S_1, *à faces infiniment petites, et infiniment voisine de la surface* S, *c'est-à-dire telle que chaque face en tendant vers zéro a pour limite un point de* S : *le moment*

de S_1 *par rapport à un point* F *a une limite constante quelle que soit la loi de déformation de la surface* S_1.

Cette limite constante est, par définition, le moment de la surface S par rapport au point F.

Cette définition permet d'étendre aux surfaces courbes les théorèmes relatifs aux moments des aires polyédrales.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

23. — *Trouver la condition que doivent vérifier les coefficients de l'équation d'une conique pour que les tangentes issues de l'origine forment, avec les axes de coordonnées, un faisceau harmonique.*

L'équation de la conique étant

$$f = Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2By + 2B'x + A'' = 0,$$

le faisceau des tangentes issues de l'origine est représenté par l'égalité

$$A''f - (By + B'x + A'')^2 = 0.$$

Cette relation s'écrit encore :

$$(AA'' - B'^2)x^2 + 2(A''B'' - BB')xy + (A'A'' - B^2)y^2 = 0.$$

A une valeur de x doivent correspondre deux valeurs de y, égales et de signes contraires ; on a donc

$$A''B'' - BB' = 0.$$

24. — *Un plan* P *coupe le trièdre des axes de coordonnées en des points* A, B, C; *on suppose* OA = a, OB = b, OC = c, *trouver les coordonnées de l'orthocentre du triangle* ABC. *(Les axes étant rectangulaires.)*

On trouve facilement

$$ax = by = cz = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

25. — *Soit* P *un point arbitrairement choisi sur un ellipsoïde ; la normale en P rencontre les plans principaux en des points* A, B, C.

Démontrer que le rapport anharmonique des points (P, A, B, C) *est constant, quel que soit* P.

On projette les points P, A, B, C, par des plans parallèles à *yoz* sur l'axe *ox*. On voit ainsi que le rapport $\frac{PA}{PC}$ est constant. Cette remarque pouvant s'appliquer au point P associé à deux quelconques des points A, B, C on a

$$\frac{PA}{PC} : \frac{BA}{BC} = \text{constante}.$$

26. — *Résoudre, en nombres entiers, l'équation*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

L'identité (*) :

$$(\gamma\alpha^2 - \beta^2\gamma)^2 + (2\alpha\beta\gamma)^2 = (\gamma\alpha^2 + \beta^2\gamma)^2$$

donne une infinité de solutions entières de l'équation proposée ; il faut seulement donner à α, β, γ des valeurs entières arbitraires et poser :

$$x = \gamma(\alpha^2 - \beta^2),$$
$$y = 2\alpha\beta\gamma,$$
$$z = \gamma(\alpha^2 + \beta^2).$$

Pour obtenir des triangles rectangles dont les côtés soient des nombres entiers et *qui ne soient pas semblables*, il faut supposer $\gamma = 1$, dans ces formules.

Les solutions les plus simples sont

3	4	5	8	15	17
5	12	13	12	35	37
7	24	25	16	63	65
9	40	41	20	99	101
. . .			. . .		

Pour des nombres inférieurs à 500, le résultat le plus voisin de ce nombre est fourni par

$$x = 319, \quad y = 360, \quad z = 481 \text{ (**)}.$$

27. — *On considère l'identité connue*

(*) Voyez de Longchamps, *Algèbre*, p. 241.

(**) *The Mathematical Magazine* (avril 1884, p. 163 ; *Rational rightriangles*, par Fitz Newton).

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{mx+n}{x_2+1} + \frac{A}{x+1}, \qquad (1)$$

on connaît A, *on propose de calculer* m.

On peut dire que l'identité (1) entraîne la suivante

$$\frac{x^3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{mx^2+nx}{x^2+1} + \frac{Ax}{x+1}.$$

Quand x croît au delà de toute limite on a

$$1 = m + A.$$

28. — *On connaît le developpement de la fraction rationnelle* f

$$f = \frac{1}{x(x^2+1)},$$

en déduire celui de φ,

$$\varphi = \frac{1}{x^3(x^2+1)}.$$

On observera que l'on a

$$\varphi = \frac{x^2+1-x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

(A suivre.)

AGRÉGATION 1885

Mathématiques spéciales.

— 1° On donne une sphère S, et, sur cette sphère, un cercle C et un point T; démontrer qu'il y a deux paraboloïdes passant par le cercle C et tangents à la sphère au point T.

— 2° Démontrer que les axes de ces paraboloïdes sont dans un même plan, et trouver le lieu de leur point d'intersection quand le point T se meut sur la sphère.

— 3° Dans les mêmes conditions, trouver le lieu des sommets de ces paraboloïdes.

— 4° Soient T et T′ deux points diamétralement opposés sur la sphère. Au point T correspondent deux paraboloïdes P et Q, au point T′ correspondent deux autres paraboloïdes P′ et Q′. — Trouver le lieu engendré par la courbe d'intersection de chacun des paraboloïdes P et Q avec chacun des paraboloïdes P′ et Q′ quand on fait varier la direction du diamètre TT′.

ÉCOLE CENTRALE 1885

PREMIÈRE SESSION

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires OX, OY et le cercle représenté par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0.$$

On considère la corde fixe AB menée par l'origine et partagée par ce point en deux parties égales, et une corde mobile CD, de direction constante, dont le coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de la corde fixe AB.

On sait que par les quatre points A, B, C, D on peut faire passer deux paraboles P, P'.

Trouver, quand la corde CD se déplace parallèlement à elle-même :

1° Le lieu du point de rencontre des axes des deux paraboles P et P';

2° Le lieu du sommet et le lieu du foyer de chacune des paraboles.

Triangle.

On donne deux côtés a, b d'un triangle et l'angle C qu'ils comprennent, savoir :

$$a = 6374^{m},35$$
$$b = 4462^{m}3,77$$
$$C = 117^{\circ}\ 35'\ 43'',2.$$

On demande de déterminer les angles A, B, le côté c, ainsi que la surface du triangle.

Épure.

Un cylindre de révolution dont le diamètre $d = 0^{m},080$ touche les deux plans de projection. Un cône, aussi de révolution, a pour trace horizontale un cercle tangent à la ligne de terre, dont le diamètre est égal à $2d$, la cote du sommet $= \frac{1}{2}d$.

Construire :

1° Les deux projections et le *développement* de la partie Σ de la *surface* du cylindre comprise dans les deux nappes du cône.

2° La projection horizontale et la transformée par développement, de l'intersection de la surface Σ avec un plan perpendiculaire au plan vertical, incliné de 45° sur le plan horizontal, et passant par le sommet du cône.

On indiquera à l'encre rouge, les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et du développement des lignes d'intersection et les tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Titre extérieur. — *Géométrie descriptive.*

Titre intérieur. — *Intersection d'un cône et d'un cylindre.* Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre à $0^{m},170$ du grand côté inférieur, et les projections du sommet du cône à $0^{m},130$ de la parallèle aux petits côtés du cadre, qui passe au milieu de la feuille.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCES

(1er juillet 1885).

I. — Discuter la courbe représentée par l'équation :

$$(x^4 - 5x^2 + 4)\, y^2 - 4xy + x^2 = 0,$$

II. — Reconnaître la nature des différentes surfaces représentées par l'équation du deuxième degré :

$$x^2 + y^2 + hz^2 + 2axz + 2byz + 2cz = 0.$$

quand les coefficients h, a, b, c prennent toutes les valeurs possibles ; déterminer les sections circulaires de ces surfaces.

ÉCOLE NORMALE (CONCOURS DE 1885).

Composition en Mathématiques.

Soit une ellipse E dont le grand axe et la distance focale sont respectivement égaux à $2a$ et $2c$. Du foyer F de cette ellipse comme centre, on décrit une circonférence C dont le rayon est égal à $\sqrt{2(a^2 + c^2)}$. D'un point quelconque P_1 de la circonférence C on mène une tangente P_1P_2 a l'ellipse, P_2 désignant le second point de rencontre de cette droite avec la circonférence. On mène de même la tangente P_2P_3 à l'ellipse, puis la tangente P_3P_4.

On demande de démontrer que la seconde tangente menée à l'ellipse par le point P_4 passe par le point initial P_1.

1° On considère la fonction de x,

$$y = \frac{\sin\,[m\,(\text{arc cos } x)]}{\sqrt{1 - x^2}}$$

où m est une constante donnée. Montrer que cette fonction satisfait à la relation

$$(x^2 - 1)y'' + 3xy' - (m^2 - 1)\, y \equiv 0,$$

y' et y'' désignant les dérivées premières et secondes de la fonction y.

2° En supposant que m soit un entier positif, on demande d'établir que l'on peut satisfaire à l'identité précédente en prenant pour y un polynme en x.

Après avoir trouvé le degré de ce polynôme on cherchera la forme de ses coefficients.

QUESTION 102

Solution par M. L. Marchis, élève de Mathématiques spéciales, au Lycée de Rouen.

On donne une ellipse E *et l'on considère la droite* Δ *qui a pour équation,*

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

Soit M *un point pris sur l'ellipse, et soit* Δ' *la tangente en ce point;* Δ' *rencontre* Δ *en un point* P. *On joint ce point* P *au sommet de droite* A, *et on élève à* AP *une perpendiculaire* Δ'' *par le point* A. *Démontrer que la droite* AM *est bissectrice de l'angle formé par* Δ'' *avec le grand axe* AA'. *Déduire de cette remarque une construction de la tangente en un point de l'ellipse au moyen de la règle et de l'équerre. On suppose que les sommets de la courbe sont seuls connus.*

Rapportons l'ellipse E à ses axes et soient x', y' les coordonnées du point M. On a :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'équation de Δ' est :

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 = 0.$$

Cherchons les coordonnées de P. Dans l'équation de Δ', remplaçons $\frac{x}{a}$ par $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$, nous avons

$$\frac{x'}{a} \cdot \frac{a^2 + b^2}{c^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1;$$

$$P \begin{cases} y = \dfrac{ab^2c^2 - b^2x'(a^2 + b^2)}{ac^2y'}, \\ x = a \cdot \dfrac{a^2 + b^2}{c^2}. \end{cases}$$

Le coefficient angulaire de PA est :

$$\frac{ab^2c^2 - b^2x'(a^2 + b^2)}{a^2y''\left[a\dfrac{a^2 + b^2}{c^2} - a\right]}.$$

Donc le coefficient angulaire de Δ'' est :

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{-2a^2y'}{ac^2 - x'(a^2 + b^2)}$$

α' désignant l'angle que fait Ox avec Δ''.

Appelons α l'angle que fait Ox avec AM,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y'}{x' - a}.$$

Calculons tang 2α.

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2y'(x'-a)}{(x'-a)^2 - y'^2} = \frac{\frac{2y'}{b^2}(x'-a)}{\frac{(x'-a)^2}{b^2} - \frac{y'^2}{b^2}},$$

ou, en remplaçant $\frac{y'^2}{b^2}$ par sa valeur tirée de la relation 1,

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2a^2y'}{a^2(x'-a) + b^2(x'+a)} = \frac{2a^2y'}{x'(a^2+b^2) - ac^2}$$

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{-2a^2y'}{ac^2 - x'(a^2+b^2)},$$

Donc $2\alpha = \alpha'$,

ou $\alpha = \frac{\alpha'}{2}$.

L'angle de Ox avec AM est la moitié de l'angle de Ox avec Δ'. Le théorème est donc démontré.

Application. — Il faut d'abord construire la longueur x, satisfaisant à la relation

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Cette relation peut s'écrire,

$$\frac{x}{a} = \frac{a + \frac{b^2}{a}}{a - \frac{b^2}{a}},$$

et, en posant $\frac{b^2}{a} = m$,

$$\frac{x}{a} = \frac{a+m}{a-m}$$

Or, on a

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a}.$$

m est une quatrième proportionnelle aux trois longeurs b, b, a. Connaissant m on aura facilement $a+m$ et $a-m$; x est une quatrième proportionnelle aux trois longueurs a, $a+m$, $a-m$.

La droite Δ étant construite, et un point M de la courbe

étant connu, on joint MA. Puis on fait avec Ox un angle double de l'angle de AM avec Ox. On a ainsi Δ''. En élevant une perpendiculaire à Δ'' au point A, on a AP et, par suite, le point P. La droite PM est la tangente demandée.

Note. — Une quatrième proportionnelle ne se construit pas avec la règle et l'équerre seulement. La droite qui correspond à l'équation

$$\frac{x}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},$$

se construit avec la règle et l'équerre, connaissant les sommets de la courbe, comme je l'ai indiqué dans ce journal (année 1882, p. 49) et dans ma *Géométrie analytique* (p. 381).

L'auteur de cette solution n'indique pas non plus comment on peut prendre le symétrique d'un point M, par rapport à une droite XY, sans faire usage du compas.

Par le point M on mène deux droites quelconques rencontrant XY aux points A et B ; on complète le parallélogramme MAB et l'on obtient ainsi un point M'. Par M' on mène une parallèle à XY, enfin du point M' on abaisse une perpendiculaire sur cette droite. Le pied M'' de cette perpendiculaire est le point cherché. G. L.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Giat, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Ed. Lucas) ; Bêche, professeur à l'école normale de Tulle.

ERRATUM

Une erreur s'est glissée dans la figure 6, p. 154. L'asymptote du trident n'est pas OX, mais une droite parallèle à V et située à égale distance de V et de OX. G. L.

QUESTIONS PROPOSÉES

172. — On considère une ellipse Γ_1; on imagine une seconde ellipse Γ_2 ayant deux sommets communs avec Γ_1 et admettant pour ses deux autres sommets les foyers de Γ_1. Soit Γ_3 une ellipse déduite de Γ_2, comme Γ_2 l'a été de Γ_1; et ainsi de suite.

On demande combien de ces coniques Γ seront, au début, allongées suivant l'axe OX; combien ensuite on trouvera de coniques allongées suivant OY; et ainsi de suite.

En désignant par a et b les axes de Γ_1, on posera

$$a^2 = pb^2,$$

et l'on distinguera trois cas, suivant que p désigne un nombre entier, un nombre commensurable, ou enfin un nombre irrationnel de la forme $m + \sqrt{n}$; m et n étant commensurables. *(G. L.)*

173. — On donne un triangle rectangle isoscèle; on lui circonscrit un cercle et une hyperbole équilatère variable. Ces deux courbes ont alors en commun trois points fixes et un point variable. En ce dernier, on mène la tangente à l'hyperbole; lieu du point d'intersection de cette tangente avec les parallèles menées par le sommet de l'angle droit aux asymptotes de la même hyperbole. *(Amigues.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17764-5.

SUR LES POINTS ASSOCIÉS DU PLAN D'UN TRIANGLE ABC

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Je définis *points associés* des points O, O_a, O_b, O_c, tels que α, β, γ étant les coordonnées homogènes du point O,

$-\alpha, \beta, \gamma$, seront celles de O_a
$\alpha, -\beta, \gamma$, — O_b
$\alpha, \beta, -\gamma$, — O_c

On peut toujours supposer que l'un de ces points (et c'est celui-là que nous désignerons ordinairement par O) a ses coordonnées de même signe et que ce signe est positif. Avec ces conventions, O sera toujours dans l'intérieur du triangle de référence ABC, et les coordonnées des points O, O_a, O_b, O_c peuvent être regardées comme proportionnelles (en grandeur et en signe) aux distances de ces points aux trois côtés du triangle.

Théorème I. — *Les triangles* ABC, $O_a O_b O_c$, *sont homologiques,* O *est leur centre d'homologie.*

L'axe d'homologie a pour équation, si α_1, β_1, γ_1 sont les coordonnées de O,

$$\alpha \beta_1 \gamma_1 + \beta \alpha_1 \gamma_1 + \gamma \alpha_1 \beta_1 = 0.$$

Théorème II. — *Les quatre droites* O_bAO_c, AC, AO, AB, *forment un faisceau harmonique et, par suite,* OA *divise* CB *en* A′, O_bAO_c *divise* CB *en* A″ *de façon que*

$$\frac{A'C}{BA'} = \frac{A''C}{A''B},$$

de même pour les quatre droites O_cBO_a, BA, BO, BC *et pour* O_aCO_b, CB, CO, CA.

Si l'on ne tient pas compte de la convention sur le signe des coordonnées du point O, convention qui n'a raison d'être que pour aider à voir les positions respectives des points

associés, on peut dire évidemment que : *l'un quelconque des quatre points* O, O_a, O_b, O_c, *a pour associés les trois autres.*

Les sommets du triangle de référence n'ont pas d'autres associés qu'eux-mêmes.

Si l'un des côtés, BC *par exemple, contient le point* O, O_a *se confond avec* O, O_b *et* O_c *se confondent aussi et sont sur* BC *au point conjugué harmonique de* O *par rapport à* B *et à* C.

Le théorème II fait prévoir que si la position d'un point O est déterminée par des propriétés géométriques du rapport des segments que OA, OB, OC, déterminent sur BC, les points O_a, O_b, O_c auront une détermination analogue et celles des propriétés de O qui ne dépendront que de ces rapports donneront lieu à des propriétés analogues des points O_a, O_b, O_c.

Il sera donc intéressant toutes les fois que l'on étudiera un point remarquable O *du triangle, d'examiner ses associés et de chercher les propriétés analogues à celles de* O, *qu'ils peuvent avoir.*

Voici les associés de quelques points remarquables.

1. — Si O est le centre de gravité, O_a, O_b, O_c sont les sommets du triangle obtenu en menant respectivement par A, B, C, des parallèles à BC, AC, AB.

2. — Si O est le centre du cercle inscrit, les points associés sont les centres des cercles ex-inscrits, et plus généralement quatre points associés sont les quatre centres de quatre coniques homothétiques inscrites dans le triangle.

3. — Si O est le centre des médianes antiparallèles (appelé aussi point de Lemoine), les points associés sont les sommets du triangle formé par les tangentes menées au cercle circonscrit aux sommets de ABC.

4. — Si l'on cherche un point O tel que les lignes OA, OB, OC, divisent les côtés opposés en parties proportionnelles à une puissance m (positive, négative, etc.) des côtés adjacents ou, ce qui revient au même (voir *Congrès d'Alger*, H. Brocard), le point O tel que les distances du point aux trois côtés soient proportionnelles à une puissance m' de ces côtés, ou encore le point O tel (voir *Congrès de La Rochelle*, E. Lemoine) que les portions des parallèles menées par O à un côté et comprises entre les deux autres soient

proportionnelles à une puissance m'' de ce côté, ou encore le point O tel (voir *Congrès de La Rochelle*, loc. cit.) que les parallélogrammes formés par deux côtés et les parallèles à ces deux côtés menées par O soient proportionnels à une puissance m''' du troisième côté et d'autres définitions analogues de O qui se lient les unes aux autres, on trouve dans chaque question, en faisant varier les signes des rapports de ces puissances, quatre points O, O_a, O_b, O_c, qui sont des *points associés*. Chaque groupe de ces points qui correspond, dans une définition de O, à une valeur M de la puissance dont il s'agit dans cette définition, coïncide avec un groupe de points appartenant à chaque autre définition mais ne correspondant pas à la même valeur de la puissance, de sorte que si dans chaque définition on fait varier M de $+\infty$ à $-\infty$, les points O, O_a, O_b, O_c, décrivent le même lieu (ce lieu est une courbe transcendante fort compliquée (voir *Congrès de La Rochelle*, page 123), il suit de là comme on le voit facilement que les réciproques de ces proportions sont vraies ; par exemple :

Si les parties des parallèles aux côtés d'un triangle, parties comprises entre deux côtés et menées par un point O, *sont proportionnelles à une puissance* m *de ces côtés* (le cas de $m = 1$ correspond à la question 20 proposée dans *Mathésis* par M. J. Neuberg, 1880), *les points associés de* O *jouiront de la même propriété.*

5. — Par un point I quelconque du plan :

menons une parallèle à BC qui coupe AC en A_c, AB en A_b
— CA — BA en B_a, BC en B_c
— AB — CB en C_b, CA en C_a

et proposons-nous de trouver I_1 tel que : $I_1A_c = I_1B_a = I_1C_b$,
et I_2 tel que : $I_2A_b = I_2B_c = I_2C_a$.

MM. Jerabek et Neuberg se sont occupés de ce problème (*Mathésis*, page 191, 1881) et ont donné des propriétés très élégantes de ces points.

Nous ajouterons qu'il y a d'autres solutions que celle qu'ils ont examinée.

Ces solutions sont les points associés de I_1 et les points associés de I_2.

Les coordonnées homogènes de I_1 sont b, c, a; celles de I_{1a} sont $-b$, c, a, etc.

Les coordonnées homogènes de I_2 sont c, a, b; celles de I_{2a} sont $-c$, a, b, etc.

Les longueurs communes considérées sont :

Pour I_1 et I_2 $\dfrac{abc}{ab + ac + cb}$;

Pour I_{1a}, I_{1b}, I_{1c} respectivement

$$\frac{abc}{-ab + ac + bc}, \quad \frac{abc}{ab - bc + ac}, \quad \frac{abc}{ab + bc - ac}.$$

Pour I_{2a}, I_2 , I_{2c} respectivement

$$\frac{abc}{ab - ac + bc}, \quad \frac{abc}{-ab + ac + bc}, \quad \frac{abc}{ab - bc + ac}.$$

Si D, D_{1a}, D_{1b}, D_{1c}, D_{2a}, D_{2b}, D_{2c} désignent ces longueurs, on aura

$$D_{1a} = D_{2b}$$
$$D_{1b} = D_{2c}$$
$$D_{1c} = D_{2a}$$
$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_{1a}} + \frac{1}{D_{1b}} + \frac{1}{D_{1c}}.$$

Si l'un des dénominateurs est nul, par exemple $-ab + ac + bc$, les points I_{1a}, I_{2b} sont rejetés à l'infini.

L'un des dénominateurs peut être négatif; la convention implicite faite d'après la définition de I_1 et de I_2 sur le sens dans lequel il faut compter $I_1 A_c$, etc., $I_2 A_b$, etc., montre sans difficulté dans quelle région se trouvent les points I.

(A suivre.)

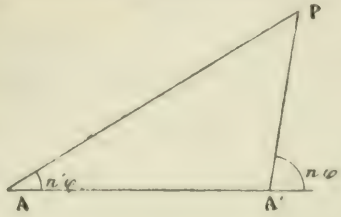
SUR LES COURBES SECTRICES

Par M. **Schoute**, professeur à l'Université de Groningue.

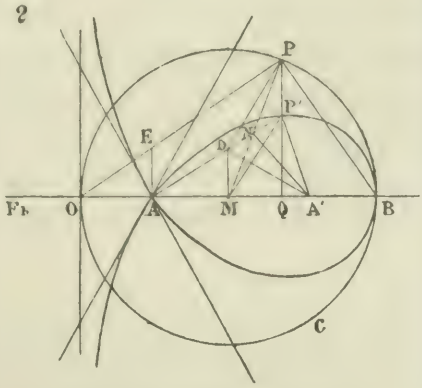
(*Suite*, voir p. 172.)

3. Théorème I. — *Le lieu du point* P, *qui forme avec la base fixe* AA′ *un triangle* APA′ (fig. 1) *dans lequel l'angle supplémentaire de* A′ *est dans un rapport commensurable constant*

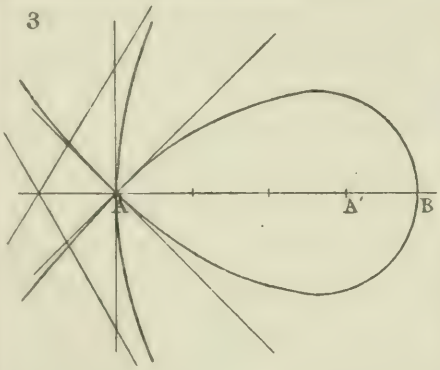
1



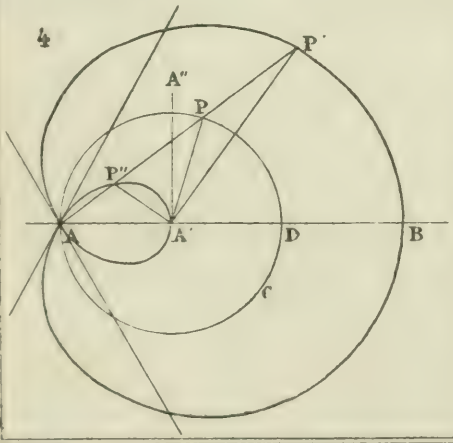
2



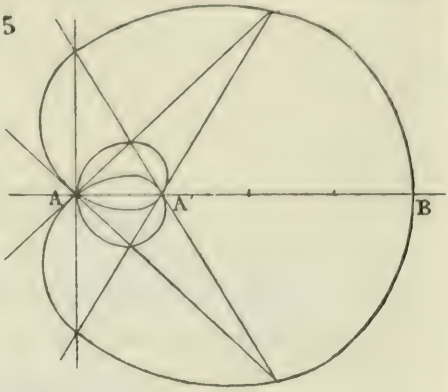
3



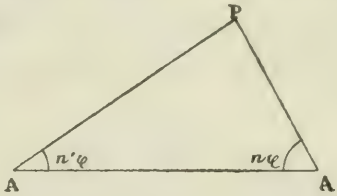
4



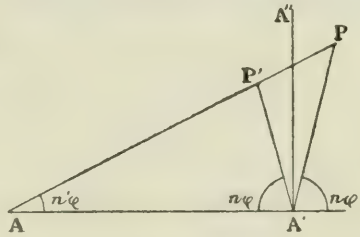
5



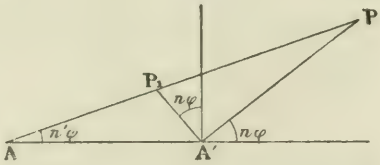
6



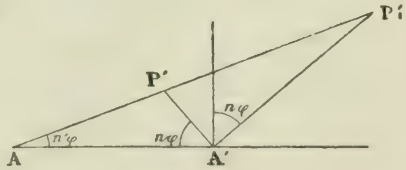
7



8



9



Schoutt

$\frac{n}{n'}$ *à l'angle* A, *est une courbe* $C^{n+n'-1}$ *symétrique par rapport à l'axe* AA', *qui passe* $n-1$ *fois par* A, n' *fois par les points cycliques et* $n'-1$ *fois par* A'. *En ajoutant successivement la base aux* $n-1$ *tangentes de la courbe en* A, *aux* $n'-1$ *tangentes de la courbe en* A' *et aux droites menées par un point quelconque de la base parallèlement aux* $n-n'-1$ *asymptotes réelles de la courbe, on obtient une étoile respectivement à* n, *à* n' *et à* $n-n'$ *rayons. Enfin, en chacun des points cycliques, les* n' *tangentes coïncident avec la droite qui joint ce point au point* A' *et sur chacune de ces tangentes ce point cyclique compte pour* n *des points d'intersection de la tangente et de la courbe.*

Au fond, ce théorème n'est qu'une conséquence immédiate des résultats généraux qui se rapportent au premier cas des étoiles tournantes dans le même sens. Et la symétrie de la courbe par rapport à la base AA', qui dans cet énoncé est un point nouveau, se démontre en observant que la relation $n\varphi - n'\psi \equiv 0 \pmod{\pi}$ entre φ (l'angle A du triangle) et ψ (le supplément de l'angle A' du triangle) ne change pas, quand on y remplace en même temps φ par $\pi - \varphi$ et ψ par $\pi - \psi$.

La base AA' coupe la courbe $C^{n+n'-1}$, hors des points A et A', en un seul point B, dont la position se trouve sans peine. En effet, si l'angle A et le supplément de l'angle A' sont nuls, auquel cas les trois côtés du triangle AA'P coïncident avec la base, la relation générale $\frac{AP}{A'P} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$ se change en $\frac{AB}{A'B} = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{n}{n'}$. On a donc $\frac{AB}{n} = \frac{A'B}{n'} = \frac{AA'}{n-n'}$, etc.

Suivant la propriété génératrice des courbes $C^{n+n'-1}$, dont il est question dans l'article présent, je les désigne sous le nom général de COURBES SECTRICES. Comme elles n'admettent d'autres points multiples que A, A' et les points cycliques, leur genre est représenté par l'expression $\frac{(n+n'-2)(n+n'-3)}{2}$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n'-1)(n'-2)}{2} - n'(n'-1), \text{ qui}$$

se réduit à $(n' - 1)(n - n' - 1)$. Donc, les courbes sectrices sont unicursales : 1° si $n' = 1$, 2° si $n' = n - 1$; c'est pourquoi je vais examiner de plus près ces deux cas particuliers.

(A suivre.)

SUR LES COURBES PARALLÈLES

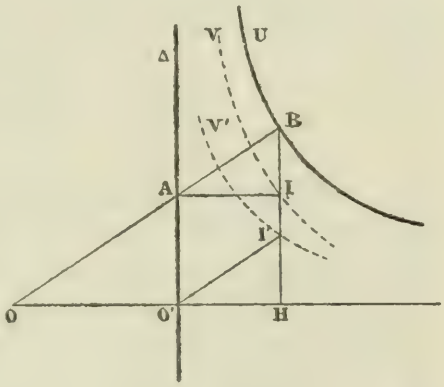
ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 176.)

La courbe d'Agnesi et la serpentine.

12. — Considérons maintenant une figure fixe constituée par un point O, une droite Δ, et une courbe quelconque U. Menons par O une transversale OAB, puis traçons par B une parallèle et par A une perpendiculaire à Δ ; ces deux droites se coupent en un point I qui décrit une courbe V, quand OAB tourne autour de O.



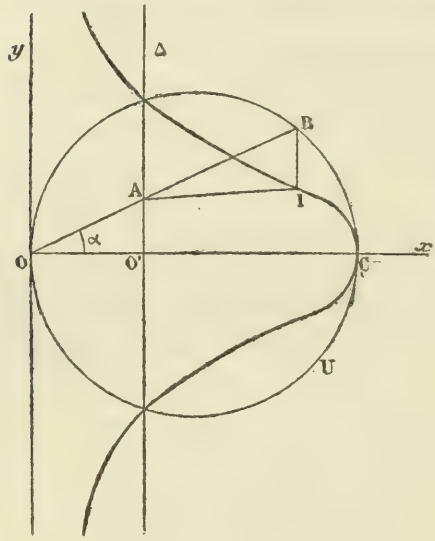
La construction de la tangente à V, au point I, résulte des considérations que nous avons déjà exposées.

En effet, abaissons de O une perpendiculaire sur A et par le pied O' de cette perpendiculaire traçons une droite O'I' parallèle à AB. Les deux triangles ABI, O'I'H sont égaux; en particulier nous pouvons dire que I'H = BI. Le point I' décrit une certaine courbe V' qui est déduite de U point par point par une construction que nous avons déjà étudiée.

Ainsi du tracé de la tangente à U, nous savons déduire celui de la tangente à V'. D'autre part BI étant égal à I'H nous avons encore montré comment on pouvait construire

la tangente à V connaissant les tangentes aux points correspondants des courbes U et V′. On peut donc considérer comme résolu le problème qui visait la construction de la tangente au lieu décrit par le point I.

13. — Deux courbes intéressantes peuvent être tracées par points et par tangentes au moyen de la génération précédente; nous voulons parler de la courbe d'Agnesi (*) et de la Serpentine.



La courbe d'Agnesi, dont nous parlerons d'abord, peut être envisagée comme formant un cas particulier des cubiques Γ_3 qui réalisent les deux conditions suivantes :

1° *Elles ont un axe de symétrie* Δ;

2° *Elles possèdent un point double rejeté à l'infini dans la direction de cet axe.*

Cherchons d'abord l'équation générale des courbes Γ_3. A cet effet, prenons des axes rectangulaires, Δ étant l'axe Ox. L'équation de Γ_3 étant $f = 0$, on voit d'abord : 1° que f ne doit renfermer x qu'à la première puissance, puisque Γ_3 possède un point double à l'infini dans la direction Ox; 2° que f ne peut avoir aucun terme en y et en y^3, puisque Ox est un axe de symétrie. L'équation de la courbe se réduit donc à la forme

$$f = xy^2 + \alpha y^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

(*) La courbe d'Agnesi se trouve citée dans Houël, *Cours de calcul infinitésimal*, t. II, p. 264; et dans Günther, *Parabolische Logarithmen* 1882, p. 59. M. Schoute, professeur à l'université de Groningue, a indiqué, d'après M. Godefroy, l'élégante construction de la tangente à la courbe d'Agnesi que nous signalons plus loin, dans un mémoire ayant pour titre: *Sur la construction de courbes unicursales par points et par tangentes.*

Maria-Gaetana Agnesi, mathématicienne du XVIII° siècle, est surtout connue par son ouvrage *Inst. anal. ad uso della gioventa italiana* (Milano, 1748).

En prenant maintenant pour axe Oy l'asymptote réelle de la courbe ($x + \alpha = 0$), on obtient pour l'équation réduite des cubiques Γ_3 la forme suivante :

$$xy^2 + mx + n = 0.$$

Voici une génération par points et par tangentes de ces cubiques qui renferment la courbe d'Agnesi comme cas particulier.

14. — Prenons, pour spécifier la courbe U dont nous avons parlé tout à l'heure, un cercle passant par O et dont le centre soit placé sur la perpendiculaire abaissée de O sur Δ.

Ayant choisi les axes qu'indique la figure, si nous posons $OO' = h$, $OC = d$, nous avons

$$y = h \operatorname{tg} \alpha,$$

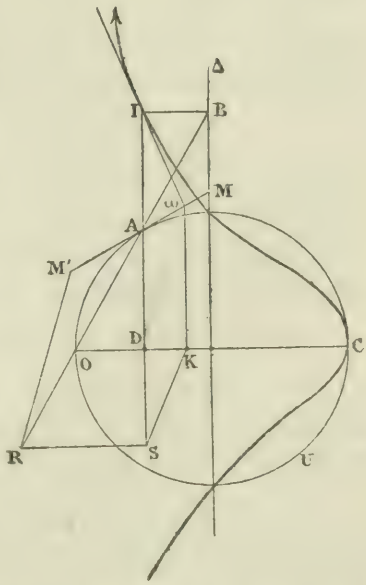
et

$$x = d \cos^2 \alpha.$$

L'équation du lieu décrit par I est donc

$$y^2 x + h^2 (x - d) = 0.$$

A cette équation correspond une courbe affectant la forme générale indiquée par la figure. La tangente, en un point pris sur cette cubique, s'obtient par une construction qui découle des principes généraux que nous avons établis tout à l'heure ; nous allons d'ailleurs effectuer explicitement cette construction sur la courbe d'Agnesi.



15. — La courbe d'Agnesi correspond au cas particulier où la droite Δ passe par le centre de la circonférence génératrice. Soit I un point de cette courbe ; pour obtenir la tangente en ce point la construction est la suivante :

Sur la tangente au cercle U on prend $AM' = AM$, et sur le rayon vecteur $OR = AB$. On joint RM' et on projette R sur l'ordonnée du point A ; par le point S ainsi obtenu on mène SK parallèle à RM', et enfin par K

une parallèle à Δ. Cette parallèle rencontre MM′ en un certain point qui appartient à la tangente cherchée.

La construction indiquée par M. Godefroy *(loc. cit.)* est sensiblement plus simple; M. Godefroy observe que les trois points D, ω, B sont en ligne droite et il détermine ainsi, immédiatement, le point ω. Mais cette remarquable propriété de la courbe d'Agnesi ne s'applique plus aux cubiques plus générales qui correspondent au cas où Δ est une perpendiculaire quelconque au diamètre OC; notre construction s'applique au contraire, sans modification, à toutes ces cubiques.

16. — La serpentine, suivant l'expression qu'a employée Newton, et qui rappelle la forme de cette courbe, est une cubique γ_3 qui jouit des deux propriétés suivantes :

1° *Elle a un centre,*

2° *Elle possède un point double isolé à l'infini.*

Cherchons d'abord l'équation générale des courbes γ_3.

Prenons le centre pour origine; pour axe Oy la droite qui joint le point O au point double situé à l'infini; enfin pour axe Ox l'asymptote réelle de la courbe, droite qui passe nécessairement par le centre.

L'équation de la courbe est évidemment de la forme

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = mx + ny\,;$$

mais, à une valeur donnée pour x ne correspond qu'une seule valeur de y; on a donc $C = 0$ et $D = 0$. De plus $y = 0$ doit être une asymptote; on a donc $A = 0$ et en supposant $B = 1$, l'équation réduite des serpentines est

$$x^2y = mx + ny.$$

Nous supposerons que les axes sont rectangulaires; une projection orthogonale permet d'ailleurs de passer du cas général à celui que nous allons examiner.

17. — Prenons la figure que nous avons considérée au paragraphe précédent, mais avec cette simple modification que Δ, au lieu d'être perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle, soit au contraire parallèle à ce diamètre.

Ayant choisi les axes qu'indique la figure, d désignant le

diamètre du cercle et h la distance OH du pôle à Δ, on a

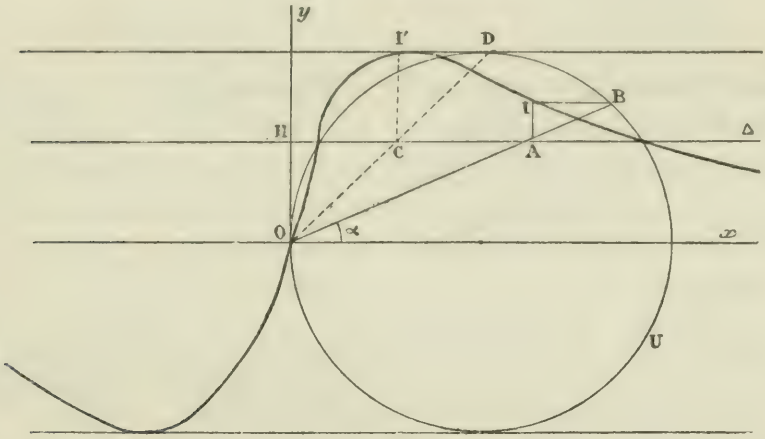
$$x = h \operatorname{cotg} \alpha,$$

et

$$y = d \sin \alpha \cos \alpha.$$

En éliminant α entre ces deux égalités, on a

$$y(x^2 + h^2) = dhx.$$



Le lieu décrit par le point I est donc une serpentine disposée comme le montre la figure. La construction de la tangente en un point de cette courbe est la même que celle que nous avons indiquée pour la courbe d'Agnesi, et c'est justement la généralité de cette construction, en même temps que sa simplicité, qui lui donne peut-être quelque mérite.

(A suivre.)

NOTE DE GÉOMÉTRIE COMPARÉE

Par M. **Henry Bourget,** élève au Lycée de Clermont-Ferrand.

Lorsqu'on étudie la géométrie à deux dimensions, on rencontre dans la théorie de l'ellipse deux cercles, dont les propriétés sont intimement liées à celles de la courbe; on les nomme les deux *cercles principaux* de l'ellipse. Il existe de même, en géométrie à trois dimensions, dans la théorie de l'ellipsoïde, trois sphères dont les propriétés sont intimement liées à celles de la surface; nous les nommerons les trois *sphères principales* de l'ellipsoïde.

Cette note a pour but de démontrer les théorèmes fondamentaux de la théorie de ces sphères. Ces théorèmes sont intéressants en ce qu'ils sont les analogues de théorèmes de la géométrie du plan : c'est pour faire ressortir cette analogie que nous avons mis en regard les propositions de la géométrie à deux et à trois dimensions.

ELLIPSE

Théorème. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* ox, oy *et deux cercles* (C_1), (C_2) *de centre* o *et de rayons* a, b; *on mène par le point* o *un rayon qui coupe* (C_1) *en* A, (C_2) *en* B. *On tire par* A *une droite perpendiculaire à* ox, *par* B *une droite perpendiculaire à* oy. *Ces droites se coupent en un point* M *qui décrit, lorsque le rayon* OAB *varie, l'ellipse* (U), *qui a pour axes* ox, oy *et pour demi-longueurs de ces axes* a, b.

ELLIPSOÏDE

Théorème. — *Étant donnés trois axes rectangulaires* ox, oy, oz *et trois sphères* (C_1), (C_2), (C_3) *de centre* o *et de rayons* a, b, c, *on mène par le point* o *un rayon qui coupe* (C_1) *en* A, (C_2) *en* B, (C_3) *en* C. *On tire par* A *un plan perpendiculaire à* ox, *par* B *un plan perpendiculaire à* oy, *par* C *un plan perpendiculaire à* oz. *Ces trois plans se coupent en un point* M *qui décrit, lorsque le rayon* OABC *varie, l'ellipsoïde* (U) *qui a pour axes* ox, oy, oz *et pour demi-longueurs de ces axes* a, b, c.

Remarque. — Nous ne nous occupons que des points d'intersection avec les cercles et les sphères qui sont situés d'un même côté du point *o*, de façon que le point M, résultant d'un rayon, soit dans le même trièdre des coordonnées que ce rayon.

Prenons comme axes de coordonnées *ox*, *oy*. Si α, β désignent les cosinus directeurs du rayon OAB, les coordonnnées des points A, B seront

Prenons comme axes de coordonnées *ox*, *oy*, *oz*. Si α, β, γ désignent les cosinus directeurs du rayon OABC, les coordonnées des points A, B, C seront :

$$x_1 = a\alpha,\ y_1 = a\beta$$
$$x_2 = b\alpha,\ y_2 = b\beta$$

les perpendiculaires à ox, oy menées par A, B ont pour équations :

$$x = a\alpha,\ y = b\beta$$

et on a de plus $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Éliminant α, β entre ces trois équations, on obtient celle du lieu du point M, qui est

$$(U) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

c. q. f. d.

$$x_1 = a\alpha,\ y_1 = a\beta,\ z_1 = a\gamma$$
$$x_2 = b\alpha,\ y_2 = b\beta,\ z_2 = b\gamma$$
$$x_3 = c\alpha,\ y_3 = c\beta,\ z_3 = c\gamma$$

les plans perpendiculaires à ox, oy, oz, menés par A, B, C ont pour équations :

$$x = a\alpha,\ y = b\beta,\ z = c\gamma$$

et on a de plus $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Éliminant α, β, γ entre ces quatre équations, on obtient celle du lieu du point M, qui est

$$(U) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

c. q. f. d.

Ces théorèmes nous donnent immédiatement les solutions des problèmes suivants :

Problème I. — *Étant données les coordonnées des points* A, B, *trouver les coordonnées du point correspondant* M *de l'ellipse* (U).

Problème II. — *Étant données les coordonnées du point* M *de l'ellipse* (U), *trouver les coordonnées des points* A, B *situés sur le rayon correspondant.*

Problème I. — *Étant données les coordonnées des points* A, B, C, *trouver les coordonnées du point correspondant* M *de l'ellipsoïde* (U).

Problème II. — *Étant données les coordonnées du point* M, *de l'ellipsoïde* (U), *trouver les coordonnées des points* A, B, C *situés sur le rayon correspondant.*

Nous avons ainsi une génération ponctuelle de l'ellipse et de l'ellipsoïde. Les théorèmes qui suivent vont nous donner une génération tangentielle de cette ligne et de cette surface.

Théorème. — *Étant donné un des rayons* OAB, *si on mène en* A *la tangente en* (C_1) *qui coupe* ox *en* T_1, *en* B *la*

Théorème. — *Étant donné un des rayons* OABC, *si on mène en* A *le plan tangent à* (C_1) *qui coupe* ox *en* T_1, *en* B

tangente en (C_2), *qui coupe* oy *en* T_2; *la droite* T_1T_2 *sera la tangente à l'ellipse* (U) *au point* M *correspondant au rayon donné ; c'est-à-dire que* OAB *variant, la droite* T_1T_2 *enveloppe l'ellipse* (U).

Les coordonnées des points A, B étant,

$$x_1 = a\alpha,\ y_1 = a\beta$$
$$x_2 = b\alpha,\ y_2 = b\beta$$

les tangentes en ces points aux cercles (C_1), (C_2) ont pour équations

$$\alpha x + \beta y - a = 0$$
$$\alpha x + \beta y - b = 0$$

les points où elles coupent ox, oy, ont pour coordonnées

$$x = \frac{a}{\alpha},\quad y = 0$$

$$x = 0,\quad y = \frac{b}{\beta}$$

la droite passant par ces deux points est

$$\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire, précisément l'équation de la tangente à l'ellipse (U) au point de coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, c'est-à-dire au point M.

c. q. f. d.

le plan tangent à (C_2) *qui coupe* oy *en* T_2, *en* C *le plan tangent à* (C_3) *qui coupe* oz *en* T_3 ; *le plan* $T_1T_2T_3$ *sera le plan tangent à l'ellipsoïde* (U) *au point* M *correspondant au rayon donné ; c'est-à-dire que* OABC *variant, le plan* $T_1T_2T_3$ *enveloppe l'ellipsoïde* (U).

Les coordonnées des points A, B, C étant,

$$x_1 = a\alpha\ y_1,\ = a\beta,\ z_1 = a\gamma$$
$$x_2 = b\alpha\ y_2,\ = b\beta,\ z_2 = b\gamma$$
$$x_3 = c\alpha\ y_3,\ = c\beta,\ z_3 = \gamma c$$

les plants tangents en ces points aux sphères (C_1), (C_2), (C_3) ont pour équations.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - a = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z - b = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma z - c = 0$$

les points où elles coupent ox, oy, oz ont pour coordonnées

$$x = \frac{a}{\alpha},\quad y = 0,\quad z = 0$$

$$x = 0,\quad y = \frac{b}{\beta},\quad z = 0$$

$$x = 0,\quad y = 0.\quad z = \frac{c}{\gamma}$$

le plan passant par ces trois points est

$$\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} + \frac{\gamma z}{c} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire, précisément l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde (U) au point de coordonnées $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, c'est-à-dire au point M. *c. q. f. d.*

Nous avons donc des définitions ponctuelles et tangentielles de l'ellipsoïde entièrement analogues aux définitions connues de l'ellipse. De même que de ces dernières nous tirons facilement la construction géométrique des éléments de l'ellipse; nous déduirons de ces définitions la construction géométrique des éléments de l'ellipsoïde. Remarquons qu'il importe de ne pas séparer les deux cercles principaux, on trouve mieux ainsi les théorèmes analogues dans la géométrie à trois dimensions. Pour finir, remarquons encore que cette note explique la notation $a \cos \varphi$, $b \cos \chi$, $c \cos \psi$ que l'on emploie dans la théorie de l'ellipsoïde pour désigner les coordonnées d'un point de cette surface; φ, χ, ψ ne sont rien autre chose que les angles du rayon OABC avec les axes de coordonnées.

SUR UNE TRANSFORMATION POLAIRE

DES COURBES ET DES SURFACES

Par **H. Le Pont.**

1. — On appelle *transformations polaires* ou encore *transformations centrales*, les transformations définies de la manière suivante :

Soit un point fixe O que nous appellerons pôle et que nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires. Joignons ce point à un point M (XYZ) de l'espace et sur le rayon vecteur OM prenons un troisième point m (xyz) tel que

$$f(\mathrm{OM}, \mathrm{O}m) = 0.$$

Cette équation est dite équation caractéristique de la transformation; les constantes qu'elle renferme en sont les modules.

La transformation polaire est linéaire lorsque son équation caractéristique est du premier degré par rapport à chacune des variables $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ et $\mathrm{O}m = r$.

Plusieurs transformations polaires linéaires ont fait l'objet de nombreux travaux (*).

(*) Voyez, entre autres (*Mathésis*, t. IV, p. 74, 1882), une note de M. Maurice d'Ocagne, sur ce même sujet.

Les conchoïdes des courbes et des surfaces, par exemple, ne sont que les transformées polaires de ces courbes et de ces surfaces, l'équation caractéristique de la transformation étant

$$R \pm r = 2C.$$

Si nous considérons l'équation caractéristique

$$Rr = C,$$

nous retrouvons la transformation par rayons vecteurs réciproques. Notons, en passant, que, avec l'homothétie définie par la formule $R = Kr$, cette transformation est la seule des transformations polaires linéaires qui soit isogonale. Prenons, en effet, deux points infiniment voisins M (R) et M′ (R + dR), et leurs points correspondants $m(r)$ et m' $(r + dr)$; λ, μ, ν et $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$ étant les angles qui font avec les axes de coordonnées les rayons mM et m'M′ ; la condition pour que la transformation soit isogonale est que l'on ait

$$2\left(\frac{R}{dR} \pm \frac{r}{dr}\right)(\sin\lambda \cos\lambda d\lambda + \sin\mu \cos \mu d\mu + \sin\nu \cos \nu d\nu)$$
$$= \left[\left(\frac{R}{dR}\right)^2 - \left(\frac{r}{dr}\right)^2\right][\sin^2\lambda\,(d\lambda)^2 + \sin^2 \mu(d\mu)^2 + \sin^2 \nu(d\nu)^2]$$

quels que soient λ, μ, ν, ce qui exige que

$$\frac{dR}{R} \pm \frac{dr}{r} = 0,$$

c'est-à-dire

$$Rr = \text{const, ou } R = Kr\,;$$

la première formule correspond aux figures inverses, la seconde aux figures homothétiques.

2. — La transformation que nous nous proposons d'étudier aujourd'hui, est définie par la formule

$$\frac{c}{r} + \frac{C}{R} = 1.$$

C'est, comme on le voit, une généralisation de la transformation homologique due à Poncelet et dont l'équation caractéristique est

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{R} = \frac{2}{k}.$$

Ces deux transformations sont des transformations dou-

bles, c'est-à-dire que, à chaque point donné M d'une figure, correspondent deux points m dans la figure transformée.

Les formules de transformation sont

$$x = \frac{cX}{R - C} \quad y = \frac{cY}{R - C} \quad z = \frac{cZ}{R - C} \quad r = \frac{cR}{R - C}, \quad (f)$$

$$X = \frac{Cx}{r - c} \quad Y = \frac{Cy}{r - c} \quad Z = \frac{Cz}{r - c} \quad R = \frac{Cr}{r - c}. \quad (F)$$

Les dernières formules donnent immédiatement la construction des points correspondants d'un point quelconque de l'espace.

Nous prendrons toujours comme point donné un point (X, Y, Z), c'est-à-dire que nous emploierons toujours dans la transformation les formules (F).

Nous obtenons immédiatement les théorèmes suivants :

1° La transformée d'une surface d'ordre n est une surface d'ordre $2n$.

2° La transformée d'un plan est une surface de révolution du second ordre ayant pour foyer l'origine et pour plan directeur un plan parallèle au plan considéré. En désignant par D la distance du pôle à ce plan, la distance du pôle au plan directeur de la surface transformée est $-\frac{c}{C}$ D. Lorsque D est plus grand en valeur absolue que C, la surface est un ellipsoïde ; lorsque D est plus petit que C en valeur absolue, la surface est hyperboloïde à deux nappes. Enfin, lorsque le plan est tangent à la sphère décrite du pôle comme centre avec C pour rayon, la transformée est un paraboloïde dont le plan directeur est tangent à la sphère décrite du pôle comme centre avec un rayon égal à c.

Les transformées de deux plans quelconques sont des surfaces de révolution de même foyer et dont les plans directeurs font entre eux l'angle des deux plans. Tout plan passant par le pôle se transforme en lui-même.

3° Une droite quelconque a pour transformée une conique ayant pour foyer le pôle et pour directrice la parallèle menée à cette droite dans le plan qu'elle détermine avec le pôle. La distance de l'origine à la directrice est $-\frac{c}{C}$ D, en désignant par D la distance de l'origine à la droite considérée.

Les directrices de deux coniques confocales transformées de deux droites font entre elles l'angle de ces deux droites.

Toute droite passant par le pôle se transforme en elle-même.

4° Toute sphère ayant pour centre le pôle se transforme en une sphère concentrique.

La sphère décrite du pôle comme centre avec $(C + c)$ pour rayon, se transforme en elle-même. Nous l'appellerons sphère principale.

La sphère principale jouit en outre de cette propriété remarquable : le rapport anharmonique du système formé par le pôle, un point quelconque de l'espace, un des points correspondants à ce point et un des points d'intersection du rayon vecteur avec la sphère principale, est constant et égal à $-\frac{C}{c}$. *(A suivre.)*

ÉCOLE NORMALE (CONCOURS DE 1885)

Représenter la partie solide d'une sphère extérieure à un cône de révolution (*).

La sphère a pour centre le point (O, O')

$$x = 0,\ y = 10,\ z = 10 \text{ centimètres},$$

elle passe par le sommet du cône (S, S')

$$x = 0,\ y = 16,\ z = 16 \text{ centimètres}.$$

L'axe du cône passe par le point

$$x = 0,\ y = 10,\ z = 22;$$

Ses génératrices font avec l'axe un angle de 45°.

Méthode. — Changement de plan ou rotation, ayant pour but de prendre le plan de profil OO' SS' comme plan de projection, en profitant du fait que ce plan de profil est un plan de symétrie.

Dans le nouveau système, on emploiera comme surfaces auxiliaires des sphères ayant pour centre un point quelconque de l'axe du cône. De préférence, on prendra des sphères inscrites dans le cône.

(*) On prendra comme ligne de terre le petit axe de la feuille.

Propriétés. — La projection auxiliaire de la courbe est une parabole ayant précisément son sommet au sommet du cône, et dont on trouve immédiatement deux points à l'intersection des contours apparents dans le nouveau système.

Si l'on effectuait un deuxième changement de plan horizontal, en prenant comme nouvelle ligne de terre une perpendiculaire sur l'axe du cône, la projection horizontale nouvelle de la courbe serait une circonférence, grâce à l'existence d'un cylindre de révolution parallèle à l'axe du cône et passant par l'intersection.

Le sommet du cône est un point double dans l'espace, les tangentes étant les génératrices d'intersection du cône avec le plan tangent à la sphère. En projection, mais pas dans l'espace, ces tangentes passent comme vérification par les points le plus à droite et le plus à gauche des contours apparents de la sphère.

Les projections du sommet du cône sont de plus des points doubles en projection à cause de l'existence d'une génératrice verticale et d'une génératrice debout sur le cône.

Il résulte de là que les projections du sommet du cône sont des points triples, en projection, la troisième tangente étant parallèle à la ligne de terre.

Étant donnée une surface de révolution et une sphère, les sphères limites permettent de mener à la projection de la courbe sur le plan de symétrie une tangente parallèle à une direction donnée. De cette remarque on déduit les tangentes horizontales ainsi que les tangentes de front.

Par exemple, pour trouver le point le plus haut, il suffit d'employer, comme sphère auxiliaire, la sphère inscrite dans le cône ayant pour centre le point donné $x = 0$, $y = 10$, $z = 22$. Cette sphère auxiliaire coupera la sphère donnée suivant une parallèle tangente à la courbe.

Nous avons dit qu'il existait un cylindre de révolution passant par l'intersection.

L'étude de ce cylindre permet de trouver le point le plus à droite, et le point le plus à gauche. Nous dirons d'abord que ces points se trouvent sur les contours apparents du cylindre, à une distance de part et d'autre du grand axe de

la feuille égale au rayon du cylindre ou à la moitié du rayon de la sphère.

Si l'on veut de plus trouver exactement ces points, on remarque que les génératrices de contour apparent du cylindre dans le système primitif se projettent dans le système auxiliaire suivant l'axe du cylindre A'_1. Considérons alors dans le système auxiliaire cette droite A'_1 comme un parallèle de la sphère donnée, et faisons passer par ce parallèle une sphère auxiliaire ayant son centre au sommet du cône, elle donnera précisément les points demandés.

Enfin, il reste à observer que les deux projections de l'intersection sont symétriques par rapport à la ligne de terre ; cela résulte de ce que l'intersection est symétrique par rapport au premier plan bissecteur, mais il faut bien faire attention que ce ne sont pas les projections d'un même point qui sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

J. C.

VARIÉTÉS

THÉORIE DES AIRES ET DES VOLUMES

Par M. **A. Calinon**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 181.)

§ V. — *Volumes.*

On sait que, comme le carré, le cube se rattache aux grandeurs de la première famille.

Lorsqu'on prend comme cube-unité le cube dont le côté est l'unité de longueur, le volume du cube a pour mesure la troisième puissance du nombre qui mesure son côté.

Théorème XX. — *Le moment du cube est égal au triple de son volume.*

Théorème XXI. — *Soit une surface fermée quelconque* S, *de moment* μ : *on trace à travers cette surface un réseau de cubes adjacents, égaux, infiniment petits, la somme* V′ *des volumes de tous les cubes compris dans la surface* S *a une limite*

constante V, *quelles que soient la loi de variation et l'orientation des cubes.*

Cette limite constante V est égale à $\frac{\mu}{3}$: V est, par définition, le volume de la surface fermée S.

Théorème XXII. — *Lorsqu'une surface fermée résulte du groupement de plusieurs surfaces fermées partielles, le volume de la surface totale est la somme des volumes des surfaces partielles.*

Théorème XXIII. — *Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

En prenant, en effet, le moment des faces par rapport au sommet, on trouve pour le moment total le produit de la base par la hauteur.; le volume est donc le $\frac{1}{3}$ de ce produit (th. XXI). De même pour le cône.

Théorème XXIV. — *Le volume d'un prisme quelconque est égal au produit de la base* B *par la hauteur* h.

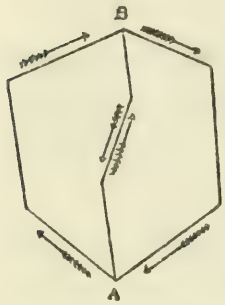
On démontre d'abord ce théorème pour le prisme triangulaire qu'on peut considérer comme un groupement de trois pyramides de base B et de hauteur h; le volume du prisme est alors égal à la somme des volumes de ces trois pyramides (th. XXII); or, ces trois pyramides ont chacune pour volume $\frac{1}{3}$ Bh, le prisme a donc pour volume Bh.

On passe de là au prisme à base polygonale quelconque et au cylindre.

Théorème XXV. — *Le volume d'une sphère est égal au tiers du produit de sa surface* S *par son rayon* R.

Considérons un polyèdre à faces infiniment petites circonscrit à la sphère et décomposons-le en pyramides ayant pour sommet commun le centre de la sphère et pour bases respectives les faces du polyèdre ; toutes ces pyramides ont pour hauteur commune le rayon R et la somme de leurs bases est la surface S′ du polyèdre ; le volume du polyèdre

est donc égal à $\frac{1}{3}RS'$; à la limite, S' devient égal à S (th. XII); on a donc pour le volume de la sphère $\frac{1}{3}R.S$



On voit combien cette méthode nous donne simplement le volume de la pyramide, du prisme et de la sphère. De plus, en suivant cette marche, la théorie des volumes est en quelque sorte calquée sur celle des aires planes.

NOTA. — La figure ci-jointe doit remplacer celle qui, par erreur, a été mise à la page 136 (numéro de juin), figure qui est relative au théorème IV.

QUESTIONS D'EXAMENS

29. — *On considère des coniques* Γ *inscrites dans un rectangle; parallèlement à une direction fixe on mène à ces coniques des tangentes* Δ; *trouver le lieu décrit par le point de contact* I, *de* Δ *avec* Γ.

Si l'on prend pour axes de coordonnées les médianes du rectangle l'équation générale des coniques Γ est (de Longchamps, *Géom. an.*, t. I, p. 353)

$$\frac{x^2}{a^2} + 2\lambda\frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} + \lambda^2 - 1 = 0;$$

mais, dans cette question qui n'exige pas que les axes soient rectangulaires, il vaut mieux observer que les diagonales du rectangle considéré sont deux diamètres conjugués et, dans ce système d'axes, l'équation de Γ est *(loc. cit.)*

$$\frac{x^2}{ta'^2} + \frac{y^2}{b'^2(1-t)} = 1, \qquad (1)$$

t désignant un paramètre variable.

Soient x, y les coordonnées de I; m désignant le coefficient angulaire donné, le diamètre conjugué de cette direction a pour équation

$$\frac{x}{ta'^2} + m\frac{y}{(1-t)b'^2} = 0. \qquad (2)$$

Cette dernière équation donne successivement

$$\frac{\dfrac{x}{a'^2}}{t} = \frac{\dfrac{-my}{b'^2}}{1-t} = \frac{\dfrac{x}{a'^2} - \dfrac{my}{b'^2}}{1},$$

et

$$\frac{\dfrac{x^2}{ta'^2}}{x} = \frac{\dfrac{-y^2}{b'^2(1-t)}}{\dfrac{y}{m}} = \frac{1}{x - \dfrac{y}{m}}.$$

L'équation du lieu est donc

$$\left(x - \frac{y}{m}\right)\left(\frac{x}{a'^2} - \frac{my}{b'^2}\right) = 1. \qquad (3)$$

Cette équation représente une hyperbole H passant par les sommets du rectangle proposé, points que l'on prévoit *à priori;* de plus, ses asymptotes sont en évidence, d'après (3). La courbe cherchée se trouve, par cette remarque, bien déterminée. On peut distinguer sur H les points qui proviennent des ellipses ou des hyperboles du réseau.

Remarque. — Si l'on demandait le lieu des sommets ou le lieu des foyers des coniques Γ, l'équation (1) devrait être préférée à l'équation (2). Le lieu des sommets est une quartique Q ayant pour équation

$$y^4 - x^4 - b^2y^2 + a^2x^2 = 0;$$

Q se compose : 1° d'un double folium en forme de 8, 2° de deux branches hyperboliques asymptotes aux bissectrices et présentant une sinuosité dans la partie qui pénètre dans l'intérieur du rectangle.

Le lieu du foyer F est une hyperbole équilatère. On obtient son équation

$$y^2 - x^2 = b^2 - a^2,$$

soit en exprimant que la projection de F sur deux côtés adjacents du rectangle donne deux points M, M′ à la même distance du centre O ; soit en écrivant que les tangentes issues de F sont parallèles aux directions isotropes du plan.

QUESTIONS PROPOSÉES

174. — On considère un cercle Δ, du centre O rapporté à deux diamètres rectangulaires.

Sur OX, on prend un point fixe P; et, par P on mène une transversale mobile qui coupe Δ aux points A et B. On propose de trouver le lieu décrit par le point I, centre des hauteurs du triangle AOB.

Ce lieu est une cubique Γ, unicursale, passant par les ombilics du plan.

En posant $OP = d$, et en désignant par R le rayon de Δ, on examinera les deux cas particuliers suivants :

$$1^\circ \quad d = R,$$

$$2^\circ \quad d = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

On trouve, dans le premier cas, une strophoïde et, dans le second cas, une cissoïde. Expliquer ces résultats par des considérations géométriques.

Revenant au cas général et observant que I et le pôle de AB sont deux points symétriques par rapport à AB, on propose de construire la tangente à Γ, au point I, en s'appuyant sur les propriétés des transversales réciproques. *(G. L.)*

175. — On donne une conique T et un point fixe P : trouver le lieu décrit par le sommet A d'un triangle ABC circonscrit à T, sachant que les droites qui joignent les points A, B, C aux points de contact des côtés opposés concourent en P. *(W.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19452-5.

SUR LES POINTS ASSOCIÉS DU PLAN D'UN TRIANGLE ABC

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 193.)

Théorème III. — *Si par un point* O *je mène les antiparallèles aux trois côtés d'un triangle et que j'appelle :* ξ *la longueur de la partie de* BC *comprise entre les deux antiparallèles à* AC *et à* AB, η *la longueur de la partie de* CA *comprise entre les deux antiparallèles à* BA *et à* BC, ζ *la longueur de la partie de* AB *comprise entre les deux antiparallèles à* CB *et à* CA ;

Et que je considère les points associés O_a, *etc., et les valeurs correspondantes* ξ_a, η_a, ζ_a, *etc., on aura, en valeur absolue :*

$$\frac{\xi}{\xi_a} = \frac{\eta}{\eta_a} = \frac{\zeta}{\zeta_a}.$$

Observons que, pour le point dont les coordonnées homogènes sont tg A, tg B, tg C et pour ses associés, ces longueurs sont égales entre elles. (Voir Lemoine, *Bulletin de la Soc. math. de France*, p. 76, 1884.)

Théorème IV. — En appelant, avec M. de Longchamps, *points réciproques* deux points O et O′ tels que les droites qui joignent ces points à un sommet du triangle coupent le côté opposé à ce sommet en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté, on a la proposition suivante :

Si O *et* O′ *sont deux points réciproques, les associés* O_a, O_b, O_c *de* O *et les associés* O'_a, O'_b, O'_c *de* O′, *sont réciproques deux à deux.*

Théorème V. — *Si* α, β, γ *représentent les distances d'un point* O *aux trois côtés du triangle et que l'on cherche le point tel que* $M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 + P^2\gamma^2$ *soit un minimum* (M^2, N^2, P^2 *étant des quantités données), on trouve un point* O *dont les coordonnées*

homogènes sont :

$$\frac{a}{M^2}, \frac{b}{N^2}, \frac{c}{P^2}.$$

Si $M^2\alpha^2 + N^2\beta^2 - P^2\gamma^2$ *est susceptible d'un minimum, ce qui arrivera lorsque l'on aura*

$$\frac{a^2}{M^2} + \frac{b^2}{N^2} - \frac{c^2}{P^2} < 0,$$

ce minimum aura lieu pour O_c *associé de* O.

Théorème VI. — *Si deux points* O *et* O′ *sont conjugués isogonaux* (c'est-à-dire sont les deux foyers d'une même conique inscrite à ABC, voir J. Neuberg, *Mémoire sur le Tétraèdre ;* t.XXXVII des Mémoires couronnés par l'Académie de Belgique), *les points associés* O_a, O'_a ; O_b; O'_b; O_c O'_c, *sont deux à deux conjugués isogonaux* (*).

De la définition même des points associés il résulte que si O décrit une droite, une conique, une courbe de degré n, les points associés O_a, O_b, O_c décriront chacun une droite, une conique, une courbe de degré n ; que si O parcourt une droite K qui enveloppe une courbe N de degré n, O_a, O_b, O_c parcourront des droites K_a, K_b, K_c qui engendrent des courbes N_a, N_b, N_c de degré n ; que si O est le point de contact de N avec K, O_a, O_b, O_c seront respectivement les points de contact de N_a, N_b, N_c avec K_a, K_b, K_c.

Si l'équation de la courbe que décrit le point O est $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, celle de la courbe décrite par O_a sera $\varphi(-\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Il y a donc là un cas particulier intéressant à étudier, des transformations homographiques.

Connaissant la tangente au point O *de la courbe décrite par* O, *trouver la tangente à la courbe décrite par le point associé,* O_c *par exemple.*

On démontre facilement la construction suivante;

La tangente en O à la courbe décrite par O coupe AB en J; la droite JO_c est la tangente en O_c à la courbe lieu de O_c.

(A suivre.)

(*) Les points conjugués isogonaux de M. Neuberg sont aussi les points que M. Mathieu a étudiés autrefois (Nouv. an. 1865) et qu'il a nommés *points inverses.* G. L.

SUR LES COURBES SECTRICES (*)

Par M. **Schoute**, professeur à l'Université de Groningue.

(*Suite*, voir p. 196.)

4. — Cas $n' = 1$.

Dans ce cas, les courbes sectrices d'ordre n se rapportent à la division de l'angle en un nombre entier n de parties égales ; elles sont donc les courbes sectrices par excellence.

Chacune des courbes sectrices C^n est déterminée par son point multiple A, l'étoile mutilée de n rayons des $n - 1$ tangentes en ce point, l'étoile mutilée de $n - 1$ rayons des $n - 2$ droites menées par A parallèlement aux asymptotes, les deux points cycliques et le point simple B situé sur le rayon manquant des deux étoiles. Car le nombre des points simples équivalents aux points énumérés est exprimé par $\frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + (n-2) + 2 + 1$ ou $\frac{n(n+3)}{2}$. Donc la courbe déterminée par les points énumérés est nécessairement une courbe sectrice, dont AB est un axe de symétrie, et l'on trouve sans peine le point A′ qui entre dans sa génération en courbe sectrice.

Le point multiple A de l'ordre $n - 1$ comptant pour $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles ordinaires de la courbe C^n, cette courbe est de la classe $n(n-1) - (n-1)(n-2)$ ou $2(n-1)$, comme d'ailleurs toute courbe unicursale d'ordre n, qui n'a point de points multiples à tangentes coïncidentes. Par chacun des points cycliques passent donc $2(n-1)$ tangentes de la courbe. Mais la droite qui joint le point A′ à un des points cycliques coupant la courbe en n points, qui coïncident avec ce point, cette droite compte pour n des $2(n-1)$ tangentes en ce point. Donc le point A′ est un foyer principal multiple de l'ordre n de la courbe sectrice. En

(*) Pour les figures citées dans cet article le lecteur est prié de se reporter à la planche publiée dans le numéro précédent, p. 197.

outre, cette courbe admet $n - 2$ foyers simples qui se rangent en couples symétriques par rapport à AA′, du moins s'ils ne se trouvent pas sur cette droite.

L'application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance $\overline{AB}^2$ sur la courbe sectrice, déterminée comme je l'ai indiqué, n'offre pas de difficulté. On obtient une courbe C^{n-1} passant par B, dont A est un point multiple de l'ordre $n - 2$ et AB un axe de symétrie. Cette courbe ne passe plus par les points cycliques. L'étoile mutilée des droites passant par A, qui indiquent les directions asymptotiques de C^n, est l'étoile mutilée des tangentes en A à la transformée C^{n-1}; et, réciproquement, l'étoile mutilée des tangentes en A à C^n, est l'étoile mutilée des droites passant par A, qui indiquent les directions asymptotiques de C^{n-1}. Enfin la courbe C^{n-1} a un foyer multiple de l'ordre $n - 2$, savoir le point qui correspond au point A′, et $n - 2$ foyers simples, qui sont les points correspondant aux foyers simples de C^n.

L'hypothèse $n = 1$ donne la droite de l'infini ; l'hypothèse $n = 2$ conduit à une courbe sectrice, qui mérite le nom de *courbe bissectrice* et qui est la circonférence de cercle dont A est le centre et AA′ le rayon. Je commence donc l'étude des cas particuliers par la supposition $n = 3$. L'application des résultats généraux à ce cas particulier fait trouver pour la *courbe trisectrice*, ou plus simplement la *trisectrice* tout court, la cubique circulaire à point double A, qui est tout à fait déterminée par les conditions suivantes : il faut qu'elle soit symétrique par rapport à la droite AA′ et que ses tangentes au point double A forment, de part et d'autre, des angles de 60° avec cet axe de symétrie. Cette courbe qui coupe perpendiculairement l'axe de symétrie en un point B, qui est le point symétrique du milieu de AA′ par rapport à A′, doit posséder trois points d'inflexion, parce qu'elle a un point double. Ces trois points d'inflexion, ce sont les points cycliques et le point commun à toutes les perpendiculaires sur AA′. Car suivant le résultat général, les trois points d'intersection de la trisectrice avec sa tangente en chacun des points cycliques coïncident avec le point cyclique correspondant. Et le seul point symétrique de lui-même par

rapport à l'axe AA', qui ne se trouve pas sur cet axe, est point d'inflexion par raison de symétrie. D'ailleurs, les trois points d'inflexion sont situés sur une droite, etc.

Comme je l'ai indiqué ailleurs (*), la trisectrice a été déduite du cercle par M. Godefroy au moyen de la transformation dite de Maclaurin. C'est à cet architecte qu'elle doit son nom de trisectrice et que je dois la démonstration analytique de sa propriété sectrice en partant de sa déduction du cercle. Dans ce petit travail je remplacerai cette démonstration analytique par la démonstration géométrique suivante :

Dans le cas particulier de la transformation de Maclaurin, dont l'application à un cercle C *(fig. 2)* mène à une trisectrice, on fixe un point O sur la circonférence et l'on trouve le point de la trisectrice qui correspond à un point quelconque P de C comme étant le point d'intersection P' de la perpendiculaire PQ abaissée de P sur le diamètre OB du point fixe O et de la droite AP' menée parallèlement au rayon vecteur OP de P, par le milieu A du rayon OM. Mais quand MA' est égal à AM et que la perpendiculaire en M sur OB coupe AP' en D, on a A'D = A'P'. Car, si E est le point de OP qui se projette en A sur OB, on trouve DM = EA = PP', ce qui prouve que le quadrilatère MDPP' est un parallélogramme. Et, dans ce cas, la perpendiculaire sur DP' en son point milieu N, droite qui est parallèle à PB, passe par le milieu A' de MB, parce que le milieu N de DP' est en même temps le milieu de MP. Donc A'P' = A'D = AD, d'où l'on déduit immédiatement que l'angle P'A'B est égal à trois fois l'angle P'AB (**).

La trisectrice a un foyer triple au point A'. De plus, elle possède un foyer simple situé sur AA'. La position de ce foyer F se trouve géométriquement en appliquant à la tri-

(*) Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes (*Archives Néerlandaises*, t. XX).

(**) Je dois à M. G. de Longchamps la bienveillante communication que la trisectrice a été retrouvée par M. Joao d'Almeida Lima, primeiro tenente de artilheria, dans une étude *Sobre uma curva do terceiro grao*, publiée dans le *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* du Dr F. Gomer Teixeira (Coimbra 1885, vol. VI, n° 1, p. 13).

L'auteur portugais se sert de l'analyse pour parvenir au résultat désiré.

sectrice la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance AB^2, ce qui mène à l'hyperbole dont AB représente, en grandeur et en position, l'axe transverse droite qui fait des angles de 60° avec les asymptotes. En effet, le foyer de l'hyperbole situé du côté de B se transformant en A', l'autre foyer F_h de l'hyperbole se transforme en F: on a donc $FA = 2\,AB$, parce que $F_h A = \frac{1}{2} AB$.

La courbe qu'on obtient dans le cas $n = 4$ est représentée *(fig. 3)*. Je ferai remarquer seulement qu'elle a des singularités d'ordre supérieur, parce que les tangentes aux points cycliques ont un contact du troisième ordre avec la courbe.

5. — Cas $n' = n - 1$.

Dans ce cas les courbes sectrices se rapportent à la division d'un angle en un nombre fractionnel $\frac{n}{n-1}$ de parties, excepté dans la supposition $n = 2$ et $n' = 1$, qui a été examinée dans l'article précédent; donc les courbes sectrices nouvelles du cas qui nous occupe, ne sont que des courbes sectrices impropres.

Les courbes sectrices du nouveau groupe sont de l'ordre $2(n-1)$. Chacune de ces courbes $C^{2(n-1)}$ est déterminée par ses quatre points doubles avec leurs tangentes réelles et son point B. Car en ajoutant une unité à la somme des expressions $\frac{3n(n-1)}{2}$, $n - 1$ et $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 2$ on trouve le nombre $(n-1)(2n+1)$ des conditions smples qui déterminent une courbe de cet ordre. Et la classe des courbes est égale à leur ordre, simplement parce que $2(n-1)(2n-3) - (n-1)(n-2) - 2\{(n-1)(n-2) + (n-2)\} - (n-2)(n-3) = 2(n-1)$. Mais la droite qui joint A' à un des points cycliques comptant pour n des tangentes de la courbe, qui passent par ce point, la courbe admet $n - 2$ tangentes passant par ce point et la touchant ailleurs. Donc chaque courbe sectrice $C^{2(n-1)}$ possède un foyer multiple A' de l'ordre n et $n - 2$ foyers simples situés sur AA' ou symétriquement par rapport à cette droite.

L'application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance AA'^2 mène à une courbe C^{n-1} dont A' est un point multiple d'ordre $n - 2$. Cette courbe C^{n-1} ne passe, non plus, ni par A, ni par les points cycliques. Mais A en est un foyer de l'ordre $n - 2$. Car chacune des deux droites qui joignent le point A à un point cyclique, coupe C^{n-1} en $n - 1$ points coïncidants, parce que les $n - 1$ tangentes de la courbe $C^{(2,n-1)}$, en ce point cyclique, coïncident.

J'étudie maintenant le cas $n = 3$ et je remarque tout de suite que dans ce cas la courbe sectrice, qui mérite le nom de *sesquisectrice*, est une courbe C^4 du quatrième ordre, qui a des points de rebroussement aux points cycliques et un point double au point A ; c'est donc un limaçon de Pascal. Les tangentes à cette courbe *(fig. 4)* au point double A forment des angles de 60° avec l'axe de symétrie AA'B et l'on a AB $= 3AA'$. Le foyer triple A' est le point d'intersection réel des deux tangentes de rebroussement. Et la courbe possède un foyer simple F situé sur AA' à une distance AF de A égale à $\frac{3}{4}$ AA'. Car la transformation par rayons vecteurs réciproques à centre A et à puissance AA'. AB ou $3AA'^2$ donne une hyperbole, dont A' et B sont les sommets réels et dont A est un des foyers. Donc l'autre foyer F_h se trouve à une distance AF_h de A qui est égale à 4AA'. Et dans ce cas la distance du point correspondant F est $\frac{3}{4}$ AA'.

Il est bien simple de déduire la propriété indiquée du limaçon de sa construction connue au moyen d'un cercle C sur les rayons vecteurs AP du point A duquel on prend de part et d'autre du point P des segments égaux PP' et PP''. Car pour le limaçon en question ce segment est égal au rayon du cercle.

On a donc $P'A'B = PAB + A'P'P = PAB + \frac{1}{2} A'PA$ $= \frac{3}{2}$ PAB. Et l'angle P''A'P' étant droit on a encore $P''A'B + \pi = \frac{3}{2}(P''AB + \pi)$, etc.

La courbe qu'on obtient dans le cas $n = 4$ est représentée (*fig.* 5).

(A suivre.)

SUR UNE TRANSFORMATION POLAIRE

DES COURBES ET DES SURFACES

Par M. **H. Le Pont.**

(*Suite*, voir p. 207.)

3. — Ce dernier théorème va nous permettre de construire la tangente au point m d'une courbe plane (γ) transformée d'une courbe plane (Γ) connaissant la tangente à cette courbe (Γ) au point M correspondant au point m.

Soient, en effet, H le point d'intersection de la tangente à (Γ) en M et de la tangente à (γ) en m; h la projection orthogonale du point H sur le rayon vecteur MOm. Au point O, menons la perpendiculaire à ce rayon qui rencontre MH en P et mH en p. Nous aurons, d'après un théorème bien connu,

$$\frac{e}{Op} + \frac{C}{OP} = 0.$$

$$\frac{Op}{OP} = -\frac{c}{C}$$

et par suite

$$\frac{OM}{Om} \times \frac{hm}{hM} = -\frac{C}{c}.$$

Le point m est donc sur la sphère principale.

De là, la construction suivante :

On mène le plan tangent à la sphère principale en un de ses points d'intersection h avec le rayon vecteur OM on joint le point H où ce plan rencontre la tangente en M à la courbe considérée au point m, correspondant aux points M, O et h; la droite mH ainsi obtenue est la tangente en m à la transformée de la courbe.

De même, étant donné le plan tangent en un point M d'une surface, on mène les plans tangents à la sphère principale en ses points d'intersection avec le rayon vecteur OM; le plan tangent à la transformée de la surface en l'un des points correspondants du point M passe par l'intersection du plan tangent en ce point à la surface avec le plan tangent à la sphère principale au point conjugué du pôle, du point M et du point correspondant considéré.

D'après ce qui précède, on obtient immédiatement la tangente à la transformée d'une courbe gauche connaissant la tangente en un point de la courbe.

4. — Toutes les propriétés descriptives d'une figure subsistent dans la transformée, à la condition de remplacer les lignes droites par les arcs de conique correspondants, les portions de plan par les segments de surface correspondants, etc.

Quant aux propriétés métriques, la loi de réciprocité est donnée par la formule

$$\frac{MM'}{mm'} = \frac{C^2}{c^2}\,\frac{\delta}{\Delta}\,\frac{Mh}{hm}\,\frac{h'M'}{h'm'},$$

m et m' étant les points correspondants aux points M et M', Δ et δ les longueurs des perpendiculaires abaissées du pôle sur les droites MM' et mm', h et h' les points d'intersection de la sphère principale avec les rayons Mm et M'm', h et h' étant conjugués des points M, O, m et M', O, m'. Cette formule s'écrira encore

$$\frac{T}{t} = \frac{C^2}{c^2}\,\frac{hM}{hm}\,\frac{h'M'}{h'm'},$$

en appellant T et t les aires des triangles MOM' et mOm', ou encore

$$\frac{T}{t} = \frac{C^2}{c^2}\,\frac{\Theta}{\theta},$$

Θ et θ désignant les aires des triangles formés par l'origine et les points $\frac{R}{C}, \frac{R'}{C}$ et $\frac{r}{c}, \frac{r'}{c}$.

On a donc

$$\frac{hM}{hm}\,\frac{h'M'}{h'm'} = \frac{\Theta}{\theta}.$$

SUR LES COURBES PARALLÈLES

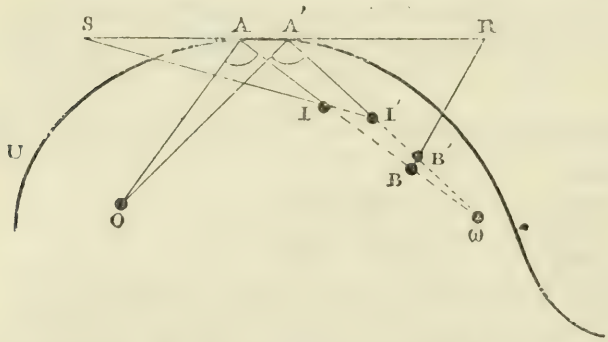
ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

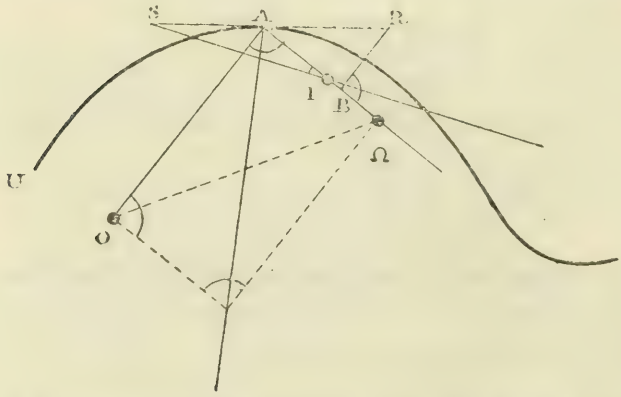
(*Suite*, voir p. 199).

18. — Voici encore une transformation des courbes planes dans laquelle on peut appliquer l'idée des transversales réciproques au tracé des tangentes.

Imaginons une courbe U et un point fixe O; par O, on mène un rayon vecteur OA et sur la droite Aω, perpendiculaire à AO on prend AI = h, h étant constant Le lieu décrit par I est une certaine courbe V et nous nous proposons de tracer la tangente à V, au point I.



A cet effet, prenons un rayon vecteur infiniment voisin OA′ et soit I′ le point correspondant. Les deux droites AI, A′I′ se coupent en un certain point ω; prenons ωB = ωB′ = h. Dans le triangle ωAA′, les deux droites II′, BB′ sont deux transversales réciproques ; elles coupent donc AA′ en deux points R S symétriques par rapport au milieu de AA′.

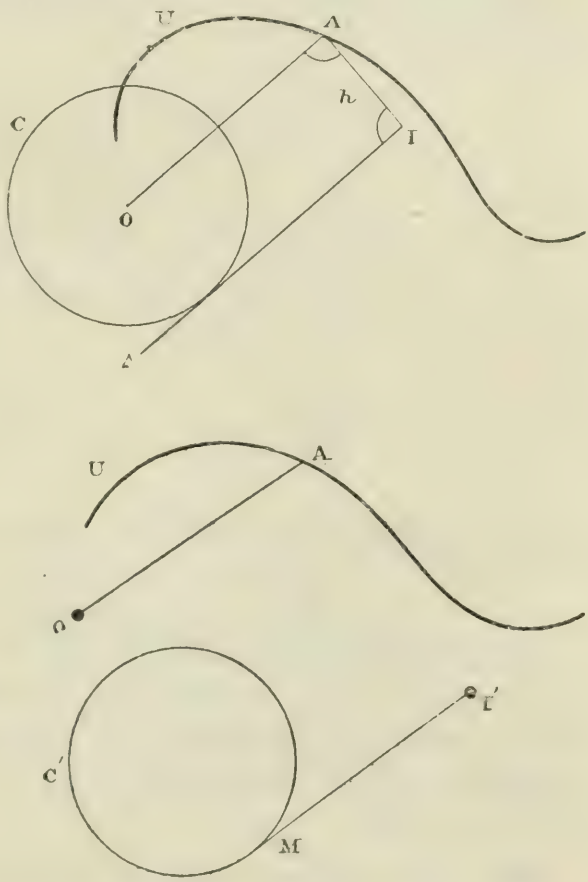


Si nous passons à la limite, la droite II′ devient la tangente

cherchée; le point ω a une position limite Ω facile à déterminer en observant que la perpendiculaire élevée au milieu de AA′ partage Oω en deux parties égales. D'après cette remarque, il suffit de mener, comme l'indique la figure 1, une droite passant par O et partagée en deux parties égales par la normale à U, au point A, et par AI. Ayant pris $\Omega B = h$, on élève BR′ perpendiculaire à AΩ et l'on prend AS′ = BR′; la droite S′I est la tangente demandée.

On voit que la construction indiquée s'applique, avec les modifications convenables, au cas où l'on suppose que l'angle OAI est constant, mais quelconque.

19. — Nous ferons aussi observer que la transformation précédente peut être envisagée à un point de vue différent, en apparence du moins, de celui auquel nous nous sommes placé. Menons, en effet, par I, une droite Δ parallèle à OA; Δ enveloppe un cercle de centre O et de rayon h. On peut d'ailleurs remplacer, pour plus de généralité, le cercle C par un cercle quelconque C′ et transformer la courbe U de la manière suivante: soit O un point fixe, OA un rayon vecteur; au cercle C′, on mène une semi-tangente M′I égale et



parallèle à OA; le lieu du point I′ est une courbe V que l'on peut construire tangente par tangente par le procédé indiqué plus haut.

20. — L'équation générale des courbes V peut s'obtenir très aisément. Soit

$$\rho = f(\omega)$$

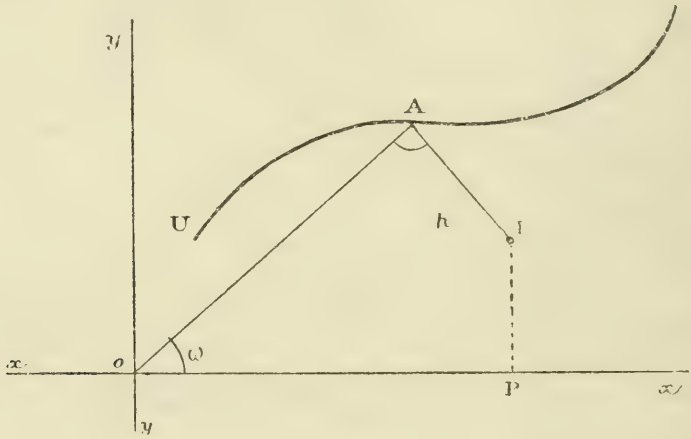
l'équation de U. Désignons par x, y les coordonnées du point I par rapport à deux axes rectangulaires quelconques, passant par le point O. En projetant le contour formé par ces coordonnées, successivement, sur OA et sur OI, nous avons

$$x \cos \omega + y \sin \omega = f(\omega)$$

et

$$x \sin \omega - y \cos \omega = h.$$

On peut résoudre ces deux équations par rapport à x et



à y et construire la courbe V au moyen des relations :

$$x = \sin \omega \,.\, f(\omega) - h \cos \omega,$$
$$y = \cos \omega \,.\, f(\omega) + h \sin \omega.$$

Dans ces formules, ω désigne un paramètre arbitraire.

Lorsque $f(\omega)$ est une fonction rationnelle de $\sin \omega$ et de $\cos \omega$, ces égalités prouvent que la courbe V est unicursale, propriété que la construction proposée pour le point I rend évidente, *a priori*.

21. — Le cas très simple où la courbe V est remplacée par une droite Δ, que l'on peut supposer être parrallèle à ox, donne lieu à un résultat intéressant.

En désignant par h' la distance du point O à Δ, la courbe V est représentée par l'équation

$$x^2 = \frac{(h^2 + h'y - y^2)^2}{(h + h' - y)(h - h' + y)}.$$

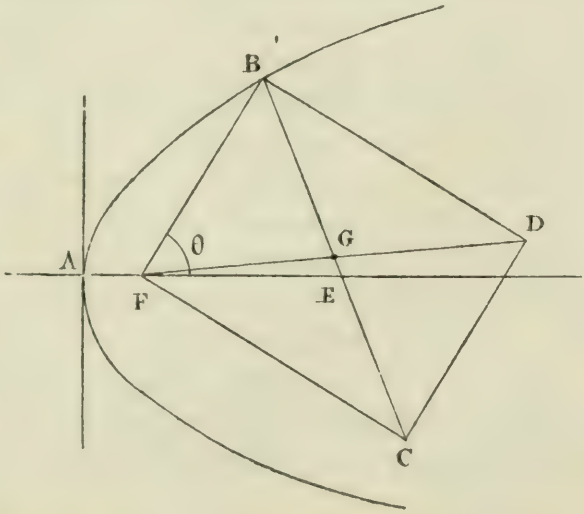
C'est une quartique unicursale ayant deux points doubles situés sur yy' et un troisième point double rejeté à l'infini, dans la direction xx'. L'un des points doubles situés sur yy' est toujours un nœud; l'autre est un point double isolé. La forme de cette courbe est rendue évidente par l'équation précédente et l'on voit qu'elle est constituée par deux branches hyperboliques aplaties de seconde espèce, se croisant sur yy', au nœud que nous avons signalé.

(A suivre.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. CATALAN.

Votre *trisectrice* m'a fait songer à un vieux problème que j'ai resolu, peut-être bien, en 1832. En voici l'énoncé, tel que je le retrouve sur un papier *jauni par l'âge:*



Sur le rayon vecteur FB *d'une parabole, et avec la normale comme diagonale, on construit un rectangle* FBDC. *Trouver le lieu du point* D.

(Il est clair que ce lieu est l'*antipodaire de la parabole*; ce que j'ignorais dans ce temps-là).

1° D'après une propriété connue, le triangle BFE est isoscèle.

Donc $FBE = \frac{1}{2}(\pi - \theta.)$

2° D'après la construction, le triangle BGF est isoscèle. Donc $FB = \theta - \omega$, ω désignant l'angle DFE.

Conséquemment,

$$\pi - \theta = 2(\theta - \omega);$$

puis

$$\theta - \omega = \frac{\pi - \omega}{3},$$

ou

$$BFD = \frac{1}{3} AFD.$$

Connaissez-vous cette propriété *trisectrice* de la parabole?

Nota. — Je répondrai à M. Catalan que je n'ai pas souvenir d'avoir observé l'intéressante propriété qu'il me signale. Mais la lettre de mon maître et vieil ami soulève un exercice qui, au point de vue du calcul, présente quelque intérêt, ainsi que le prouveront, je pense, les développements suivants.

Soit AFD l'angle que nous voulons partager en trois parties égales. Prenons sur FA un point A, arbitrairement; puis, considérons la parabole qui a pour foyer F et pour sommet A. En prenant deux rayons vecteurs tels que FB, infiniment voisins, nous reconnaissons immédiatement que le lieu décrit par le point D se confond avec l'enveloppe des droites BD. Ainsi, et comme le remarque M. Catalan, le lieu du point D est l'antipodaire, ou, comme l'on dit aussi, la première podaire négative de la parabole, par rapport au foyer. On sait que cette courbe est une cubique; proposons-nous d'établir, par le calcul, l'identité de la courbe décrite par le point D avec l'enveloppe des droites BD.

Cherchons d'abord l'enveloppe des droites BD

Puisque

$$FB = \frac{p}{1 - \cos\theta},$$

l'équation de BD est

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{p}{1 - \cos \theta}. \qquad (1)$$

Prenons la dérivée de cette équation, par rapport à θ; nous avons

$$y \cos \theta - x \sin \theta = \frac{-p \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}. \qquad (2)$$

L'enveloppe des droites BD s'obtiendra en éliminant θ entre les équations (1) et (2); mais ce calcul présente certaines difficultés, s'il n'est pas dirigé comme nous allons l'indiquer.

Les équations (1) et (2) permettant d'exprimer x et y en fonction de $\sin \theta$ et de $\cos \theta$, nous reconnaissons ainsi que la courbe cherchée est unicursale. Il est donc naturel d'exprimer les coordonnées d'un point de cette courbe en fonction d'un paramètre variable arbitraire. A cet effet, multiplions (1) et (2) respectivement par $\cos \theta$ et $-\sin \theta$, puis ajoutons, nous avons

$$x = p \frac{1 + 2 \cos \theta}{1 - \cos \theta},$$

ou

$$\cos \theta = \frac{x - p}{2p + x}, \qquad (3)$$

D'autre part, si nous faisons la somme des carrés des égalités (1) et (2), nous obtenons

$$x^2 + y^2 = p^2 \left\{ \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} + \frac{1 + \cos \theta}{(1 - \cos \theta)^3} \right\},$$

ou

$$2p^2 = (x^2 + y^2)(1 - \cos \theta)^3. \qquad (4)$$

Les égalités (3) et (4) donnent, finalement,

$$2\,(2p + x)^3 = 27p\,(x^2 + y^2). \qquad (A)$$

La courbe qui correspond à cette équation est facile à construire en observant que celle-ci peut s'écrire

$$27py^2 = (x - 4p)^2(2x + p).$$

Sous cette forme, on voit que cette équation représente une parabole cubique, à folium, ayant un nœud au point dont les coordonnées sont $(4p, 0)$.

Cherchons maintenant le lieu du point D.

Le triangle rectangle fBD donne

$$fB = fD \cos(\theta - \omega),$$

ou

$$\frac{p}{1 - \cos\theta} = \rho \cos(\theta - \omega).$$

Mais, comme le remarque M. Catalan, le triangle isoscèle fGB donne

$$\theta = \frac{\pi + 2\omega}{3}.$$

Ainsi le lieu du point D, en coordonnées polaires, est représenté par l'équation

$$\frac{p}{\rho} = \cos\frac{\pi - \omega}{3}\left(1 - \cos\frac{\pi + 2\omega}{3}\right). \qquad \text{(B)}$$

Pour montrer l'identité des courbes qui correspondent aux équations (A) et (B), il est naturel de convertir cette dernière en coordonnées cartésiennes. Mais cette transformation exige encore un certain effort de calcul qu'on peut sensiblement abréger en posant

$$\omega + \Omega = \pi.$$

L'équation (B) devient alors

$$\frac{p}{\rho} = \cos\frac{\Omega}{3}\left(1 + \cos\frac{2\Omega}{3}\right)$$

ou

$$\frac{p}{\rho} = 2\cos^3\frac{\Omega}{3}.$$

La relation connue

$$\cos\Omega = 4\cos^3\frac{\Omega}{3} - 3\cos\frac{\Omega}{3}.$$

donne d'abord

$$\cos\Omega = \frac{2p}{\rho} - 3\cos\frac{\Omega}{3},$$

puis, finalement,

$$2(2p + x)^3 = 27\,py^2.$$

Ainsi se trouve établie par l'analyse l'identité des deux lieux géométriques que nous avons considérés et cette cubique, antipodaire de la parabole par rapport au foyer, peut résoudre le problème de la trisection de l'angle, comme l'observe M. Catalan.

En effet, si nous imaginons que cette courbe ait été construite, en plaçant suivant AFD l'angle que l'on veut partager en trois parties égales, le folium de la courbe détermine le point D et le point B s'obtient alors en cherchant l'intersection du cercle décrit sur FD comme diamètre avec la tangente en D à la cubique considérée.

Mais cette construction, qu'il est peut-être possible de simplifier, est moins élégante que celle qui résulte de la trisectrice de Mac-Laurin.

ECOLE POLYTECHNIQUE (*)

CONCOURS DE 1885

Trigonométrie. — On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 46751{,}38;\ b = 58047{,}29;\ c = 37694{,}06.$$

Déterminer les trois angles et la surface en hectares.

Géométrie descriptive. — Un cercle de 0^m10 de diamètre, situé dans le plan de front P, se projette horizontalement sur une parallèle au petit côté et à 0^m11 du bas de la feuille. Son centre se projette verticalement sur la ligne qui divise la feuille en deux parties égales dans le sens de sa longueur, à 0^m28 du bas. On le prend comme cercle générateur de 2 tores pleins ayant pour axes les tangentes à la circonférence en son point le plus à gauche et en son point le plus haut. 1° On tracera complètement l'intersection des deux surfaces, en indiquant les constructions effectuées pour en obtenir un point quelconque et la tangente en ce point. 2° On représentera par ses projections le solide commun aux deux tores en retranchant la partie de ce solide située en arrière d'un plan de front placé lui-même à 0^m02 en arrière du plan P.

Lavis. — Faire à l'encre de Chine et à teintes plates le lavis d'un cylindre terminé par deux demi-sphères.

La surface du solide sera supposée dépolie.

On ne passera pas de teinte sur le fond.

Les traits du cadre et les contours apparents du solide seront passés à l'encre avant de laver.

Le rayon lumineux est le rayon ordinaire à 45°.

(*) Voyez la première question (*Journal*, p. 159).

QUESTIONS D'EXAMENS

30. — *Appliquer l'équation aux carrés des différences à la séparation des racines d'une équation donnée* f (x) = o.

Soit F $(x) = 0$ l'équation aux carrés des différences et soit λ une limite inférieure des racines positives de $F = 0$; la suite

$$0, \quad \sqrt{\lambda}, \quad 2\sqrt{\lambda}, \ldots$$

ne peut pas renfermer deux racines de $f = 0$; cette suite sépare donc les racines de l'équation proposée.

31. — *Construire la courbe* U *qui correspond à l'équation*

$$(y - x^2)^2 = x^7.$$

U se compose de deux bras paraboliques dont la concavité est tournée vers l'axe yy' ; il y a, à l'origine, un point de rebroussement de seconde espèce. Le bras parabolique inférieur avant de couper OX présente un point limite et un point d'inflexion qui sont déterminés respectivement par les équations

$$x^3 = \frac{16}{49}, \quad x^3 = \left(\frac{8}{35}\right)^2.$$

32. — *Exprimer qu'un point* M_0 *est le point de concours de deux tangentes communes à deux coniques données.*

Soient

$$f(x,y,z) = 0, \qquad \varphi(x,y,z) = 0,$$

les équations des deux coniques données ; désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0, les tangentes issues de ce point à la première conique sont représentées par l'équation

$$4f(x,y,z)\, f(x_0,y_0,z_0) - (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0})^2 = 0. \quad (1)$$

De même, l'équation

$$4\varphi(x,y,z)\, \varphi(x_0,y_0,z_0) - (x\varphi'_{x_0} + y\varphi'_{y_0} + z\varphi'_{z_0})^2 = 0, \quad (2)$$

représente les deux tangentes issues de M_0 à la seconde conique.

En identifiant (1) et (2) on a pour déterminer les *deux* inconnues (x_0, y_0) *cinq* relations et on peut se demander d'où provient cette surabondance d'équations.

A cet effet, il faut observer : 1° que les équations (1) et (2) représentent l'une et l'autre un système de deux droites ; 2° que ces coniques applaties ont le même centre, savoir le point M_0.

Dans ces conditions, il suffit d'écrire qu'elles possèdent, en dehors du centre, deux autres points communs, pour qu'elles représentent la même courbe. *Deux* équations suffisent donc pour identifier (1) et (2) ; et l'on voit ainsi, *à priori*, que les *cinq* équations obtenues par identification des égalités (1) et (2) rentrent les unes dans les autres et se réduisent à deux.

33. — *En désignant par* α, β, γ, *les trois racines de l'équation*

$$x^3 + px + q = 0,$$

calculer la quantité U,

$$U = \Sigma\alpha\beta^3.$$

On a, en explicitant U,

$$U = \alpha\beta^3 + \alpha\gamma^3 + \beta\alpha^3 + \beta\gamma^3 + \gamma\alpha^3 + \gamma\beta^3,$$

ou bien

$$U = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4.$$

En observant que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

on trouve

$$U = -\alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$$

ou enfin

$$U = -2p^2.$$

34. — *Vérifier que le terme tout connu de l'équation aux carrés des différences relative à l'équation du quatrième degré, est, négatif : si deux racines de cette dernière équation sont imaginaires, et positif si les quatre racines sont imaginaires.*

Dans le premier cas, les racines peuvent être représentées par a, b, $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$; a, b, α, β étant réels ; dans l'autre cas, par $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$; $\gamma + \delta i$. $\gamma - \delta i$. De cette remarque,

et de la composition connue du dernier terme de l'équation aux carrés des différences, résulte immédiatement la proposition énoncée.

QUESTION 98

Solution par M. Giat, élève en Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, classe de M. Ed. Lucas.

On considère une parabole fixe et un cercle de rayon constant, mais variable de position. On suppose que le cercle se déplace dans le plan sous la condition que dans chacune de ses positions le cercle mobile et la parabole fixeraient un système de tangentes communes rectangulaires. On propose de trouver et d'étudier le lieu que décrit le centre du cercle quand il occupe dans le plan toutes les positions compatibles avec la condition donnée.

(E. B.)

Soient O le pied de la directrice sur l'axe, M le point d'intersection de deux tangentes rectangulaires à la parabole et C le centre du cercle correspondant.

Le point M est sur la directrice et la distance MC est égale à $r\sqrt{2}$, r désignant le rayon du cercle.

Si nous joignons le point M au foyer F de la parabole et si par ce même point nous menons une parallèle MA à l'axe, la droite MC est bissectrice de l'angle FMA.

Ceci posé, prenons pour axes de coordonnées la directrice et l'axe de la parabole. Soient $OM = \lambda$, $\widehat{FMC} = \alpha$ et x, y les coordonnées du point C,

On a

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y-\lambda}{\sin\varphi} = r\sqrt{2}, \qquad (1)$$

et l'angle φ est égal à $\pi - \alpha$.

Mais le triangle rectangle MOF donne

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\lambda}{p}.$$

Donc

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\lambda}{p}. \qquad (2)$$

En éliminant λ et φ entre les équations (1) et (2) nous aurons le lieu du point C. L'équation (2) peut s'écrire

$$2p \sin\varphi \cos\varphi + \lambda(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0,$$

ou, en tenant compte des équations (1),

$$2px(y - \lambda) + \lambda[x^2 - (y - \lambda)^2] = 0.$$

D'où l'on déduit

$$x^2 - (y - \lambda)^2 = -\frac{2px(y - \lambda)}{\lambda}. \qquad (3)$$

D'autre part, les équations (1) donnent

$$x^2 + (y - \lambda)^2 = 2r^2. \qquad (4)$$

D'où, en ajoutant membre à membre,

$$x^2 = r^2 - \frac{px(y - \lambda)}{\lambda}.$$

Ce qui donne

$$\lambda = \frac{pxy}{r^2 - x^2 + px}.$$

En remplaçant λ par cette valeur dans (4) on obtient après simplifications

$$y^2(r^2 - x^2)^2 = (2r^2 - x^2)(r^2 - x^2 + px)^2. \qquad (5)$$

Telle est l'équation du lieu. C'est une courbe du sixième degré symétrique par rapport à l'axe des x et comprise entre les deux droites $x = r\sqrt{2}$, $x = -r\sqrt{2}$.

Asymptotes. — Les droites $r = x$, $r = -x$ sont des asymptotes doubles. En annulant l'ensemble des termes du sixième degré on a

$$x^4(x^2 + y^2) = 0.$$

Donc il n'y a pas d'autres asymptotes réelles.

Points de rencontre de la courbe avec l'axe des x. — 1° Les deux points dont l'ordonnée est nulle et qui ont pour abscisse : $x = r\sqrt{2}$, $x = -r\sqrt{2}$.

2° La valeur de x correspondant aux racines de l'équation (6) $x^2 - px - r^2 = 0$. Ces racines sont réelles, mais pour que les branches de courbe qui passent par ces points soient réelles, il faut qu'elles soient comprises entre $+r\sqrt{2}$ et

$-r\sqrt{2}$. Substituons $r\sqrt{2}$, nous obtenons $r(r-p\sqrt{2})$, En substituant $-r\sqrt{2}$ nous obtenons $r(r+p\sqrt{2})$ qui est positif. En substituant $-r$ on obtient $+pr$ qui est positif. La racine négative de l'équation (6) doit donc être comprise entre $-r$ et o. L'autre est comprise entre $r\sqrt{2}$ et r.

1er Cas. — $r-p\sqrt{2}>0$. — Aux deux racines de l'équation (6) correspondent des branches réelles. Les points obtenus sont des points doubles. La construction de la courbe est facile.

Voici le tableau de la discussion :

$\frac{x}{y^2}$	$-r\sqrt{2}$	$-r$	x_1	r	x_2	$r\sqrt{2}$
	o	∞	o	∞	o	o

2e Cas. — $r=p\sqrt{2}$. — La racine positive de l'équation (6) est égale à $r\sqrt{2}$. On a donc un point de rebroussement au point le plus à droite de la courbe *(fig. 2)*.

3e Cas. — $r<p\sqrt{2}$. — La racine positive de l'équation (6) donne un point double isolé car elle est plus grande que $r\sqrt{2}$.

NOTA. — Cette question a été également résolue par MM. Perin et Marchis.

QUESTIONS PROPOSÉES

176. — Soient AB et A′B′ deux cordes normales à une parabole et rectangulaires. On construit un point M dont les coordonnées sont respectivement égales à AB et A′B′. Trouver le lieu décrit par M quand le point A parcourt la parabole donnée.

Ce lieu est une courbe du huitième ordre, unicursale; elle correspond, en coordonnées polaires à l'équation

$$\rho = \frac{2p}{\sin^2 2\omega};$$

p désignant le paramètre de la parabole. *(G. L.)*

177. — De combien de manières peut-on ranger $2n$ nombres inégaux deux à deux, sur deux lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas?

(Ed. Lucas.)

178. — De combien de manières peut-on ranger $3n$ nombres inégaux deux à deux, sur trois lignes, de telle sorte que les nombres croissent dans chaque ligne de gauche à droite et dans chaque colonne de haut en bas?

(Ed. Lucas.)

179. — On sait que le roi, aux échecs, ne peut se déplacer à chaque coup qu'en occupant l'une des huit cases voisines qui l'entourent; cela posé, démontrer que les nombres des trajets différents que le roi peut effectuer sur un échiquier indéfini, pour se rendre d'une case donnée à une autre case donnée *par le nombre minimum de coups*, sont respectivement égaux aux coefficients du développement des puissances successives du trinôme

$$x^2 + x + 1. \qquad \textit{(Ed. Lucas.)}$$

180. — On donne l'équation d'une surface à laquelle on peut mener K normales d'un point quelconque. Indiquer comment on trouvera le lieu du point M tel que la somme des carrés de ces normales soit égale à l^2.

Si M est un point du lieu et G le centre des moyennes distances des pieds des normales menées du point M, faire voir que la droite MG est normale, au point M, à la surface lieu des points M.

Faire le calcul pour la surface représentée par l'équation

$$y^2 + mz^2 = 2px,$$

et montrer que dans ce cas la surface, lieu des points M, est du second ordre. *(E. Amigues.)*

181. — On considère une ellipse E; par les foyers F, F'

on mène deux rayons vecteurs mobiles, parallèles, et dirigés dans le même sens. Ces droites rencontrent E aux points A, A′; par A on trace une droite perpendiculaire à FA′ et rencontrant celle-ci au point I. Trouver le lieu décrit par ce point distinguer les différentes formes affectées par les courbes, lieu de I.

RECTIFICATIONS

Pages 106 et 107, lisez $\operatorname{tg}\Phi = \dfrac{\sin A \sin B}{\sin C + \sin B \cos A}$ ou $\operatorname{tg}\Phi = \dfrac{\sin B}{2c \quad a \cos B}$.

Pages 106, 107 et 124, les dénominateurs des expressions p_1, p_2, p_3, p_a p_b, p_c doivent être remplacés par a_1^3, b_1^3, c_1^3; a_1, b_1, c_1 désignant les *médianes* du triangle.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 22674-5.

SUR LES POINTS ASSOCIÉS DU PLAN D'UN TRIANGLE ABC

Par M. **Émile Lemoine**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite*, voir p. 217.)

Théorème VII. — *Si l'on considère le cercle de Brocard et les coniques associées, cercle et coniques que nous désignerons par* C, C_a, C_b, C_c; *que l'on appelle* D′ *le pôle de la droite qui joint les points de Brocard par rapport au cercle de Brocard* (le point D′ étudié par ce géomètre a pour coordonnées homogènes a^3, b^3, c^3), D'_a, D'_b, D'_c *les associés de* D′

C *et* C_a *ont pour cordes communes* BC *et* AD'_a
C *et* C_b — — CA *et* BD'_b
C *et* C_c — — AB *et* CD'_c

Le théorème se démontre très simplement en partant de la forme élégante que M. Brocard a donnée à l'équation de son cercle

$$abc(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a^3\beta\gamma + b^3\alpha\gamma + c^3\beta\gamma.$$

Remarque. — Si α, β, γ sont les coordonnées homogènes d'un point o il est facile de voir que l'on a : ABC étant le triangle de référence

$$Co^2 = \frac{a^2b^2}{(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2}(\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos C)$$

$$Co_c^2 = \frac{a^2b^2}{(a\alpha + b\beta - c\gamma)^2}(\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos C).$$

Si le point α, β, γ appartient au lieu défini par l'équation

$$\frac{ab(\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos C)}{(a\alpha + b\beta)^2 - c^2\gamma^2} = \pm K^2$$

qui, CB étant pris pour un des x
CA — — y

représente les deux circonférences

$$x^2 + 2\,xy\cos C + y^2 - K^2(2\,ay + 2\,bx - ab) = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2\,xy \cos C + y^2 + K^2(2\,ay + 2\,bx - ab) = 0 \quad (2)$$

on aura évidemment :

$$Co \,.\, Co_c = abK^2.$$

Donc :

Si O *parcourt soit la circonférence* (1), *soit la circonférence* (2), O_c *parcourra soit la circonférence* (1), *soit la circonférence* (2).

La première a pour centre le point dont les coordonnées sont :

$$x = \frac{K^2 c}{\sin^2 C} \cos A$$

$$y = \frac{K^2 c}{\sin^2 C} \cos B$$

et pour carré du rayon

$$4K^2R \,.\, \frac{K^2Rc - S}{c},$$

la seconde a pour centre le point symétrique par rapport à C du centre de la première, et le carré de son rayon est :

$$4K^2R\,\frac{K^2Rc + S}{c},$$

R, S représentant le rayon du cercle circonscrit à ABC et la surface de ce triangle.

Remarquons :

1° Que la circonférence (1) n'est réelle que si l'on a

$$K^2 > \frac{h_c}{2R} \text{ (h_c est la hauteur partant de C)};$$

si $K^2 = \frac{h_c}{2R}$, elle se réduit au point de concours des hauteurs et la circonférence (2) a pour rayon $h_c\sqrt{2}$ et pour centre le point symétrique par rapport à C du point de concours des hauteurs;

2° Les centres des deux circonférences sont *toujours* sur la hauteur partant de C;

3° La circonférence (2) est toujours réelle;

4° Les circonférences (1) et (2) ont pour axe radical la ligne qui joint les milieux des côtés CA, CB.

Si l'on considère la circonférence

$$a\alpha^2 \cos A + b\beta^2 \cos B + c\gamma^2 \cos C = 0,$$

dont le centre est le point de concours des hauteurs de ABC *et*

dont le carré du rayon est : $-4R^2 \cos A \cos B \cos C$ *et si l'on prend un point* O *de cette circonférence les points associés* O_a, O_b, O_c *appartiennent aussi à cette circonférence.*

C'est un cas particulier du théorème suivant qui est évident.

Théorème VIII. — *Si* $\varphi(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$ *est l'équation de la courbe décrite par le point* O *les points associés de* O *décriront la même courbe et réciproquement : si une courbe est telle que les associés de tous ses points se trouvent sur elle-même, la courbe a une équation de la forme* $\varphi(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2) = 0$.

Le cas particulier de ce théorème que nous venons de signaler peut s'énoncer ainsi :

Théorème IX. — *Soit* H *le point de concours d'un triangle* ABC *qui a un angle obtus, la circonférence qui a pour centre le point* H *et qui coupe orthogonalement les trois circonférences décrites sur les côtés de* ABC *comme diamètres, est telle que l'un quelconque de ses points a ses associés sur elle-même ; c'est la seule circonférence du plan qui jouisse de cette propriété.*

Les quelques pages qui précèdent n'ont pas la prétention d'être une étude complète sur les *points associés* et sur les transformations par *points associés*, j'ai voulu seulement montrer l'intérêt que l'étude de ces points pouvait avoir pour généraliser ou étendre certaines propriétés se rapportant au triangle.

Je pense aussi qu'il doit y avoir pour le tétraèdre quelque chose d'analogue aux points associés ; mais l'extension au tétraèdre des propriétés du triangle n'est pas aisée à faire et je n'ai pas eu le loisir de m'en occuper. La question semble, du reste, un peu à l'ordre du jour. — Mémoire de M. J. Neuberg sur le tétraèdre ; divers articles des *Nouvelles Annales*, des *Archives* de Grunert, etc... ; aussi, à propos du tétraèdre équifacial (tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux voir Congrès de Nantes, page 173), dans ses analogies avec le triangle équilatéral, je veux citer la proposition suivante qui, malgré son *excessive simplicité* ne me paraît pas avoir été signalée dans les divers articles sur ce tétraèdre (Dostor, Neuberg, etc.).

La somme des distances d'un point quelconque de l'espace aux quatre faces d'un tétraèdre équifacial est constante. Elle se rapporte à notre étude en ce que, dans le tétraèdre, les coordonnées homogènes d'un point sont proportionnelles aux distances de ce point aux faces du tétraèdre.

SUR LES COURBES SECTRICES (*)

Par M. **Schoute**, professeur à l'Université de Groningue.

(*Suite*, voir p. 219.)

6. Théorème II. — *Le lieu du point* P, *qui forme avec la base fixe* AA′ *un triangle* APA′ (fig. 6) *dans lequel l'angle* A′ *est dans un rapport commensurable constant* $\frac{n}{n'}$ *à l'angle* A *est une courbe* $C^{n+n'-1}$ *symétrique par rapport à la base* AA′, *qui passe* $n-1$ *fois par* A, n' *fois par les deux antipoints de* A *et* A′, *c'est-à-dire par les foyers imaginaires des coniques dont* A *et* A′ *sont les foyers réels et* $n'-1$ *fois par* A′. *En ajoutant successivement la base aux* $n-1$ *tangentes de la courbe en* A, *aux* $n'-1$ *tangentes de la courbe en* A′ *et aux parallèles aux* $n+n'-1$ *asymptotes de la courbe menées par un point quelconque de la base, on obtient une étoile respectivement à* n, *à* n' *et à* $n+n'$ *rayons. Enfin en chacun des antipoints de* A *et* A′ *les* n' *tangentes coïncident avec la droite qui joint ce point au point* A′ *et sur chacune de ces tangentes cet antipoint compte pour* n *des points d'intersection de la tangente et de la courbe.*

Ce théorème, qui forme le pendant du théorème précédent n'est au fond qu'une conséquence immédiate des résultats généraux qui se rapportent au cas des étoiles, tournantes dans des sens contraires. Il se déduit du théorème précédent au moyen d'une transformation bien simple. Car si P (*fig. 7*) est un point de la courbe $C^{n+n'-1}$ du premier théorème, le point d'intersection P′ de AP et de la droite symétrique de A′P par rapport à AA′ sera un point de la courbe $C^{n+n'-1}$

(*) Voir les figures relatives à cet article, p. 197.

du second théorème. Mais il est évident que les deux bissectrices A'A et A'A'' de l'angle PA'P' séparent harmoniquement les côtés de cet angle. Donc P' est sur AP le point conjugué harmonique de P par rapport à A et à la droite A'A'', c'est-à-dire que l'application de l'homologie involutive à centre A et à axe A'A'', sur la courbe $C^{n+n'-1}$ du théorème premier transforme cette courbe dans la courbe $C^{n+n'-1}$ du théorème second.

Le rapport homologique, qui existe entre les deux courbes $C^{n+n'-1}$, que je viens d'indiquer, ne montre pas directement la situation des points infiniment éloignés de la courbe nouvelle, ces points ne correspondant pas à eux-mêmes. Mais tandis que d'un côté cet inconvénient n'est pas grave, parce que la position des points infinis de la nouvelle courbe était déjà indiquée par la théorie générale (art. 2); de l'autre côté, ce rapport nous fait connaître dans les deux courbes la position remarquable des points d'intersection de ces courbes avec la droite qui représente le lieu des points équidistants de A et A'. Car cette droite correspondant à la droite à l'infini coupe la première courbe en $n + n' - 1$ points réels situés sur les droites menées par A parallèlement aux asymptotes de la seconde courbe et la seconde courbe en deux points multiples d'ordre n' (les antipoints de A et A') et en $n - n' - 1$ points réels, situés sur les parallèles aux asymptotes de la première courbe par A.

Je n'entre pas dans les particularités par rapport aux courbes sectrices ressortant de ce second théorème, parce qu'elles ne passent pas par les points cycliques et ne sont donc pas aussi simples que les courbes sectrices correspondantes au théorème premier. Seulement, j'observe que le cas $n = 2$, $n' = 1$ fait trouver une hyperbole dont A est un des sommets, dont le centre M se trouve sur AA' à une distance AM de A égale à $\frac{1}{3}$ AA', et dont les asymptotes font des angles de 60° avec l'axe transverse.

7. — Pour terminer, je signale deux problèmes, qui se rattachent à la théorie des courbes sectrices au moyen d'une

transformation simple. Dans le premier problème il s'agit du lieu du point P_1 *(fig. 8)*, qui forme avec la base fixe AA′ un triangle AP_1A' dans lequel le complément de l'angle A′ est dans un rapport commensurable constant $\frac{n}{n'}$ à l'angle A ; tandis que le second problème s'occupe du lieu du point P_1' *(fig. 9)* qui forme avec la base fixe AA′ un triangle AP_1A' dans lequel l'excès de l'angle A′ sur $\frac{\pi}{2}$ est dans un rapport commensurable $\frac{n}{n'}$ à l'angle A. D'où l'on voit tout de suite que le lieu du premier problème se déduit de la courbe $C^{n+n'-1}$ du premier théorème, comme le lieu du second problème de la courbe $C^{n+n'-1}$ du second théorème, au moyen de la transformation des points P, P_1 ou P′, P_1' situés sur une même droite passant par A et de telle sorte qu'ils limitent un segment de cette droite, vu du point A′ sous un angle droit.

Mon attention a été fixée sur la transformation que je viens de mentionner par M. G. de Longchamps, qui l'a étudiée principalement par l'analyse dans son « Étude sur une transformation réciproque » (*). Elle appartient aux transformations quadratiques involutives, qui comme je l'ai prouvé ailleurs (**) se divisent en deux groupes, les

(*) Voir ce journal (1882, p. 49).

(**) Voir mon étude « Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes » *(l. c.)*.

Je profite de l'occasion pour témoigner mon regret qu'avant la publication de mon travail je n'ai pas eu connaissance des deux mémoires « *Étude sur une transformation réciproque* (*Journal*, 1882, p. 49) » et « *Sur les Conchoïdales* » (Nouv. corresp. Math., t. V), de M. G. de Longchamps. Le premier s'occupe d'un cas particulier de l'involution quadratique irrégulière, celui des points conjugués par rapport à un cercle réduit à un point (c'est-à-dire aux deux droites isotropes passant par ce point) qui sont en ligne droite avec un point donné. Ce cas se caractérise par la coïncidence de deux points fondamentaux, qui se présente toujours dans l'involution quadratrique irrégulière, quand la conique dominante dégénère en deux droites; il forme, dans cette involution irrégulière, le pendant du cas particulier de l'involution régulière que j'ai détaillé dans mon étude. Et le second donne une construction extrêmement élégante de la tangente à quelques courbes classiques de manière qu'il s'occupe du même sujet que mon étude citée.

involutions quadratiques régulières des points conjugués par rapport aux coniques d'un faisceau Γ^2 et les involutions quadratiques irrégulières des points conjugués par rapport à une conique C^2 et situés en ligne droite avec un point donné. Et tandis que des trois points fondamentaux deux coïncident dans l'involution quadratique régulière quand deux des quatre points de base du faisceau Γ^2 coïncident dans une direction déterminée, cette même coïncidence de deux des trois points fondamentaux se présentera dans l'involution quadratique irrégulière, aussitôt que la conique donnée C^2 des points qui se correspondent à eux-mêmes, a un point double. Donc, la propriété de la transformation en question, que les droites qui joignent les couples de points correspondants passent par un même point A, la range dans le groupe des involutions quadratiques irrégulières. Et, en effet, elle représente de ce groupe le cas particulier où deux points fondamentaux coïncident, parce qu'elle est la correspondance des points, qui sont en ligne droite avec A et qui sont conjugués par rapport au cercle infiniment petit à centre A_1. Le triangle fondamental de cette involution est donc la limite d'un triangle isoscèle ayant pour sommet A, pour base $A'A''$, l'angle au sommet diminuant indéfiniment jusqu'à zéro.

Je n'entre pas dans plus de détails par rapport à l'application de la transformation indiquée aux courbes des deux théorèmes, parce que les problèmes nouveaux peuvent être résolus sans peine au moyen des résultats généraux de l'article 2. Je remarque seulement qu'en effet la transformation indiquée fait trouver une courbe $C^{n+n'}$ quand n' est impair et une courbe $C^{n+n'-1}$ quand n' est pair, comme l'exige cette théorie générale. Car, selon que n' est impair ou pair la courbe $C^{n+n'-1}$ de nos deux théorèmes peut être représentée par les symboles connus

$$C^{n+n'-1}\,(A^{n-1},\ A'^{n'-1},\ A_1'^{0}),$$

ou

$$C^{n+n'-1}\,(A^{n-1},\ A'^{n'-1},\ A_1'^{1}),$$

où A'_1 indique le point infiniment voisin de A' sur $A'A''$; parce que, pour n' impair, aucun et, pour n' pair, un seul des

rayons de l'étoile mutilée des tangentes de cette courbe coïncide avec $A'A''$. Dans les deux cas, la courbe correspondante est donc caractérisée par le symbole

$$C^{2(n+n'-1)}\,(A^{n+n'-1},\ A'^{n+n'-1},\ A'^{n+n'-1}_1).$$

Mais dans le cas où n' est impair, cette courbe contient, comme partie impropre, la droite $A'A'_1$ comptée $(n-1)$ fois et la droite AA'_1 comptée $(n'-1)$ fois ; de manière qu'il ne reste qu'une partie essentielle

$$C^{n+n'}\,(A^n,\ A'^{n'},\ A'_1).$$

Et dans le cas où n' est pair, cette courbe contient, comme partie impropre, la droite $A'A'_1$ comptée $(n-1)$ fois, la droite AA'_1 comptée $(n-1)$ fois et encore la droite AA' comptée une fois ; de manière que la partie essentielle est symbolisée par

$$C^{n+n'-1}\,(A^{n-1},\ A'^{n'-1},\ A'_1).$$

Ainsi que je l'ai remarqué, ces résultats sont confirmés par la théorie générale. Car si n' est pair, n est impair et, dans ce cas, l'hypothèse $\varphi = \frac{\pi}{2}$ fait coïncider les deux droites AP et $A'P$ avec la droite AA', etc.

La conique des points, qui se correspondent à eux-mêmes dans la transformation dont je me suis servi, se réduisant à un cercle infiniment petit A', c'est-à-dire aux deux droites isotropes passant par ce point, les points cycliques et les antipoints de A et A' correspondent à eux-mêmes dans cette transformation. Donc les courbes nouvelles, qui donnent la solution des deux problèmes posés dans cet article, se comportent de la même manière par rapport à ces points remarquables.

Mais si l'on observe que les courbes $C^{n+n'-1}$, qui donnent la solution des deux problèmes dans le cas où n' est pair, s'accordent avec les courbes correspondantes quant à la nature de tous leurs points remarquables, cette question se présente: ces courbes ne coïncident-elles pas avec les courbes correspondantes ? Et c'est ce qui arrive en effet. Car, dans ce cas, les n' points d'intersection d'une de ces courbes avec un rayon vecteur quelconque par A, qui ne coïncident pas avec A, sont

les points d'intersection de cette droite avec une étoile à centre A', dont le nombre n' des rayons est pair, de manière qu'elle se compose de $\frac{n'}{2}$ couples de droites rectangulaires. Et cela prouve que, pour n' pair, les courbes des deux théorèmes sont des courbes anallagmatiques dans la transformation. Ainsi pour $n = 3$, $n' = 2$ le limaçon donne également la solution du premier problème de l'article présent (*). En vérité, on a *(fig. 4)* $\widehat{P''A'A''} = \widehat{P'A'B}$. De même, si n est pair les courbes des deux théorèmes sont des courbes anallagmatiques dans la transformation que l'on obtient par l'échange mutuel des points A et A' dans la transformation des figures 8 et 9. Ainsi pour $n = 4$, $n' = 3$ la courbe de la figure 5 est une anallagmatique dans cette nouvelle transformation.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

(*Suite*, voir p. 226).

22. — Prenons deux courbes U et V; par un point fixe O, menons un rayon vecteur rencontrant U en A, V en B; puis, sur la perpendiculaire élevée au point B au rayon vecteur, prenons BI = OA. Lorsque le rayon vecteur considéré tourne autour de O, le point I décrit une certaine courbe W; nous nous proposons de construire la tangente à W, au point I.

(*) Voir le mémoire cité de M. G. de Longchamps « *Étude sur une transformation réciproque* », à la fin de l'article 10.

J'observe que le corollaire I de l'article 22 peut donner lieu à des malentendus. Car il est évident que la courbe qui correspond à une courbe donnée de l'ordre m peut abaisser son ordre bien au-dessous de $(2m - 3)$. Même jusqu'à l'unité, pourvu que l'on ait la faculté de faire passer la courbe donnée autant de fois que l'on désire par les points fondamentaux. Donc l'auteur s'est borné dans son corollaire à des courbes C^m, qui n'ont pas de points multiples aux pôles A et A' de la transformation.

A cet effet, imaginons (*fig. I*) un rayon vecteur OA'B', infiniment voisin de OAB, et soit I' le point qui correspond à I, sur W. Si nous prenons

$$\omega J = BI = OA, \quad \omega J' = B'I' = OA',$$

nous pourrons observer : 1° que JJ' et II' sont deux transversales réciproques du triangle $\omega BB'$, 2° que les deux triangles OAA', $\omega JJ'$ sont égaux.

Après cette double remarque, si nous passons à la limite, le point ω a pour position limite (*fig, II*) un certain point Ω, facile à déterminer; c'est, comme nous l'avons déjà observé, le point diamétralement opposé au point O, dans le cercle qui passe: 1° par O, 2° par B, tangentiellement à lacourbe U. Par conséquent, si nous faisons l'angle β égal à l'angle α et si nous prenons aussi BR' = BR, IR' est la tangente demandée.

23. — Dans le cas particulier où l'on remplace les courbes U et V par deux droites parallèles, le lieu décrit par le point I est une droite; si l'on prend pour U une circonférence, pour V l'un de ses diamètres Δ, le point O étant d'ailleurs placé sur la circonférence, le lieu du point I est une cubique circulaire qui devient une strophoïde oblique en supposant que O appartient au diamètre perpendiculaire à Δ. Cette dernière remarque permettrait de construire très simplement la tangente aux cubiques circulaires s'il n'existait pas, pour ces courbes, une construction, également basée sur les transversales réciproques, et plus simple encore. Dans cette construction on considère les cubiques circulaires comme des conchoïdales de cercle (*).

24. — Une autre transformation, tout à fait analogue à la précédente, peut se déduire encore de la figure fixe constituée par deux courbes U, V et un point O (*fig. III*).

Par O, menons un rayon vecteur mobile OAB et, sur la perpendiculaire élevée à OAB au point B, prenons BI = AB. Le point I décrit une courbe W à laquelle nous voulons mener la tangente, au point I.

(*) Voyez, sur ce sujet, *Cours de mathématiques spéciales;* SUPPLÉMENT, p. 113.

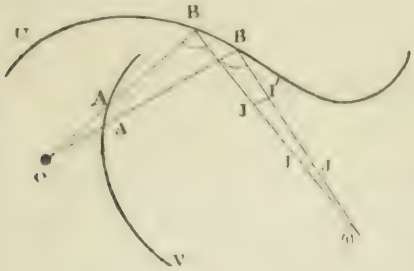


Fig. I

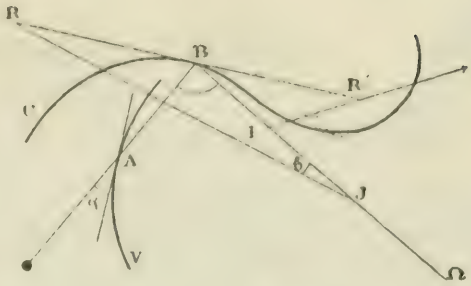


Fig. II

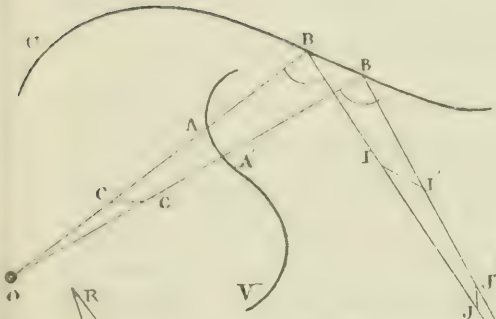


Fig. III

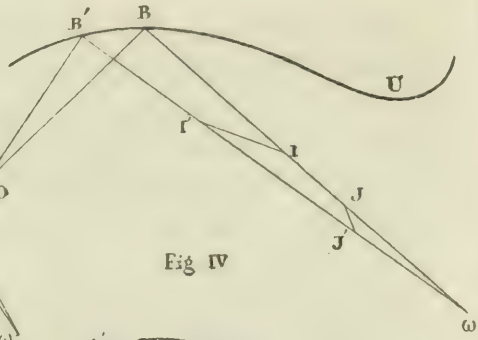


Fig. IV

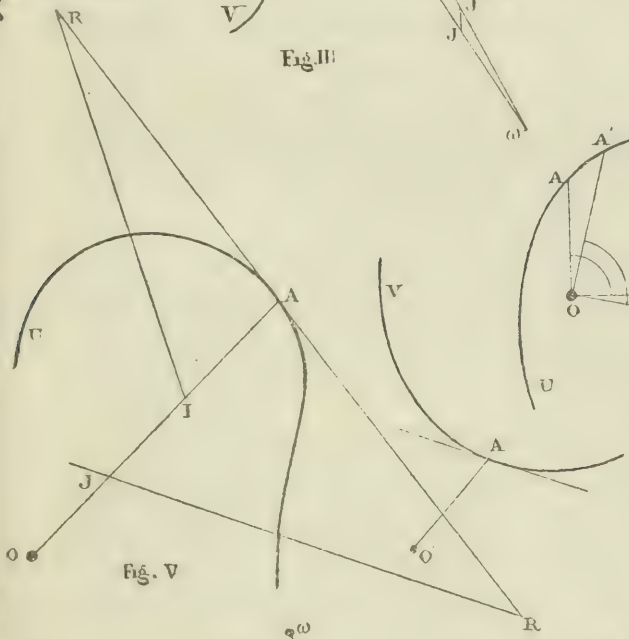


Fig. V

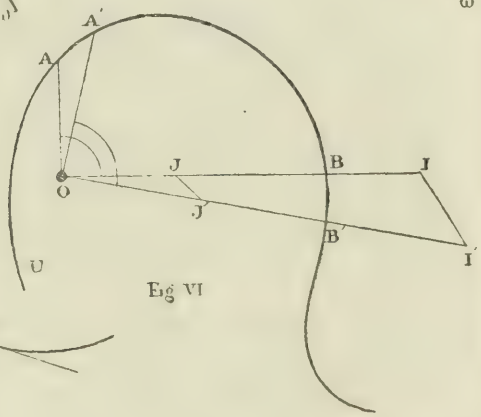


Fig. VI

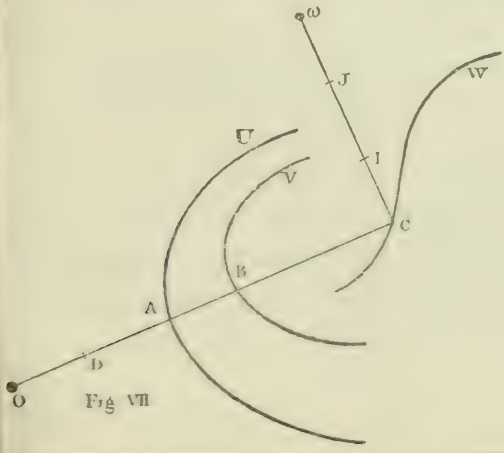


Fig. VII

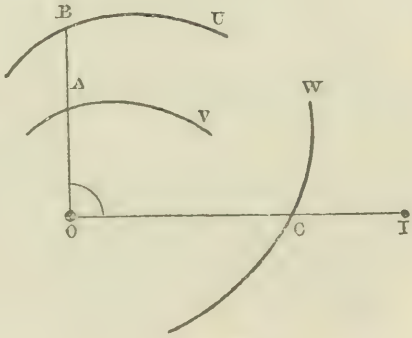


Fig. VIII

Soit

$$OC = AB = IB = \omega J, \quad OC' = A'B' = I'B' = \omega J'.$$

Les deux triangles OCC', ωJJ' sont égaux; CC' et AA' sont deux transversales réciproques, dans le triangle OBB'; II', JJ' sont aussi deux transversales réciproques, dans le triangle ωBB'. D'après ces diverses remarques, on voit comment, à la limite on pourra fixer : 1° la détermination de CC', 2° celle de JJ', 3° finalement, celle de la tangente cherchée II'.

25. — La construction précédente est en défaut quand la courbe V disparaît et vient se confondre avec le point O, pôle de la transformation. Dans ce cas, la construction proposée se réduit à la suivante : on a *(fig. IV)* une courbe U et un point fixe O; par O, on mène un rayon vecteur mobile OB et, sur la droite BI perpendiculaire à OB, on prend BI = BO; construire la tangente à la courbe W, lieu du point I.

En considérant, comme l'indique la figure, deux positions infiniment voisines du rayon vecteur et les points correspondants I, I' situés sur W, on voit qu'en prenant

$$\omega J = IB = OB, \quad \omega J' = I'B' = OB'$$

les triangles ωJJ', OBB' sont égaux et que les droites JJ', II' sont deux transversales réciproques du triangle ωBB'. On déduit de là une construction très simple pour la droite limite de II' c'est-à-dire pour la tangente demandée.

26. — Considérons maintenant *(fig. V)* deux courbes U, V et deux pôles fixes O, O'; par ces points, on mène deux rayons vecteurs parallèles OA, O'A' et l'on prend AI = A'O'; nous voulons déterminer le tracé de la tangente à la courbe W lieu du point I, quand nous supposons que les rayons vecteurs considérés sont mobiles autour des pôles.

Sans répéter un raisonnement avec lequel nous supposons le lecteur familiarisé par les exemples qui précèdent, on voit qu'en prenant

$$OJ = IA = O'A',$$

et en menant JR parallèle à la tangente en A' à la courbe V, la tangente cherchée est la droite IR' qui joint le point considéré I au point R' symétrique de R, par rapport au point A.

27. — On résout encore, par un procédé analogue à ceux que nous venons d'exposer, le problème plus général qui correspond à l'énoncé suivant.

Soient *(fig. VII)* U, V, W trois courbes quelconques; par un point fixe O, on mène un rayon vecteur mobile OABC et l'on prend sur la droite CI, perpendiculaire au rayon vecteur, CI = AB; construire la tangente à la courbe, lieu du point I.

Ayant déterminé le point ω, comme il a été dit plus haut, on prend

$$\omega J = IC = OD = AB.$$

Le théorème des transversales réciproques détermine alors : 1° la tangente au lieu décrit par D et, par suite, la tangente au lieu décrit par J; 2° de la connaissance de la tangente en J (par une application nouvelle du même théorème) on déduit la tangente cherchée au lieu décrit par le point I, en un point pris sur cette courbe.

28. — Cette génération des courbes, aussi bien que celles que nous avons envisagées dans les paragraphes précédents, donne lieu à de nombreuses applications particulières, en prenant, au lieu des courbes générales que nous avons considérées, des courbes particulières, ou même des droites. On peut aussi, pour créer ces applications, supposer que certaines des courbes U, V, W disparaissent ou deviennent coïncidentes.

Par exemple, supposons que dans la génération précédente W se confonde avec V, puis que U et V soient remplacées par deux droites parallèles, le lieu de I est une droite.

Si W se confond avec V et si l'on suppose : 1° que V soit un cercle Γ passant par O, 2° que U soit un diamètre de Γ, perpendiculaire à celui qui passe par O, le lieu de I est une strophoïde oblique, etc.

29. — Considérons encore cette transformation que nous généraliserons dans le paragraphe suivant.

Soit *(fig. VI)* U une courbe quelconque; autour d'un point fixe O, on fait tourner un angle droit AOB et, sur le prolongement de OB, on prend BI = OA; on propose de tracer, au point I, la tangente à la courbe que décrit ce point.

Considérons une position infiniment voisine du système mobile proposé et prenons

$$OJ = BI = OA, \quad \text{puis } OJ' = B'I' = OA'.$$

Nous pouvons alors observer :

1° Que les deux triangles OAA′, OJJ′ sont égaux;

2° Que les droites JJ′ et BB′ sont deux transversales réciproques du triangle OII′.

De là nous concluons, par une construction analogue à celles que nous avons indiquées tout à l'heure, le tracé de la tangente demandée.

30. — Voici maintenant la généralisation annoncée; nous nous bornons à l'indiquer, car, en appliquant les idées précédentes, on trouvera sans peine la construction demandée.

Soient *(fig. VIII)* U, V, W trois courbes quelconques; autour d'un point fixe O on fait tourner un angle droit. L'un des côtés de cet angle rencontre les deux premières courbes aux points A et B; l'autre côté rencontre la troisième au point C. Cela posé, on prend, sur le prolongement de OC, la longueur CI égale à AB; trouver la tangente en I au lieu décrit par ce point. *(A suivre.)*

QUESTIONS D'EXAMENS

35. — *On considère un triangle* ABC *et une droite* Δ *passant par* A*; sur* Δ*, à partir du point* A *on prend de part et d'autre deux points* M, M′ *mobiles, équidistants de* A. *Les droites* BM, CM′ *se coupent en un certain point* I, *dont on demande le lieu géométrique.*

Les points M et M′ décrivent sur Δ deux divisions homographiques; le lieu cherché est donc (th. de Chasles) une conique passant par les points B et C. On voit aussi, *à priori*, qu'elle passe par le point A et qu'elle admet pour direction asymptotiques : 1° la droite Δ; 2° la droite qui joint A au milieu A′ de BC.

La question traitée par le calcul donne les mêmes résultats,

très simplement. En désignant par O le point commun à BC et à Δ; et en prenant Δ pour axe des y, BC pour axe des x, après avoir posé

$$OA = h,\ OB = a,\ OC = b,$$

on trouve, pour l'équation du lieu décrit par I,

$$2h(a - x)(b - y) = y(2ab - ax - by).$$

D'après ce résultat, une première asymptote est une parallèle à Δ menée par le point O′ conjugué harmonique de O, relativement au segment BC. Les deux asymptotes d'une hyperbole étant deux transversales réciproques par rapport à un triangle inscrit quelconque ABC, on construit la seconde asymptote en prenant O″, symétrique de O′ par rapport à A′, et en menant par ce point une parallèle à la médiane AA′.

36. — *Deux points quelconques pris dans le plan d'une conique* F *et les points de contact des tangentes issues de ces points sont six points appartenant à une même conique.*

Soit P un point; PA, PB les tangentes à F issues de P. Prenons PAB pour triangle de référence, et soit, dans la notation abrégée

$$\gamma^2 + K\alpha\beta = 0, \qquad (1)$$

l'équation de Γ.

Prenons un point Q $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$; la polaire de Q a pour équation

$$\gamma\gamma_0 + \frac{K}{2}(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0) = 0.$$

La conique aplatie constituée par cette polaire et par AB est représentée par

$$\gamma^2\gamma_0 + \frac{K\gamma}{2}(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0) = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$\alpha\beta\gamma_0 - \frac{\gamma}{2}(\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0) = 0.$$

Cette équation étant visiblement vérifiée par $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$, la proposition est établie.

Il est vrai que les axes que nous avons adoptés peuvent, dans certains cas, être imaginaires; mais on sait que cette objection n'ôte rien à la rigueur des démonstrations faites avec un pareil système d'axes.

37. — *Lieu décrit par l'orthocentre du triangle formé par le centre de l'ellipse et deux points* P, Q, *conjugués sur la courbe.*

Les coordonnées de P étant représentées par $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$; celles de Q, d'après les formules de Chasles, sont : $-a \sin \varphi$, et $b \cos \varphi$.

En prenant les équations des hauteurs du triangle POQ, on trouve que les coordonnées de l'orthocentre sont x, y :

$$(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a} \sin \varphi \cos \varphi \, (\sin \varphi - \cos \varphi) \\ y = -\dfrac{c^2}{b} \sin \varphi \cos \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi). \end{cases}$$

Comme on peut toujours poser

$$\sin \varphi = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

les formules (H) prouvent que la courbe est une unicursale du sixième ordre. On peut aussi éliminer φ entre les deux équations (H) et l'on trouve

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = c^4(b^2y^2 - a^2x^2)^2.$$

La courbe qui correspond à cette équation a la forme d'une rosace constituée par quatre foliums se réunissant au point O. Les tangentes en ce point sont les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés du losange obtenu en joignant consécutivement les sommets de l'ellipse.

On peut aussi déterminer les tangentes parallèles aux axes, lesquelles, sauf erreur, sont à une distance de O égale à $\pm \dfrac{c^2}{3b\sqrt{3}}$, pour celles qui sont parallèles à Ox ; et à une distance égale à $\pm \dfrac{c^2}{3a\sqrt{3}}$, si l'on considère les tangentes parallèles à Oy. *(A suivre).*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. B. Hanumenta Rau, *professeur à l'École normale de Madras.*

.... La solution de la question 359 donnée dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (tome II, deuxième série, p. 126)

par M. P. Petit, me paraît incomplète parce que les deux équations $f(x) = 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ peuvent avoir deux racines communes de la forme α et $\frac{1}{\alpha}$. Le facteur commun aux deux polynômes est alors de la forme $x^2 - mx + 1$.

Je prends la liberté, pour ce motif, de vous adresser une solution plus complète....

Nota. — L'observation qu'on vient de lire est parfaitement fondée. Les deux polynômes proposés étaient :

$$ax^7 + bx^3 + c,$$

et

$$cx^7 + bx^4 + c.$$

On demandait quelle condition devaient vérifier les coefficients de ces deux polynômes pour qu'ils admettent un diviseur commun du second degré. M. Petit, dans la solution rappelée ci-dessus, n'a envisagé que le cas où le facteur était de la forme $x^2 - 1$; mais, comme l'observe avec raison M. Hanumenta, ce facteur peut être aussi de la forme $x^2 - mx + 1$.

Par des voies diverses, M. Hanumenta, dans une note qui accompagne sa lettre et que je regrette de ne pouvoir publier in-extenso, faute de place, trouve pour la valeur de m

$$m = \frac{bc}{ab - a^2 + c^2}.$$

On conclut de ce résultat que la condition cherchée est

$$b^2c^2(a^2 - c^2) = (ab + a^2 - c^2)(ab - a^2 + c^2).$$

Par exemple, les deux polynômes :

$$8x^7 - 377x^3 + 21,$$
$$21x^7 - 377x^4 + 8,$$

admettent un diviseur commun du deuxième degré, savoir

$$x^2 - 3x + 1.$$

G. L.

Extrait d'une lettre de M. Brocard.

... Permettez-moi d'ajouter quelques remarques à celles de M. Catalan au sujet de la *trisectrice* de la parabole.

Cette courbe est une des premières qui aient été rencontrées par les géomètres dans l'étude des *caustiques*.

Elle est, en effet, la caustique par réflexion de la parabole pour des rayons incidents perpendiculaires à l'axe; et, à ce titre, elle a été déjà étudiée dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital, d'après MM. Barbier et Lucas, qui, dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. V, 1866, p. 27-31) en ont fait une description très détaillée.

Ce lieu géométrique répond à la question mathématique du concours d'admission à l'École Polytechnique en 1865, résolue *loc. cit.* p. 21-27.

Cette courbe appartient à la famille des *spirales sinussoïdes* caractérisées par l'équation générale

$$\rho^n = A \cos n\omega,$$

(*loc. cit.* Haton de la Goupillière, 1876, t. XV, p. 97-108) et appelées quelquefois aussi *orthogénides* (Allégret, *Ann. de l'École normale;* Ed. Lucas, *Nouvelles Corr. math.*, t. II, 1876, p. 223).

La bibliographie très complète et très intéressante de ces courbes remarquables a été donnée par M. Haton dans l'article cité...

QUESTION 105

Solution de M. E. Vessiot, élève du Lycée de Marseille.

Des surfaces du second ordre passent par une conique donnée et par deux points symétriques par rapport à son plan. Lieu de leurs centres.

Séparer ce lieu en nappes, correspondant aux divers genres de surfaces. (Amigues.)

Première partie. — Prenons pour plan des xy le plan de la conique. La droite qui joint les deux points fixes perce ce plan en un point P. Le diamètre de la conique passant en P sera l'axe des x; l'axe des y sera le diamètre conjugué; Oz sera une perpendiculaire au plan de la conique.

Nous supposerons d'ailleurs que la conique donnée soit une conique à centre.

Son équation dans le plan des xy est alors

$$x^2 + ay^2 = h.$$

L'équation générale des surfaces du second ordre passant par cette conique est donc

$$x^2 + ay^2 - h + 2z(\lambda x + \mu y + \nu z + \rho) = 0.$$

Soient d'ailleurs x_0 l'x du point P et z_0 la distance des points fixes au plan des xy. Si l'on fait dans l'équation de la conique $y = 0$, $x = x_0$, on obtient une équation en z dont les racines doivent être z_0 et $-z_0$. On en déduit la valeur de ν et de ρ

$$2\nu = \frac{h - x_0^2}{z_0^2}, \qquad \rho = -\lambda x_0.$$

De sorte que l'équation générale des surfaces de la famille est, λ et μ étant des paramètres variables :

$$x^2 + ay^2 + \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z^2 + 2\mu yz + 2\lambda zx - 2\lambda x_0 z - h = 0 \quad (1)$$

Pour avoir le lieu des centres il faudra éliminer λ et μ entre les trois dérivées partielles, qui sont :

$$\left.\begin{aligned} x + \lambda z &= 0 \\ ay + \mu z &= 0 \\ \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z + \lambda(x - x_0) + \mu y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Le résultat est

$$x(x - x_0) + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z^2 = 0. \quad (3)$$

Le lieu est donc une surface du second ordre. Pour en discuter la nature il suffit de transporter l'origine en son centre, car ses axes sont parallèles aux axes de coordonnées. Il faut faire $x = x' + \frac{x_0}{2}$. On a

$$x'^2 + ay - \frac{h - x_0^2}{z_0^2} z^2 = \frac{x_0^2}{4}.$$

On en déduit sans peine le tableau suivant :

$a > 0$ la conique donnée est une ellipse	$h - x_0^2 > 0$ . . . . hyperboloïde à 1 nappe (P intérieur à l'ellipse)
	$h - x_0^2 < 0$ . . . . ellipsoïde (P extérieur)

$$a < 0 \text{ (hyperbole)} \begin{cases} h - x_0^2 > 0 \ldots \text{hyperboloïde à 2 nappes} \\ \text{(P entre les 2 branches)} \\ h - x_0^2 < 0 \ldots \text{hyperboloïde à 1 nappe} \\ \text{(P dans l'une des branches).} \end{cases}$$

2e PARTIE. — Il faut discuter la surface dont l'équation est (1). Pour cela, groupons en carrés. En ordonnant successivement en x, y et z, on obtient facilement la forme suivante

$$a\alpha X^2 + \alpha Y^2 + Z^2 = H$$

avec les valeurs

$$\alpha = a\left(\frac{h - x_0^2}{z_0^2} - \lambda^2\right) - \mu^2$$

$$H = a\,(\lambda^2 x_0^2 + \alpha h).$$

Nous avons donc à nous occuper du signe de a, de α et de H. Le paromètre a dépend des données. Calculons α et H en fonction des coordonnées d'un point du lieu. Des équations (2) on tire

$$\lambda = -\frac{x}{z}, \qquad \mu = -\frac{ay}{z}.$$

Donc

$$\alpha = -\frac{a}{z^2}\left(x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}\right)z^2.$$

Ce qui nous donne une surface séparatrice

$$x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}z^2 = 0. \qquad (4)$$

C'est un cône, ayant son sommet à l'origine et homothétique du lieu. On pourra donc le remplacer par le plan de la courbe plane d'intersection située à distance finie. Ce plan est

$$x = 0.$$

— De même, on trouve

$$H = \frac{a^2}{z^2}\left[x^2 x_0^2 - h\left(x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}z^2\right)\right].$$

La surface séparatrice est encore un cône

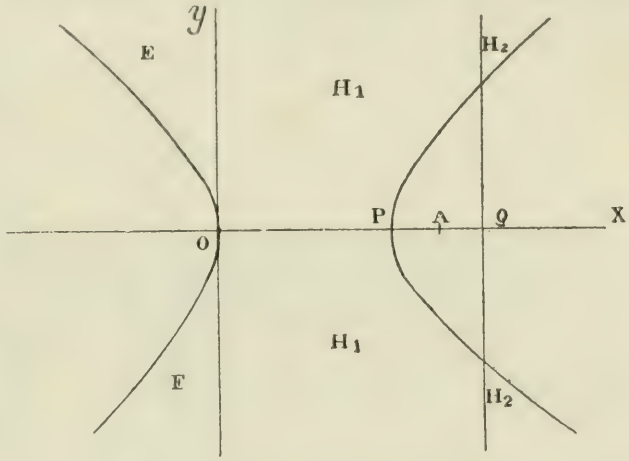
$$x^2 x_0^2 - h\left(x^2 + ay^2 - \frac{h - x_0^2}{z_0^2}z^2\right) = 0. \qquad (5)$$

Mais on peut encore le remplacer par deux plans. Multiplions en effet (3) par h et ajoutons membre à membre avec (5) et nous obtenons les deux plans

$$\begin{cases} x = 0, \\ xx_0 = h. \end{cases}$$

Passons à l'examen des divers cas qui peuvent se présenter (les figures représentent les traces sur le plan des zx),

Premier cas : $a > 0$. — La conique donnée est une ellipse. A est le sommet situé sur Ox.

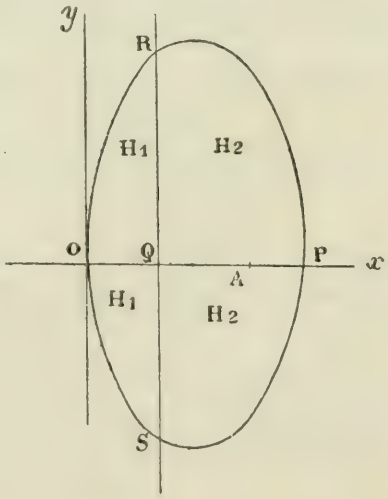


I. $h - x_0^2 > 0$.

Le lieu est un hyperboloïde à une nappe passant en O et en P.

Les traces des plans séparateurs sont Oz, RQS pour le plan $xx_0 - h = 0$.

(Dans le cas qui nous occupe, Q est au delà de A.) Le premier coupe suivant deux droites, le second suivant une hyperbole.



α ne peut changer de signe qu'en s'annulant, c'est-à-dire quand on traverse la surface du cône (4). Or pour tous les points de Ox, qui sont évidemment à l'extérieur du cône, α est négatif. Il en résulte que pour tous les points du lieu dont l'abscisse est positive on a $\alpha < 0$, et pour les autres a > 0.

H est négatif pour tous les points extérieurs au cône (5), car il est négatif pour tous les points de Ox. Il sera donc

négatif pour tous les points du lieu situés entre les deux plans séparateurs et positif pour les autres.

De ces considérations il résulte qu'on a : des hyperboloïdes à deux nappes pour la nappe de la surface située à l'extrême droite, des hyperboloïdes à unenappe pour les points situés entre les deux plans, des ellipsoïdes à l'extrême gauche.

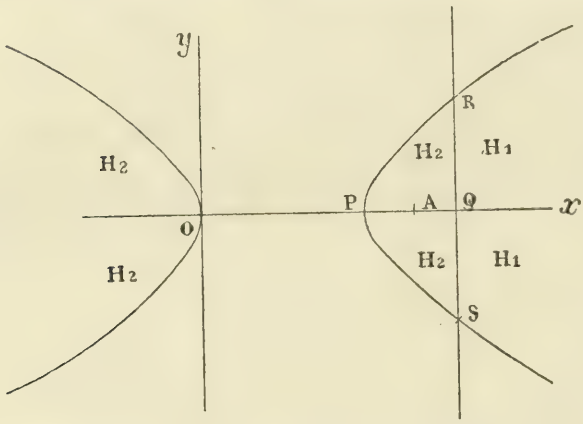
II. $h - x_0^2 < 0$.

Le lieu est un ellipsoïde. Le plan $x = 0$ ne sépare plus. L'autre plan seul sépare. Il est ici situé entre O et A. Car si on substitue O et $\sqrt{h}$ dans le premier membre de son équation

$$xx_0 - h = 0.$$

On a des résultats de signes contraires.

α est toujours négatif. On ne peut pas avoir d'ellipsoïdes, ce qui était évident.



Le signe de H se discute d'après les principes déjà indiqués.

On a des hyperboloïdes à deux nappes à droite, des hyperboloïdes à une nappe à gauche.

Deuxième cas : a < 0. — La conique donnée est une hyperbole.

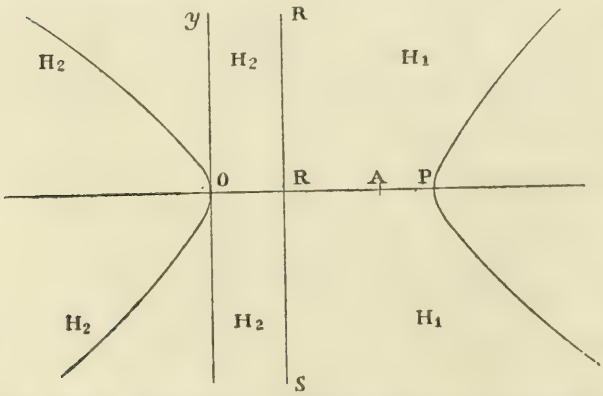
Soit d'abord

$$h > 0;$$

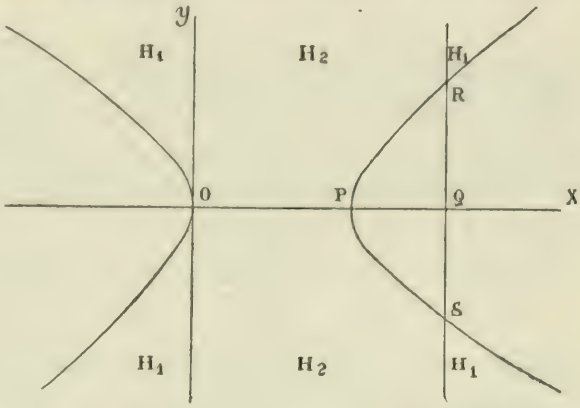
Ox est alors l'axe transverse.

I. $h - x_0^2 > 0$.

Le lieu est un hyperboloïde à deux nappes. Le plan $x = 0$ sépare les deux nappes. L'autre plan coupe la surface suivant une ellipse. Il coupe Ox au delà de A. La même méthode déjà



employée conduit aux résultats suivants : jamais d'ellipsoïdes, ce qui était évident; des hyperboloïdes à une nappe sur la partie tronquée de la nappe de droite du lieu; des hyperboloïdes à deux nappes partout ailleurs. Le plan des zy ne sépare donc pas ici. Cela tient à ce que quand on le traverse, α et H changent de signe en même temps.



II. $h - x_0^2 < 0$.

Le lieu est un hyperboloïde à une nappe. Le plan QRS est entre O et A. Il sépare seul, par la même raison qu'au paragraphe précédent.

On a encore des hyperboloïdes à une nappe, à droite ; et des hyperboloïdes à deux nappes, à gauche.

— Supposons enfin

$$h < 0.$$

Il en résulte qu'on a forcément

$$h - x_0 < 0.$$

Ox est l'axe non transverse de l'hyperbole donnée.

Le lieu est un hyperboloïde à une nappe. Le plan séparateur RQS est en dehors de OP.

On n'a des hyperboloïdes à deux nappes que dans la partie comprise entre les deux plans séparateurs.

Remarque. — Dans le cas où le point P se trouverait sur la conique, c'est-à-dire où on aurait

$$h - x_0^2 = 0,$$

le lieu devient un cylindre, elliptique si $a > 0$, hyperbolique si $a < 0$.

La droite qui joint les deux points donnés a alors trois points communs avec la surface mobile et y est par conséquent contenue tout entière. Cette surface ne peut donc jamais être qu'un hyperboloïde à une nappe.

NOTA. — La même question a été résolue par MM. Rat, Bellando, à Marseille ; Marchis, à Rouen.

QUESTIONS PROPOSÉES

182. — Soit H une hyperbole; une droite mobile tangente à H rencontre ses asymptotes en deux points A et B que l'on projette en A′ et B′ sur l'axe non transverse de la courbe; sur A′B′ comme diamètre on décrit un cercle Δ et l'on prend, par rapport à Δ, le pôle I de AB.

Trouver le lieu de I; ce lieu est l'axe transverse de H.

(G. L.)

183. — Sur une ellipse E, on considère un point mobile M. Abstraction faite de la normale en M, on peut, de ce point, mener à l'ellipse considérée trois autres normales. Prenons deux de ces droites MA, MB; les tangentes aux points A et B pieds de ces normales, se coupent en I. Démontrer que le lieu de I est une ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée. *(G. L.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 24766-5.

SUR QUELQUES COURBES REMARQUABLES

Par M. **Maurice d'Ocagne**, ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. — M. de Longchamps, dans un intéressant article de ce journal (*), a donné une construction de la tangente aux courbes ainsi définies :

Soient Ox et Oy deux axes rectangulaires, Δ une droite parallèle à Oy. Prenons une courbe U quelconque, et sur cette courbe un point B. Tirons OB qui coupe Δ en A. Par A menons une parallèle à Ox, par B une parallèle à Oy ; ces droites se coupent en I ; ce point I, lorsque le point B varie sur la courbe U, décrit une courbe V.

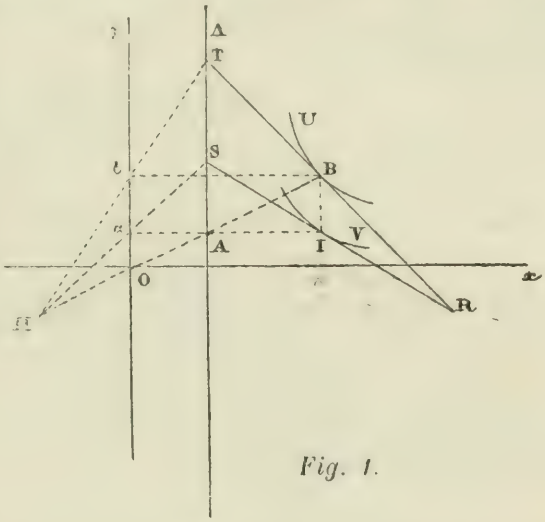


Fig. 1.

En particulier, lorsque la courbe U est un cercle tangent en O à Oy, la courbe V est une *courbe d'Agnesi ;* lorsque la courbe U est un cercle tangent en O à Ox, la courbe V est une *serpentine.*

Il s'agit de déduire la tangente à la courbe V au point I de la tangente à la courbe U au point B. M. de Longchamps, par l'introduction d'une courbe auxiliaire, a montré comment cette construction pouvait se ramener à d'autres, connues.

Nous nous proposons ici d'opérer cette construction *directement.* Outre la simplicité très grande du résultat, le problème ainsi traité présente l'intérêt de faire connaître une application nouvelle de formules très importantes de géométrie infinitésimale dont nous avons donné des démons-

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*, septembre 1885, p. 199.

trations absolument élémentaires dans ce recueil même (*), et que nous avons eu depuis l'occasion d'utiliser également dans ce journal.

Soient TR la tangente en B à la courbe U, SR la tangente en I à la courbe V.

Représentons par $d(A)$, $d(B)$, $d(I)$ les déplacements infiniment petits simultanés des points A, B et I sur les tangentes Δ, TR, et SR, à leurs trajectoires Δ, U et V.

La droite AB touchant son enveloppe au point O (puisqu'elle pivote autour du point O) on a, en vertu de l'une des formules auxquelles nous venons de faire allusion, formule due à Newton,

$$\frac{d(A)}{d(I)} = \frac{OA \,.\, AT}{OB \,.\, BT}. \qquad (1)$$

Les droites BI et AI ayant chacune une direction constante, on a, d'après un cas particulier de la formule de Newton,

$$\frac{d(B)}{d(I)} = \frac{BR}{IR} = \frac{BT}{IS}, \qquad (2)$$

$$\frac{d(I)}{d(A)} = \frac{IS}{AS}. \qquad (3)$$

Multiplions (1), (2) et (3) membre à membre ; il vient, après des réductions évidentes,

$$1 = \frac{OA \,.\, AT}{OB \,.\, AS}$$

ou

$$\frac{AT}{AS} = \frac{OB}{OA} = \frac{Ob}{Oa},$$

a et b étant les pieds des perpendiculaires respectivement abaissées de A et de B sur Oy. Cette dernière égalité montre que les droites OA, aS et bT concourent en un même point H. De là ce théorème :

B *et* I *étant deux points correspondants des courbes* U *et* V, b *et* a, *les projections de ces points sur* Oy, *soient* T *et* S *les points où les tangentes respectives en* B *et* I *aux courbes* U *et* V *coupent la droite* Δ. *Les droites* bT *et* aS *se coupent sur le rayon vecteur* OB.

Grâce à ce théorème on pourra, par une construction sur

(*) *Journal de mathématiques élémentaires*, 1880, p. 450. Article intitulé : *Principes élémentaires de géométrie cinématique.*

la simplicité de laquelle nous n'avons pas à insister, déduire la tangente IS de la tangente BT, ou *vice versâ*.

2. — Nous allons maintenant donner une application d'un autre théorème qui se démontre au moyen des *Principes élémentaires de géométrie cinématique*, déjà cités.

Nous savons, d'après M. de Longchamps (*), que le lieu de l'orthocentre du triangle déterminé par le centre d'un cercle et une corde de ce cercle passant par un point fixe est une cubique unicursale passant par les ombilics du plan. Voyons comment on peut déterminer la normale à cette courbe, ce qui est une manière d'obtenir la tangente dont M. de Longchamps a demandé la construction.

Soient O le centre du cercle, P le point autour duquel pivote la corde AB.

L'orthocentre I du triangle AOB est évidemment, comme l'a remarqué M. de Longchamps, symétrique du pôle K de AB, par rapport au point M où OK coupe AB.

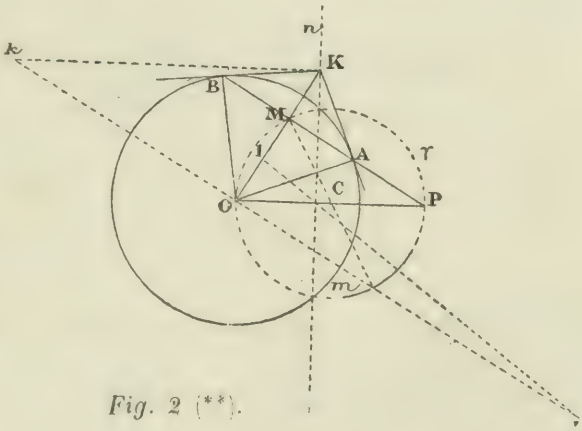


Fig. 2 (**).

Le point K décrit la polaire π du point B, c'est-à-dire une droite perpendiculaire à OP ; le point M décrit le cercle γ qui a OP pour diamètre. La courbe Γ décrite par le point I est donc ce que nous avons appelé *la transformée par symétrie de la droite π par rapport au cercle γ* (***).

Élevons alors au point O une perpendiculaire à OM. Cette perpendiculaire coupe respectivement en *i*, en *m* et en *k* les

(*) *Journal de Mathématiques spéciales*, 1885 p. 216, question 174.

(**) Cette figure présente une incorrection ; il faut supposer que *m* est au milieu de *ki*.

(***) Voir notre note *sur les transformations centrales des courbes planes* dans *Mathesis* (t. IV, 1882, p. 74).

normales aux trajectoires des points I, M et K; en vertu de la remarque que nous avons faite dans *Mathesis*, les points i et k sont symétriques par rapport au point m.

Or, la normale à la trajectoire du point K, c'est la parallèle à OP menée par ce point; la normale à la trajectoire du point M, c'est la droite qui joint ce point au milieu C de OP. Donc :

Si la parallèle menée à AB *par le point* O *coupe en* k *la parallèle menée à* OP *par le point* K, *et en* m *la droite qui joint le point* M *au milieu de* OP, *la normale à la trajectoire du point* I *est la droite qui joint ce point au symétrique de* k *par rapport à* m.

On peut observer que le lieu du point m est le cercle décrit sur OP, comme diamètre, et celui du point k, une parabole de sommet O et d'axe OP ayant pour paramètre la demi-distance du point O à la droite π.

FORMULE D'ABEL, GÉNÉRALISATION DU BINOME

Par M. **Poujade.**

Posons

$$\varphi_m(a, x) = x^m + \frac{m}{1} a (x+h)^{m-1} + \ldots$$

$$+ \binom{m}{n} a (a - nh)^{n-1} (x + nh)^{m-n} + \ldots + a (a - mh)^{m-1} \text{(*)}$$

Prenons la dérivée par rapport à a; en opérant sur le terme général et en réunissant les deux parties, nous avons

$$m\binom{m-1}{n-1}(a-h)(a-nh)^{n-2}(x+nh)^{m-n},$$

ce qui représente m fois le terme général de $\varphi_{m-1}(a-h, x+h)$;

(*) On sait que

$$\binom{m}{n} = \frac{n(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

Cette notation symbolique est due à Euler.

Le théorème en question a été démontré par Abel (*Journal de Crelle*, t. I). On trouvera une autre démonstration de cette formule remarquable dans les *Exercices de Frenet*, p. 408. G. L.

donc

$$\frac{d\,\varphi_m(a, x)}{da} = m\,\varphi_{m-1}(a - h,\quad x + h).$$

Dès lors, si l'on a

$$\varphi_{m-1}(a, x) = (x + a)^{m-1} = \varphi_{m-1}(a - h,\ x + h), \qquad (1)$$

il vient

$$\varphi_m(a, x) = (x + a)^m + \mathrm{K},$$

K désignant une constante indépendante de a; faisant $a = 0$, on trouve $\mathrm{K} = 0$, et

$$\varphi_m(a, x) = (x + a)^m. \qquad (2)$$

Or l'égalité (1) a lieu pour $m = 2$; elle est donc générale et l'on a

$$(x + a)^m = x^m + \ldots + \binom{m}{n} a\,(a - nh)^{n-1}\,(x + nh)^{m-n}$$
$$+ \ldots + a\,(a - mh)^{m-1}.$$

C. Q. F. D.

SUR LES COURBES PARALLÈLES

ET QUELQUES AUTRES COURBES REMARQUABLES

Par M. **G. de Longchamps.**

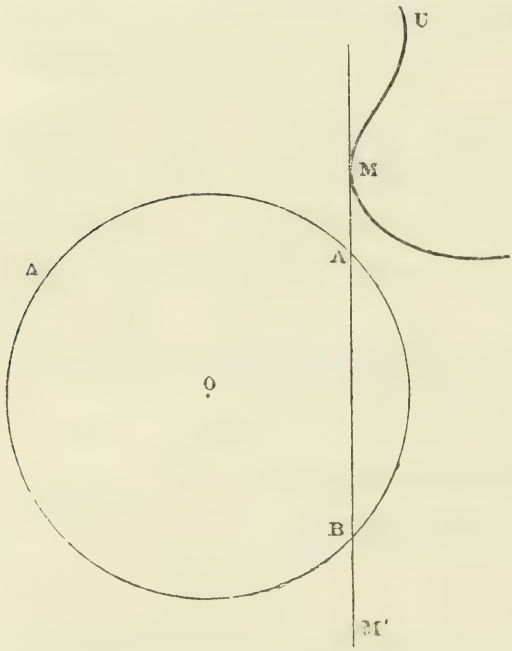
(*Suite*, voir p. 249.)

31. — La transformation que nous allons définir maintenant, appliquée au cas particulier que nous développons plus loin, va nous conduire à une quartique γ_4 qui nous paraît intéressante à plus d'un point de vue. Comme on va le voir, elle possède trois points doubles réels, trois axes de symétrie, et trois tangentes doubles réelles ; on la construit, point par point et tangente par tangente, par une construction des plus simples. Les quelques théorèmes que nous signalons sont ceux qui se présentent tout d'abord dans cette étude; mais nous pensons que, à l'exemple de l'hypocycloïde à trois rebroussements à laquelle elle se rattache si intimement et qui jouit de propriétés si remarquables, peu à peu découvertes, la courbe γ_4 possède de nombreuses et intéressantes propriétés que provoquera, nous l'espérons, une étude plus attentive de

cette courbe. Il est d'ailleurs très possible qu'elle ait été déjà rencontrée et, dans ce cas, ce que nous avons trouvé sur elle viendra peut-être s'ajouter aux travaux qu'elle a motivés.

32. — Quoi qu'il en soit, voici la transformation générale à laquelle nous avons fait allusion dans le paragraphe précédent.

Imaginons une courbe U et un cercle fixe Δ; U est la courbe que l'on veut transformer, Δ constitue la figure de référence. Menons à la courbe U une tangente qui rencontre Δ aux points A et B, puis prenons BM′ = MA. A tout point M de U correspond un point M′; et le lieu du point M′ est une certaine courbe V, transformée de U d'après la loi géométrique que nous venons d'indiquer.

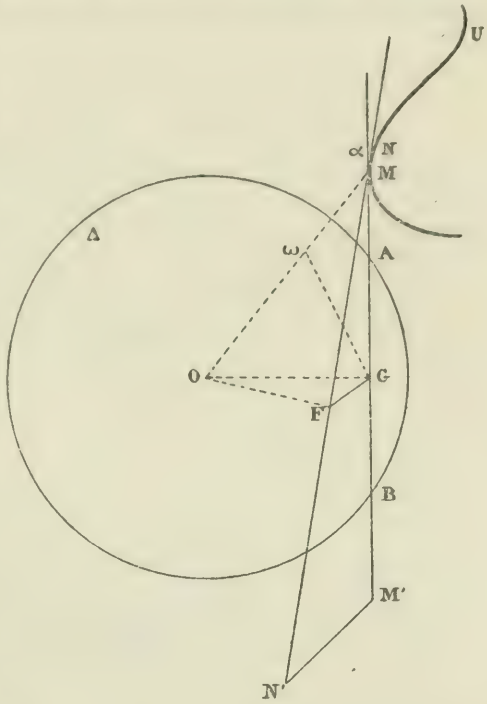


Prenons maintenant deux tangentes, infiniment voisines, à la courbe U et soient M′ et N′ les points correspondants sur V; il s'agit de déterminer la position limite de M′N′. Voici le principe connu, et dont nous donnons d'ailleurs un peu plus loin une démonstration qui permet de fixer cette position.

Dans un quadrilatère quelconque les quatre côtés, et la droite qui joint les milieux de deux côtés opposés, enveloppent une même parabole.

Si du point O, centre de Δ, on abaisse des perpendiculaires OG, OF sur MM′ et NN′, les points F et G sont placés aux milieux des segments MM′, NN′; ainsi, les droites MM′, NN′, MN, M′N′ et FG enveloppent une certaine parabole P et nous allons chercher ce que devient cette parabole quand la tangente NN′ vient se confondre avec MM′. En désignant par α le

point de concours des tangentes MM′, NN′, le cercle circonscrit au triangle MαN passe par le foyer de P et a pour position limite un cercle bien déterminé, savoir, celui qui est décrit, sur la droite qui joint le point M au centre de courbure correspondant à ce point, comme diamètre. D'autre part, la droite FG devient, à la limite, une perpendiculaire à la droite Δ′ qui joint G au milieu ω de OM. En résumé, la parabole P a pour position limite une parabole P′ qui est déterminée par les conditions suivantes : 1° elle passe par M tangentiellement à MM′ ; 2° son foyer est situé sur le cercle δ qui passe par M, tangentiellement à MM′, et par le centre de courbure correspondant à M ; 3° elle est encore tangente à une droite Δ′, passant par G, perpendiculairement à Gω.



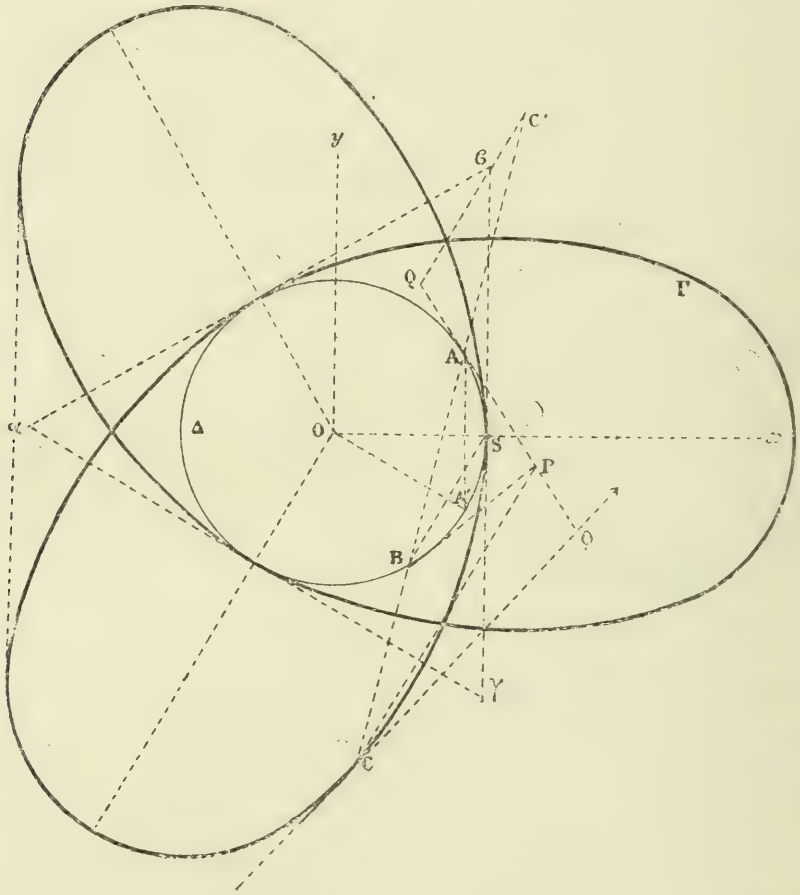
On voit que le foyer de P′ est à l'intersection de δ avec un cercle passant par M et par G tangentiellement à Δ′. Le foyer de P′ étant ainsi déterminé, on connaît la direction des diamètres et la tangente à V au point M′ s'obtient par diverses constructions connues, notamment par celle qui prend pour base le théorème de Poncelet.

Nous allons maintenant quitter ces généralités pour appliquer la précédente transformation au cas simple auquel nous avons fait allusion tout à l'heure.

33. — Soit un cercle Δ et, sur ce cercle, un point fixe S; si l'on prend un point A, arbitrairement sur la circonférence, puis un point B, tel que l'on ait

arc SB = 2 fois arc SA,

en prolongeant BA d'une longueur égale à elle-même, on obtient le point C′ dont le lieu géométrique est la courbe nommée *hypocycloïde à trois rebroussements* (*).



Si, au contraire, on prolonge AB jusqu'en C, de façon a avoir

$$BC = AB,$$

le lieu du point C est une courbe γ_4 dont nous allons indiquer quelques propriétés.

34. Théorème. — *La courbe γ_4 est une quartique unicursale; elle admet trois points doubles réels et trois axes de symétrie.*

Soient x', y' les coordonnées de A; x'', y'' celles de B. Calculons d'abord celles-ci en fonction de x' et de y'.

(*) Voyez *Journal*, 1884, p. 169.

Si nous prenons le point A′ $(x', -y')$ symétrique de A par rapport à ox, la droite SB sera perpendiculaire sur oA′. Cette remarque permet de calculer x'' et y'', en fonction de x' et de y', et un calcul simple donne

$$x'' = 4(x'^2 - y'^2) = 8x'^2 - \frac{1}{4}, \qquad y'' = -8x'y'.$$

Dans ces formules, le rayon du cercle a été pris égal à $\frac{1}{4}$; valeur qui s'est présentée dans l'étude que nous avons faite de l'hypocycloïde à trois rebroussements *(loc. cit.)*.

En désignant par x, y les coordonnées de C, nous avons

$$x + x' = 2x'', \quad y + y' = 2y'',$$

et, par conséquent,

$$x = 16x'^2 - \frac{1}{2} - x', \quad y = -16x'y' - y'. \qquad (1)$$

Pour exprimer x et y au moyen d'un seul paramètre t, il suffit de considérer le cercle comme une courbe unicursale et, à cet effet, en désignant par t le coefficient angulaire de SA′, droite qui est parallèle à AB, on pose

$$-t = \frac{y'}{x' - \frac{1}{4}} = \frac{x' + \frac{1}{4}}{y'}.$$

De ces égalités on tire

$$4x' = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \text{et} \quad 2y' = \frac{t}{1 + t^2}.$$

D'après cela, les formules (1) donnent, finalement,

$$4x = \frac{t^4 - 12t^2 + 3}{(1 + t^2)^2}, \quad \text{et} \quad 2y = \frac{t(3 - 5t^2)}{(1 + t^2)^2}. \qquad (A)$$

35. Équation cartésienne de γ_4. — En cherchant l'équation cartésienne de cette courbe, en éliminant, par exemple, x' et y' entre les égalités (1) et la relation

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{16},$$

on trouve

$$(16x^2 + 16y^2 + 4x - 3)^2 = 4(3 - 16x)\left(y^2 - 3x^2 - x + \frac{3}{16}\right)$$

ou, après développement,

$$\overline{16}^2 y^4 + 4y^2(8.16x^2 + 48x - 27) + (4x - 1)(4x - 3)$$
$$\left(4x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Si l'on veut rétablir la forme homogène, on divisera par $\overline{16}^2$ et en remplaçant $\frac{1}{4}$ par R, on a

$$y^4 + y^2\left(2x^2 + 3Rx - \frac{27}{4}R^2\right) + (x - R)(x - 3R)$$
$$\left(x + \frac{3R}{2}\right)^2 = 0.$$

36. Équation polaire de γ_4. — L'équation de γ_4 en coordonnées polaires est, d'après cela,

$$\rho^4 + R\rho^3 \cos\omega(3\sin^2\omega - \cos^2\omega) - \frac{27}{4}R^2\rho + \frac{27}{4}R^4 = 0,$$

ou

$$\rho^4 - R\rho^3 \cos 3\omega - \frac{27}{4}R^2\rho^2 + \frac{27}{4}R^4 = 0. \qquad (F)$$

De cette équation on tire plusieurs conséquences.

En discutant la valeur de $\cos 3\omega$, qui doit être comprise entre $+1$ et -1, on est d'abord conduit aux deux inégalités :

$$(\rho - R)(\rho - 3R)\left(\rho + \frac{3}{2}\right)^2 < 0,$$
$$(\rho + R)(\rho + 3R)\left(\rho - \frac{3}{2}\right)^2 > 0.$$

Cette dernière est toujours vérifiée en supposant ρ positif; l'autre exige que ρ soit compris entre R et 3R; la courbe γ_4 est donc renfermée, tout entière, entre les deux cercles Δ, Δ', que nous appellerons le *cercle inscrit* et le *cercle circonscrit* à γ_4. Nous nommerons *point central* de γ_4 le centre commun à ces deux cercles; ce point est aussi le point de concours des axes de symétrie de γ_4.

En effet, on voit que ρ ne dépendant que de $\cos 3\omega$, l'axe ox et les droites qui, partant de l'origine, font des angles de 60° ou de 120° avec ox, sont des axes de symétrie de γ_4.

En faisant $$\omega = 60^\circ,$$

on a $$(\rho + R)\left(\rho + 3R\left(\rho - \frac{3}{2}\right)^2\right) = 0,$$

on aperçoit le point double situé sur le rayon vecteur considéré à une distance de l'origine égale à $\frac{3}{2}$. Les tangentes, à l'un des points doubles, sont inclinées sur l'axe correspondant d'un angle φ, donné par la formule

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Ce dernier résultat s'obtient assez vite au moyen des formules (A). Ces formules donnent

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t\,(7t^2 - 9)}{(1 + t^2)^3}, \quad 2\frac{dy}{dt} = \frac{5t^4 - 24t^2 + 3}{(1 + t^2)^3}.$$

Le point double situé sur ox correspond à l'une ou l'autre des racines de l'équation

$$5t^2 = 3$$

et, pour ces valeurs, $\frac{dy}{dx}$ prend la valeur indiquée.

La tangente double qui est perpendiculaire à l'axe ox se détermine très facilement en écrivant que $\frac{dx}{dt}$ est nul, on a ainsi

$$7t^2 = 9,$$

et par suite

$$x = -R\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right).$$

La droite cherchée passe un peu à gauche du sommet α du triangle équilatéral obtenu en menant les tangentes aux points de contact de Γ avec son cercle inscrit.

De ces renseignements on déduit la forme générale de la courbe; proposons-nous maintenant de construire la tangente en un de ses points.

37. Tracé de la tangente à γ_4. — La construction que nous allons indiquer repose sur une remarque préliminaire que nous énonçons ainsi : *Étant donné un triangle* ABC, *si l'on prend sur ses côtés*

$$PB = QP,$$
$$CR = RS,$$

les droites PR *et* QS *sont tangentes à une parabole inscrite au triangle et l'axe de cette parabole est parallèle à la transversale réciproque de* RP (ou à celle de QS) *par rapport au triangle* ABC.

En effet, si nous prenons $AR' = RC$ et $AP' = PB$, $R'P'$ est la transversale réciproque de PR ; celle de QS′ est évidemment parallèle à P′R′, puisqu'on a

$$AS' = 2AR' \quad \text{et} \quad AQ' = 2AP'.$$

Mais on sait que, dans la transformation par transversales réciproques, au point qui est à l'infini dans une direction donnée correspond une parabole inscrite au triangle de référence et, en outre, que les diamètres de la parabole sont parallèles à la direction proposée.

Cela posé, si nous prenons sur le cercle Δ deux positions infiniment voisines, et si nous observons que la droite CC′ est tangente en C′ à l'hypocycloïde, nous pourrons dire que les tangentes en A et B au cercle Δ et la tangente cherchée enveloppent une certaine parabole Π passant par le point C′, tangentiellement à CC′.

Si nous transformons par transversales réciproques cette parabole Π, par rapport au triangle PAB : 1° à la tangente ABC′ correspond la droite PC ; 2° à Π correspond un point à l'infini dans la direction PC. D'après cela, si nous menons C′Q parallèlement à PC et si nous prenons $PQ' = QA$, la droite CQ′, transversale réciproque de C′Q, est tangente à Π. Concluons donc que CQ′ est la tangente en C à la courbe Γ.

Enfin, pour terminer ce que nous voulons signaler sur γ_4, voici deux propriétés qui résultent encore immédiatement de son équation polaire.

38. Théorème. — *Les transversales menées à* γ_4 *par son point central, coupent la courbe en quatre points réels, tels que le produit de leurs distances au point central est constant.*

En effet, l'équation (F) prouve que, quel que soit ω, le produit des racines de cette équation en ρ est constant.

39. Théorème. — *Si l'on coupe* Γ *par un cercle concen-*

trique au point central, on obtient six points qui, joints de deux en deux, donnent deux triangles équilatéraux.

En effet, l'équation (F), lorsqu'on suppose que ρ est donné, fait connaître la valeur de $\cos 3\omega$. Si l'on désigne par 3α le plus petit arc positif qui correspond à ce cosinus, on aura

$$3\omega = 3\alpha + 2k\pi,$$

ou

$$3\omega = 2k\pi - 3\alpha.$$

La première égalité donne trois points ayant pour coordonnées polaires

$$(\rho, \alpha); \quad (\rho, \alpha + 120^\circ); \quad (\rho, \alpha + 240^\circ).$$

Ces points forment donc un triangle équilatéral. La deuxième égalité fait connaître les sommets de l'autre triangle équilatéral dont fait mention l'énoncé.

(A suivre.)

QUESTIONS D'EXAMENS

38. — *Soit* f (x) = o *une équation du troisième degré:* a, b, c *désignant ses trois racines, on propose de former l'équation dont les racines sont*

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{a}, \quad \frac{ca}{b}.$$

Posons $y = \frac{bc}{a}$ et cherchons, d'après cette formule, l'équation transformée.

La formule de transformation peut s'écrire

$$y = \frac{abc}{a^2},$$

ou

$$y = \frac{-r}{x^2}, \qquad (1)$$

x représentant une racine quelconque de l'équation donnée

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$x = r\,\frac{p - y}{qy - r}.$$

On trouve, après calcul,

$$ry^3 + (q^2 - 2pr)\,y^2 + r\,(p^2 - 2q)\,y + r^2 = 0.$$

Remarque. — On arrive aussi à ce résultat, et même un peu plus rapidement, en calculant les fonctions symétriques:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}; \quad a^2 + b^2 + c^2.$$

39. — *Discuter les surfaces qui correspondent à l'équation*

$$\mathrm{ayz} + \mathrm{bzx} + \mathrm{cxy} + \mathrm{d} = 0.$$

On supposera d'abord $abc \neq 0$. En considérant une génératrice Ox du cône asymptote ($y = 0$, $z = 0$) et en cherchant à placer sur la surface proposée une droite parallèle à Ox ($y = \lambda$, $z = \mu$), on trouve que ce dernier problème est possible ou impossible suivant que $abcd$ est positif ou négatif.

La surface est un hyperboloïde à deux nappes, quand on a $abcd > 0$; un hyperboloïde à une nappe, dans le cas contraire.

Enfin, si l'on suppose $abc = 0$, l'équation représente un cylindre hyperbolique.

C'est ainsi que l'on vérifie immédiatement que l'équation

$$\frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + 1 = 0$$

représente un hyperboloïde à deux nappes.

Remarque. — Prenons maintenant l'équation plus générale

$$ayz + bzx + cxy + mx + ny + pz + d = 0,$$

et appliquons-lui le même procédé. On vérifie facilement le tableau suivant

$$abc \neq 0 \begin{cases} \mathrm{H} > 0 & \textit{Hyperboloïde à une nappe.} \\ \mathrm{H} < 0 & \textit{Hyperboloïde à deux nappes.} \\ \mathrm{H} = 0 & \textit{Cône.} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a = 0 \\ bc \neq 0 \end{matrix} \begin{cases} \mathrm{H} \neq 0 & \textit{Paraboloïde hyperbolique.} \\ \mathrm{H} = 0 & \textit{Cylindre hyperbolique.} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{matrix} \begin{cases} p \neq 0 & \textit{Paraboloïde hyperbolique.} \\ p = 0 & \textit{Cylindre hyperbolique.} \end{cases}$$

Dans ce tableau, H désigne le Hessien de la forme qui con-

stitue le premier membre de l'équation proposée. On a ici

$$16\,\Pi = a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2 - 2bcnp - 2acmp - 2abmn + 4abcd.$$

Il va sans dire que ces résultats peuvent être obtenus par les autres méthodes connues, mais la précédente est particulièrement recommandable quand on aperçoit une génératrice réelle du cône asymptote. *(A suivre.)*

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (1885)

ADMISSIBILITÉ

Mathématiques (4 heures). — Construire la courbe représentée par l'équation :

$$(y - x + 1)(y + x + 1)(x - y + 1) = 1.$$

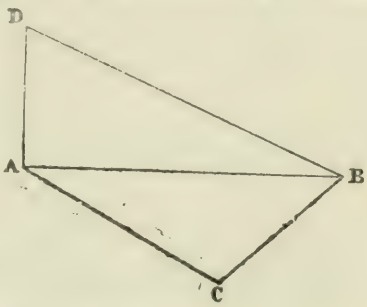
On exposera clairement la méthode employée pour construire un point de la courbe et la tangente en ce point. (3 juillet 1885.)

ADMISSION

Mathématiques. — On donne une parabole $y^2 = 2\,px$. Trouver le lieu des points tels que le cercle passant par les points de contact des tangentes issues de ce point et par le sommet de la parabole ait un rayon constant R.

Trigonométrie. — Dans le quadrilatère DACB on donne : AC = 251,328 ; CB = 219,912 ; BD = 106,85976 ; BAC = 27° 47′ 44″,77 ; DBA = 67° 22′ 48″48 et DAB = 90°.

Calculer les autres éléments et la surface. (3 août 1885.)



CONCOURS SUPPLÉMENTAIRE D'OCTOBRE

On a un triangle rectangle ABC et l'on considère les hyperboles équilatères circonscrites. Du sommet de l'angle droit on mène des normales à ces coniques Trouver le lieu des pieds de ces normales.

QUESTION 77

Solution par M. Vèzes, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Bordeaux.

Étant donnée une ellipse, on décrit, de l'un des foyers comme centre, de F *par exemple, une circonférence de rayon égal à l'ordonnée de ce point. Au point* F *correspond une directrice* KK′.

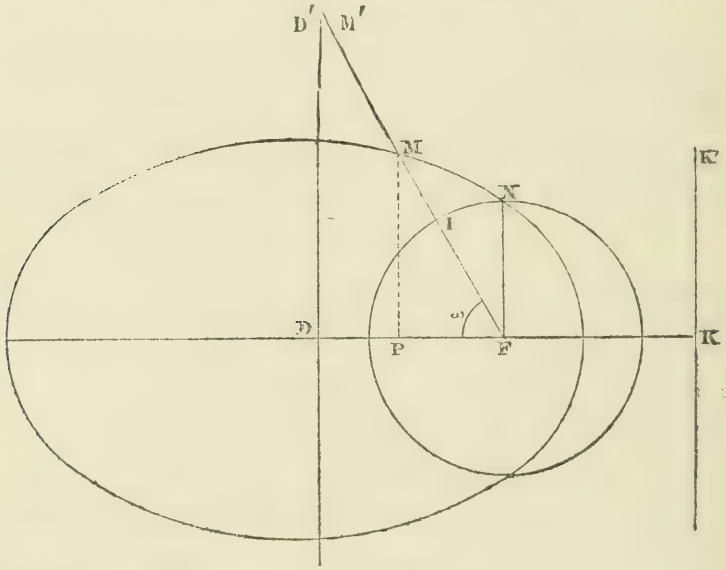
On prend la droite DD′ *symétrique de la directrice par rapport à* F, *et on mène du point* F *le rayon vecteur* FIMM′, *rencontrant le cercle, l'ellipse et la droite* DD′ *respectivement aux points* I, M *et* M′. *Prouver que* IM . IM′ = p², p *étant l'ordonnée du foyer.* (X. Antomari.)

On a

$$IM \,.\, IM = (FM - p)(FM' - p),$$

ou

$$IM \,.\, IM' = FM \,.\, FM' - p\,(FM + FM') + p^2.$$



Or les triangles semblables FM′D, FMP donnent

$$\frac{FM'}{FM} = \frac{FD}{FP},$$

d'où

$$IM \,.\, IM' = \overline{FM}^2 \,.\, \frac{FD}{FP} - p \,.\, FM\left(1 + \frac{FD}{FP}\right) + p^2;$$

ou, en observant que FP + FD = PK,

$$IM \,.\, IM' = \frac{FM}{FP}\left(FMFD - p \,.\, PK\right) + p^2.$$

D'autre part, en écrivant que les rapports des distances des points M et N au foyer et à la directrice sont égaux, on a encore

$$\frac{FM}{PK} = \frac{p}{FK};$$

et, comme FK = FD, il vient

$$FM \,.\, FD - p \,.\, PK = 0.$$

Cette égalité prouve que

$$IM \,.\, IM' = p^2.$$

Nota. — Si l'on observe que

$$\frac{1}{FM} = \frac{1 - e \cos \omega}{p} = \frac{a - c \cos \omega}{b^2}$$

et que

$$\frac{1}{FM'} = \frac{\cos\omega}{FD} = \frac{c \cos \omega}{b^2},$$

on a immédiatement

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{a}{b^2} = \frac{1}{p},$$

ou

$$\frac{1}{MI + p} + \frac{1}{M'I + p} = \frac{1}{p}.$$

Cette égalité donne finalement

$$IM \,.\, IM' = p^2.$$

G. L.

QUESTION 103

Solution par M. J. Rat, élève au Lycée de Marseille (classe de M. Amigues).

Lieu des sommets des paraboloïdes qui passent par une parabole donnée et par deux points donnés symétriques par rapport au plan de la parabole. On distinguera les parties du lieu qui sont des sommets de paraboloïdes elliptiques et celles qui sont des sommets de paraboloïdes hyperboliques. (E. Amigues.)

Prenons pour axe des x l'axe des y et la tangente au sommet de la parabole, et pour axe des z la perpendiculaire menée par l'origine au plan de la parabole.

Soit $y^2 - 2px = 0$ l'équation de la parabole. L'équation générale des surfaces du second ordre qui passent par cette parabole est

$$y^2 - 2px + z(ax + by + cz + d) = 0.$$

Si on exprime que cette équation représente des paraboloïdes, on a la condition

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = 0,$$

d'où on tire

$$a = 0.$$

L'équation générale des paraboloïdes qui passent par la parabole donnée, est donc

$$y^2 - 2px + z(by + cz + d) = 0.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un des points par où doivent passer ces paraboloïdes. Les coordonnées de l'autre point, symétrique du premier par rapport au plan de la parabole, seront x_0, y_0, $-z_0$. Si on exprime que les paraboloïdes précédents passent par ces deux points, on trouve les deux conditions

$$y_0^2 - 2px_0 + z_0(by_0 + cz_0 + d) = 0$$

et

$$y_0^2 - 2px_0 - z_0(by_0 - cz_0 + d) = 0$$

d'où on tire

$$d = -by_0,$$

et

$$c = \frac{-(y_0^2 - 2px_0)}{z_0^2}.$$

L'équation générale des paraboloïdes considérés est donc

$$y^2 - 2px + z\left[b(y - y_0) - \frac{(y_0^2 - 2px_0)z}{z_0^2}\right] = 0,$$

ou bien en posant

$$\frac{-b}{y^2 - 2px_0} = \lambda,$$

λ étant un paramètre variable :

$$z_0^2(y^2 - 2px) - (y_0^2 - 2px_0)z[\lambda(y - y_0) + z] = 0.$$

L'axe de chacun de ces paraboloïdes est parallèle à l'axe des x, puisque dans un paraboloïde toutes les paraboles de section ont leurs axes parallèles à l'axe du paraboloïde.

Soient α, β, γ les coordonnées du sommet d'un de nos

paraboloïdes; les équations de l'axe de ce paraboloïde seront donc

$$\frac{x-\alpha}{1}=\frac{y-\beta}{0}=\frac{z-\gamma}{0}.$$

Pour que cette droite soit l'axe du paraboloïde, il faut et il suffit que le plan tangent à la surface au point (α, β, γ) soit perpendiculaire à la droite. Le plan tangent à la surface au point (α, β, γ) a pour équation

$$\begin{aligned}2pz_0^2x + {} & [\lambda\gamma(y_0^2-2px_0)-2\beta z_0^2]y \\ & + (y_0^2-2px_0)[\lambda(\beta-y_0) \\ & \qquad + 2\gamma]z + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Si on exprime que ce plan est perpendiculaire à la droite précédente, on a les relations

$$\lambda\gamma(y_0^2-2px_0)-2\beta z_0^2=0 \qquad (1)$$

et

$$\lambda(\beta-y_0)+2\gamma=0.$$

D'autre part, si on exprime que le point (α, β, γ) est sur le paraboloïde, on a

$$z_0^2(\beta^2-2p\alpha)-(y_0^2-2px_0)\gamma[\lambda(\beta-y_0)+\gamma]=0.$$

On obtiendra donc le lieu du sommet α, β, γ, en éliminant le paramètre variable λ entre les équations (1), (2) et (3), ce qui donne comme lieu la courbe, intersection des deux surfaces du second degré :

$$z_0^2(y^2-2px)+(y_0^2-2px_0)z^2=0,$$

et

$$(y_0^2-2px_0)z^2+y(y-y_0)z_0^2=0.$$

Si on élimine z entre ces deux équations, on a l'équation de la projection du lieu sur le plan des xy :

$$yy_0-2px=0.$$

Cette projection étant une droite, il s'ensuit que la courbe qui constitue le lieu est une conique, intersection du cylindre

$$(y_0^2-2px_0)z^2+y(y-y_0)z_0^2=0,$$

avec un plan perpendiculaire au plan des xy :

$$yy_0-2px=0.$$

Pour étudier la nature de cette conique, il suffit d'étudier celle de sa projection sur le plan des yz, laquelle a pour équation

$$(y_0^2-2px_0)z^2+y(y-y_0)z_0^2=0.$$

Supposons d'abord que l'on ait

$$y_0^2 - 2px_0 > 0,$$

c'est-à-dire que la projection commune sur le plan des xy des deux points fixes, par lesquels passent tous les paraboloïdes de la question, soit en dehors de la parabole $y^2 - 2px = 0$. Alors la projection du lieu et, par suite, la conique elle-même sera une ellipse. Le centre de l'ellipse de projection est situé sur Oy et à une distance de l'origine O égale à $+\frac{y_0}{2}$. L'ellipse a d'ailleurs ses axes parallèles aux axes des coordonnées, et elle est tangente à l'axe des z, à l'origine.

Supposons maintenant que l'on ait

$$y_0^2 - 2px_0 < 0,$$

c'est-à-dire que la projection commune sur le plan des xy des deux points fixes, par lesquels passent les paraboloïdes, soit à l'intérieur de la parabole $y^2 - 2px = 0$. Alors la conique du lieu est une hyperbole. Les principaux éléments de la projection de cette conique sur le plan des yz, projection qui est une hyperbole, sont disposés d'une manière analogue à ceux de l'ellipse précédente. Les sommets réels de cette hyperbole sont situés sur l'axe des y; l'un est à l'origine, l'autre A est à une distance de l'origine égale à $+ y_0$.

Les paraboloïdes considérés seront elliptiques, si les plans directeurs sont imaginaires ; hyperboliques, si les plans directeurs sont réels. La condition de réalité des plans directeurs est

$$(y_0^2 - 2px_0)[\lambda^2(y_0^2 - 2px_0) + 4z_0^2] > 0.$$

Supposons qu'on ait $y_0^2 - 2px_0 > 0$. Alors les plans directeurs sont toujours réels, et les paraboloïdes considérés sont des paraboloïdes hyperboliques.

Supposons, en second lieu, qu'on ait $y_0^2 - 2px_0 < 0$. Alors les plans directeurs seront réels, si l'on a

$$\lambda^2(y_0^2 - 2px_0) + 4z_0^2 < 0 ;$$

imaginaires, dans le cas contraire.

Si on tire la valeur de λ, donnée par l'équation (2),

$$\lambda = \frac{-2\gamma}{(\beta - y_0)},$$

et si on substitue dans l'équation précédente, on a en remplaçant β et γ par y et z, la surface

$$(y_0^2 - 2px_0) + z_0^2(y - y_0)^2 = 0.$$

Elle se compose de deux plans perpendiculaires au plan des yz, qui séparent les parties du lieu qui sont des sommets de paraboloïdes elliptiques de celles qui sont des sommets de paraboloïdes hyperboliques. Les traces des deux plans précédents sur le plan des yz se composent des parallèles aux asymptotes de l'hyperbole, projection du lieu, menées par le sommet A de l'hyperbole. Si le point (x, y) est à l'origine, la quantité $(y_0^2 - 2px_0)z^2 + z_0^2(y - y_0)^2$ est positive. Par suite, toute la branche de l'hyperbole, qui est située dans la région de l'origine par rapport aux droites séparatrices, correspond à des paraboloïdes elliptiques. On voit de même que l'autre branche correspond à des paraboloïdes hyperboliques.

NOTA. — La même question a été résolue par M. Marchis, à Rouen.

QUESTION 107

Solution par M. TISSIER, à Poitiers.

On sait que le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle est un cercle; démontrer que ce cercle est conjugué par rapport au triangle.

Prenons deux côtés du triangle comme axes des x et des y; soient a et b les grandeurs de ces côtés et θ l'angle qu'ils comprennent.

L'équation générale des coniques inscrites dans ce triangle est

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2(bx + ay - ab)^2 - 2ABxy$$
$$- 2C(By + Ax)(bx + ay - ab) = 0,$$

ou bien

$$M^2x^2 + 2P^2xy + N^2y^2 + 2Cab(Mx + Ny) + C^2a^2b^2 = 0,$$

en posant

$$M = A - Cb,\ N = B - Ca,\ P^2 = C^2ab - C(Aa + Bb) - AB.$$

La condition pour que l'hyperbole soit équilatère est

$$M^2 + N^2 - 2P^2 \cos\theta = 0. \qquad (1)$$

Les équations du centre sont

$$\left.\begin{aligned} M^2x + P^2y + MCab &= 0 \\ N^2y + P^2x + NCab &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Et en portant dans l'expression de P^2 les expressions de A et B en fonction de M, N, C on a

$$P^2 + MN + 2\,[C^2ab + C(Ma + Nb)] = 0. \qquad (3)$$

Les quatre équations (1), (2), (3) sont homogènes et du second degré par rapport aux paramètres M, N, P et C; en les éliminant on aura l'équation du lieu.

Les équations (2) donnent immédiatement par élimination de C

$$(M^2x + P^2y)N = (N^2y + P^2x)M,$$

d'où

$$Mx - Ny = 0.$$

Posons

$$\frac{M}{y} = \frac{N}{x} = \lambda.$$

On en tire

$$M = \lambda y, \quad N = \gamma x.$$

Multiplions les équations du centre respectivement par y et x et ajoutons membre à membre; on aura, en remplaçant $M^2 + N^2$ par $2P^2 \cos\theta$,

$$P^2(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) + Cab(My + Nx) = 0. \qquad (4)$$

Remplaçons dans (1), (3) et (4) M et N et fonction de λ, on aura les trois équations :

$$\lambda^2(x^2 + y^2) - 2P^2\cos\theta = 0, \qquad (1)'$$

$$P^2 + \lambda^2xy + 2[C^2ab + \lambda C(bx + ay)] = 0, \qquad (3)'$$

$$P^2(x^2 + 2xy\cos\theta + y^2) + \lambda\, Cab(x^2 + y^2) = 0. \qquad (4)'$$

En tirant de (1)'

$$P^2 = \frac{\lambda^2(x^2 + y^2)}{2\cos\theta}$$

et portant dans les deux autres elles deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda^2(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta) + 4\cos\theta\,[C^2ab + \lambda\, C(bx + ay)] = 0, \\ &\frac{\lambda}{C} = -\frac{2ab\cos\theta}{x^2 + 2xy\cos\theta + y^2}. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant λ et C par les quantités proportionnelles

dans la première équation, on effectuera l'élimination; on a ainsi l'équation

$$x^2 + 2xy \cos \theta + y^2 + [ab - 2(bx + ay)] \cos \theta = 0$$

qui représente un cercle.

Il est facile de voir que ce cercle est conjugué par rapport au triangle; en effet, multiplions par ab les deux membres, on peut écrire cette équation :

$$ab(x^2 + 2xy \cos \theta + y^2) + (bx + ay - ab)^2 \cos \theta$$
$$- (bx + ay)^2 \cos \theta = 0,$$

ou bien

$$b(a - b \cos \theta)x^2 + a(b - a \cos \theta)\, y^2$$
$$+ (bx + ay - ab)^2 \cos \theta = 0.$$

Ce qui est l'équation d'un cercle conjugué par rapport au triangle dont les trois côtés ont pour équation

$$x = 0, \quad y = 0, \quad bx + ay - ab = 0.$$

NOTA. — La même question a été résolue par M. Michelin, à Lyon.

QUESTIONS PROPOSÉES

184. — Résoudre le système suivant :

$$yz - u^2 = a, \qquad vw - xu = d,$$
$$zx - v^2 = b, \qquad wu - vy = e,$$
$$xy - w^2 = c, \qquad uv - wz = f;$$

dans lequel x, y, z, u, v, w sont des inconnues et a, b, c, d, e, f des quantités données. *(W.)*

185. — On considère un triangle équilatéral de côté a et la courbe γ_4 qui correspond à l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \pm \frac{1}{\sqrt{y}} \pm \frac{1}{\sqrt{a - x - y}} = 0,$$

les axes de coordonnées étant deux côtés du triangle considéré :

1° Construire la courbe qui correspond à cette équation;

2° Par l'origine O, on mène une transversale qui rencontre γ_4, abstraction faite de l'origine, en deux autres points M, N ; on prend le point I conjugué harmonique de O par rapport au segment MN. Trouver le lieu décrit par I ; ce lieu est une cubique. *(G. L.)*

186. — Soit un triangle ABC.

Démontrer que l'on peut faire passer une hyperbole équilatère par les points suivants : A, B, C, H (centre du cercle circonscrit), H′ (point de concours des hauteurs), K (centre des médianes antiparallèles), M′ (point de concours des droites qui joignent les sommets aux centres des cercles circonscrits aux triangles ABH, ACH, BCH). Trouver le centre de cette hyperbole, les asymptotes, le paramètre. *(Boubals).*

Errata. — Page 13, ligne 2 de la note, au lieu de (ϒ), lisez (Γ).

Page 23, ligne 8 de la question 167, au lieu de *démontre que*, lisez démontrer que.

Page 23, ligne 2 de la question 168, au lieude *comme à*, lisez «commune à».

Page 107, ligne 7, en remontant, au lieu de menée *sur* le point E, lisez « par ».

Page 114, lignes 8 et 9, en remontant, au lieu de

$$\frac{(t+1)^m + (t-1)^m}{2},$$

$$\frac{(t+1m) + (t-1)^m}{2t};$$

lisez

$$\frac{(t+1)^m + (1-t)^m}{2}$$

$$\frac{(t+1)^m - (1-t)^m}{2t}.$$

Page 187; ligne 1, au lieu de

$$\frac{mx+n}{x_2+1}.$$

lisez

$$\frac{mx+n}{x^2+1}.$$

N. B. — D'autres errata ont été signalés pp. 120, 172, 191, 240.

Questions proposées en 1882 et non résolues : nos 11, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 33 et 38.

Le Directeur-Gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX.
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26830-5.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Pages.

Géométrie analytique.

Sur les tangentes communes à un cercle et à une parabole, par M. *J. Neuberg* . . . 9, 25, 55, 73, 9
Propriété de l'hyperbole des neuf points et de six paraboles remarquables, par M. *H. Brocard* 12, 30, 58, 76, 104, 123
Note, par M. *Henry Bourget*. 66
Indications sur un point de la théorie des surfaces homofocales, par M. *G. Kœnigs*. 83, 102
La loxodromie, par M. *R*. 85
Sur la convexité des courbes planes, par M. *Ed. Lucas* 99
Note sur l'équation en λ, par M. *Ed. Amigues* 145, 169
Sur les points multiples des courbes planes, par M. *Porchon*. 147, 170
Sur la construction de Chasles, par *G. L*. 156
Sur les points associés du plan d'un triangle, par M. *Em. Lemoine* 193, 217, 241
Note de géométrie comparée, par M. *Henry Bourget*. . 203

Algèbre.

Théorème d'algèbre, par M. *Cretin* 6
La première leçon sur la théorie des équations, par M. *G. de Longchamps* 16, 36, 68, 86, 112
Démonstrations élémentaires, relatives à la théorie des nombres, par M. *S. Realis* 97, 121
Sur la résolution algébrique de l'équation du troisième degré, par M. *Poujade*. . 151
Sur la formule d'Abel, par M. *Poujade* 268

Géométrie pure.

Théorèmes sur les coniques, M. *E. Catalan* 3
Note sur la transformation réciproque de M. G. de Longchamps, par M. *M. d'Ocagne* 15
Note sur une transformation tangentielle réciproque, par M. *M. d'Ocagne*. 33
Sur les podaires, par M. *M. d'Ocagne* 64, 80
Sur les courbes parallèles et quelques autres courbes remarquables, par M. *G. de Longchamps* 131, 153, 176, 199, 226, 249, 269
Sur les courbes sectrices, par M. *Schoute* 172, 196, 219, 345
Sur une transformation centrale, par M. *Le Pont* 207, 224
Sur quelques courbes remarquables, par M. *M. d'Ocagne* 265

Pages.

Correspondance.

Extrait d'une lettre de M. *Amigues*, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Marseille. . 21
— d'une lettre de M. *Hadamard*, élève à l'école normale supérieure. 41
- d'une lettre de M. *Causse*, boursier d'agrégation à la faculté de Montpellier. . 93
— d'une lettre de M. *S. Realis*, ingénieur à Turin. . . . 115
-- d'une lettre de M. *Catalan*, professeur émerite à l'Université de Liège . . 229
— d'une lettre de M. *B. Hanumenta Rau*, professeur à l'école normale de Madras 256
— d'une lettre de M. *Brocard*, capitaine du génie à Montpellier. 257

Questions diverses.

Questions d'examen 22, 42, 69, 89, 116, 138, 165, 184, 214, 234, 254, 277
Ecole centrale (1884, seconde session; énoncé) . 44
Notice biographique sur *Vazeille*. 42
Discours de M. *Dubief* . . 59

Pages.

Discours de M. l'abbé *Prudham*. 53
Théorie des aires et des volumes, par M. *E. Calinon* 134, 163, 181, 212
Ecole Polytechnique (1885, solutions, énoncé). 159, 233
Concours général (1885, énoncé) 167
Ecole normale (1885, solution géométrique) . . . 180
Agrégation (1885, énoncé). 187
Ecole centrale (1885 énoncé) 188
Ecole normale (1885, solution de la question de géométrie descriptive) . 210
Ecole des mines de Saint-Etienne 279

Bibliograghie.

Exercices de géométrie descriptive, par *F. I. C.* 117
Coordonnées parallèles et axiales, par M. *M. d'Ocagne* 141

Questions proposées.

Questions 138 à 186.

Questions résolues.

Questions 53, 115, 101, 102, 98, 105, 77, 103, 107.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

AMIGUES, *professeur de mathématiques spéciales au lycée de Marseille*, 21, 144, 145, 169, 173, 239, 281.

ANTOMARI, *professeur de mathématiques spéciales au lycée de Rennes*, 280.

BÈCHE, *professeur à l'Ecole Normale de Tulle*, 191.

BELLANDO, *à Marseille*, 263.

BOUBALS, *professeur à l'Ecole du Génie à Montpellier*, 288.

HENRY BANGET, *élève de mathématiques spéciales au lycée de Clermont-Ferrand*, 66, 203.

BROCARD, *capitaine du génie à Montpellier*, 12, 30, 58, 76, 104, 123.

J. C., 210.

CALINON, *ancien élève de l'École Polytechnique*, 134, 163, 181.

CAUSSE, *boursier d'agrégation à Montpellier*, 93.

CATALAN, *professeur émérite à l'Université de Liège*, 3, 229.

LÉON CLÉMENT, *élève au lycée de Rouen*, 72.

CRETIN, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis*, 6, 72, 95, 119.

FERVAL, *élève au lycée Henri IV*, 47, 72.

FESQUET, *élève au lycée de Nîmes*, 93.

GIAT, *élève du Lycée Saint-Louis*, 191, 236.

HADAMARD, *élève à l'École Normale supérieure*, 41, 72.

KŒNIGS, *professeur à la Faculté des sciences de Besançon*, 83, 102.

EM. LEMOINE, *ancien élève de l'École Polytechnique*, 193, 217, 241.

H. LE PONT, 207, 284.

G. DE LONGCHAMPS, *professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne*, 16, 36, 49, 68, 86, 94, 112, 117, 131, 140, 144, 153, 156, 168, 176, 192, 199, 216, 226, 239, 249, 264, 269.

ED. LUCAS, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis*, 99, 120, 239.

MARCHIS, *élève au lycée de Rouen*, 188, 238, 285.

MICHELIN, *à Lyon*, 287.

B. N..., 180.

NEUBERG, *professeur à l'Université de Liège*, 9, 25, 55, 73, 96.

D'OCAGNE, *ingénieur à Rochefort*, 15, 33, 64, 80, 265.

PÉRIN, 238.

PICQUET, *répétiteur à l'École Polytechnique*, 96.

PORCHON, *professeur au lycée de Versailles*, 147, 170.

POUJADE, *professeur de mathématiques spéciales au lycée de Lyon*, 95, 151, 268.

RAT, *à Marseille*, 258, 281.

R***, *licencié ès sciences*, 85.

S. Realis, *ingénieur à Turin*, 97, 115, 118, 121.

Schoute, *professeur à l'Université de Groningue*, 172, 196, 219, 245.

Taraste, *élève de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis*, 71.

Tissier, *à Poitiers*, 285.

Vessiot, *élève au lycée de Marseille*, 285.

Vèzes, *élève au lycée de Bordeaux*, 279.

Walecki, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Condorcet*, 144, 216, 287.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX,
RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26860-5.

QA
1
J6836
sér.2
t.4

Math.

Journal de mathématiques
élémentaires

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY